Н. БУРБАКИ

ИНТЕГРИРОВАНИЕ

МЕРЫ НА ЛОКАЛЬНО КОМПАКТНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

ПРОДОЛЖЕНИЕ МЕРЫ

ИНТЕГРИРОВАНИЕ МЕР

МЕРЫ НА ОТДЕЛИМЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

N. BOURBAKI FASCICULE XXV

ÉLÉMENTS DE MATHÉMATIQUE

PREMIÈRE PARTIE

LIVRE VI

INTÉGRATION

HERMANN
115, BOULEVARD SAINT-GERMAIN, PARIS VI

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИКИ

Н. БУРБАКИ

ИНТЕГРИРОВАНИЕ

МЕРЫ НА ЛОКАЛЬНО КОМПАКТНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ
ПРОДОЛЖЕНИЕ МЕРЫ
ИНТЕГРИРОВАНИЕ МЕР
МЕРЫ НА ОТДЕЛИМЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

ПЕРЕВОД С ФРАНЦУЗСКОГО
Е. И. СТЕЧКИНОЙ

ПОД РЕДАКЦИЕЙ
Ю. В. ПРОХОРОВА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1977

517.2
Б 91
УДК 517

Н. Бурбаки

ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Меры на локально компактных пространствах.
Продолжение меры. Интегрирование мер. Меры на отделимых пространствах

М., 1977 г., 600 стр. с. илл.

Редактор *В. В. Сазонов*
Техн. редактор *А. П. Колесникова* . Корректор *Н. Б. Румянцева*

Сдано в набор 16.06.1977 г. Подписано к печати 24.11.1977 г. Бумага 60×90¹/₁₆.
Физ. печ. л. 37,5. Условн. печ. л. 37,5. Уч.-изд. л. 34,81.
Тираж 12 000 экз. Цена книги 2 р. 80 к. Заказ № 0262.

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Трудового Красного Знамени Московская типография № 7
«Искра революции» Союзполиграфпрома при Государственном комитете
Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.
Москва, К-1, Трехпрудный пер., 9.

Б $\frac{20203-172}{053(02)-77}$ 35-77

© Перевод на русский язык,
Главная редакция
физико-математической литературы
издательства «Наука», 1977

ОГЛАВЛЕНИЕ

От редакции 11

Глава III. **Меры на локально компактных пространствах** 13

§ 1. Меры на локально компактном пространстве 13
1. Непрерывные функции с компактным носителем 13
2. Свойства приближения 17
3. Определение меры 21
4. Произведение меры на непрерывную функцию 25
5. Действительные меры. Положительные меры 26
6. Абсолютное значение комплексной меры 29
7. Определение меры посредством продолжения 31
8. Ограниченные меры 32
9. Широкая топология в пространстве мер 35
10. Компактная сходимость в $\mathscr{M}(X; C)$ 38
Упражнения 40

§ 2. Носитель меры 46
1. Сужение меры на открытое множество. Определение меры при помощи локальных данных 46
2. Носитель меры 48
3. Характеризация носителя меры 50
4. Точечные меры. Меры с конечным носителем 53
5. Дискретные меры 56
Упражнения 57

§ 3. Интегралы от непрерывных вектор-функций 58
1. Определение интеграла от вектор-функции 59
2. Свойства векторного интеграла 61
3. Критерии принадлежности интеграла пространству E 65
4. Свойства непрерывности интеграла 67
Упражнения 69

§ 4. Произведения мер 70
1. Произведение двух мер 70
2. Свойства мер — произведений 74
3. Непрерывность мер — произведений 77
4. Произведение конечного числа мер 78
5. Проективные пределы мер 80

6. Бесконечные произведения мер 84
Упражнения 85
Глава IV. **Продолжение меры. Пространства L^p** 88
§ 1. Верхний интеграл от положительной функции 88
1. Верхний интеграл от положительной полунепрерывной снизу функции 88
2. Внешняя мера открытого множества 92
3. Верхний интеграл от положительной функции 94
4. Внешняя мера произвольного множества 98
Упражнения 99
§ 2. Пренебрежимые функции и множества 102
1. Положительные пренебрежимые функции 102
2. Пренебрежимые множества 103
3. Свойства, справедливые почти всюду 103
4. Классы эквивалентных функций 105
5. Функции, определенные почти всюду 107
6. Классы эквивалентности функций со значениями в $\overline{\mathbf{R}}$ 108
§ 3. Пространства L^p 110
1. Неравенство Минковского 110
2. Полунормы N_p 111
3. Пространства $\mathscr{F}_F^p$ 113
4. Функции, интегрируемые в p-й степени 116
5. Свойства функций, интегрируемых в p-й степени 120
6. Фильтрующиеся множества в L^p и возрастающие последовательности в $\mathscr{L}^p$ 121
7. Теорема Лебега 126
8. Соотношения между пространствами $\mathscr{L}_F^p$ $(1 \leqslant p < +\infty)$ . . . 127
Упражнения 128
§ 4. Интегрируемые функции и множества 129
1. Продолжение интеграла 129
2. Свойства интеграла 131
3. Предельный переход в интегралах 133
4. Характеризация интегрируемых числовых функций 134
5. Интегрируемые множества 140
6. Критерии интегрируемости множества 142
7. Характеризация ограниченных мер 146
8. Интегрирование относительно меры с компактным носителем . 147
9. Алгебры и аддитивные функции множества 151
10. Приближение непрерывных функций размещенными функциями 154
11. Продолжение меры, определенной на семействе множеств . . 156
Упражнения 162
§ 5. Измеримые функции и множества 172
1. Определение измеримых функций и множеств 172

2. Принцип локализации. Локально пренебрежимые множества 175
3. Элементарные свойства измеримых функций 178
4. Пределы измеримых функций 179
5. Критерии измеримости 182
6. Критерии интегрируемости 189
7. Мера, индуцированная на локально компактном подпространстве 192
8. μ-плотные семейства компактных множеств 194
9. Локально счетные разбиения 197
10. Измеримые функции, определенные на измеримом подмножестве 198
11. Сходимость по мере 201
12. Одно свойство широкой сходимости 208
Упражнения 212
§ 6. Неравенства выпуклости 222
1. Теорема о выпуклости 222
2. Неравенство о среднем 223
3. Пространства L_F^∞ 225
4. Неравенство Гёльдера 227
5. Приложение: соотношения между пространствами L_F^∞ ($1 \leqslant p \leqslant +\infty$) 233
Упражнения 236
§ 7. Барицентры 247
1. Определение барицентров 247
2. Экстремальные точки и барицентры 249
3. Приложения: I. Векторные пространства непрерывных действительных функций 254
4. Приложения: II. Векторные пространства непрерывных комплексных функций 259
5. Приложения: III. Алгебры непрерывных функций 261
6. Единственность интегральных представлений 265
Упражнения 268

Глава V. **Интегрирование мер** 279

§ 1. Существенный верхний интеграл 280
1. Определение существенного верхнего интеграла 280
2. Модерантные функции и множества 282
3. Существенно интегрируемые функции 286
4. Одно специальное свойство существенного верхнего интеграла 290
Упражнения 291
§ 2. Суммируемые семейства положительных мер 292
1. Определение суммируемых семейств мер 292
2. Интегрирование относительно суммы положительных мер . . . 293
3. Разбиение меры на сумму мер с компактными носителями . . . 296
Упражнения 297

§ 3. Интегрирование положительных мер 298
1. Функции со значениями в пространстве мер 298
2. Повторные интегралы от положительных функций 304
3. Повторные интегралы от функций со значениями в банаховом пространстве 309
4. Универсально измеримые функции 311
5. Диффузии 312
6. Композиция ограниченных диффузий 316
Упражнения 318
§ 4. Интегрирование положительных точечных мер 321
1. Семейства точечных мер 321
2. Верхние интегралы от положительных функций относительно интеграла от точечных мер 323
3. Измеримость относительно интеграла от точечных мер 327
4. Интегрирование функций со значениями в банаховом пространстве относительно интеграла от точечных мер 328
Упражнения 330
§ 5. Меры, определенные при помощи числовых плотностей 330
1. Локально интегрируемые функции 330
2. Меры, определенные при помощи числовых плотностей 332
3. Интегрирование относительно меры, определенной при помощи плотности 336
4. Свойства произведения относительно обычных операций . . . 339
5. Характеризация мер с базисом μ 343
6. Эквивалентные меры 349
7. Сингулярные меры 351
8. Приложения: I. Двойственность пространств L^p 353
9. Приложения: II. Функции мер 358
10. Непрерывные меры; атомические меры 360
Упражнения 361
§ 6. Образы меры 374
1. Образ положительной меры 374
2. Интегрирование относительно образа положительной меры . . 376
3. Свойства образа положительной меры 377
4. Образ комплексной меры 380
5. Приложение: замена переменной в интеграле Лебега 381
6. Разбиение на слои. Прообраз меры при локальном гомеоморфизме 384
Упражнения 388
§ 7. Интегрирование относительно индуцированной меры 395
1. Интегрирование относительно индуцированной меры 395
2. Свойства индуцированных мер 398
Упражнения 400
§ 8. Произведения мер 403
1. Интерпретация меры-произведения как интеграла мер 403

2. Измеримые функции относительно произведения двух мер . . . 406
3. Интегрирование положительных функций 408
4. Интегрирование функций со значениями в банаховом пространстве 413
5. Операции над произведением двух мер 416
6. Интегрирование относительно конечного произведения мер . . 418
7. Приложение: Мера евклидова шара в $\mathbf{R}^n$ 420
Упражнения 421

Глава IX. **Меры на отделимых топологических пространствах** . . . 435

§ 1. Предмеры и меры на топологическом пространстве 435
1. Заграждения 435
2. Предмеры и меры 437
3. Примеры мер 441
4. Локально пренебрежимые множества и функции 444
5. Измеримые множества и функции 445
6. Фильтрующиеся семейства; носитель меры 447
7. Верхние огибающие и суммы мер 449
8. Измельчения 450
9. Верхний интеграл 454
10. Теория интегрирования 459
Упражнения 462
§ 2. Операции над мерами 464
1. Индуцированная мера на измеримом подпространстве 464
2. Меры, определенные посредством числовых плотностей 466
3. Образ меры 469
4. Поднятие мер 473
5. Произведение двух мер 476
6. Интегрирование относительно произведения двух мер 478
7. Один результат о дезинтегрировании мер 483
Упражнения 487
§ 3. Меры и аддитивные функции множества 488
1. Меры и аддитивные функции компактов 488
2. Внутренне регулярные функции множества 492
3. Радоновы пространства 494
Упражнения 498
§ 4. Проективные пределы мер 504
1. Дополнения о компактных пространствах и проективных пределах 505
2. Проективные системы мер 506
3. Случай счетных проективных систем 510
Упражнения 512
§ 5. Меры на вполне регулярных пространствах 513
1. Меры и непрерывные ограниченные функции 513
2. Ограниченные меры и линейные формы на $\mathscr{C}^b(T)$ 517

3. Узкая сходимость ограниченных мер 518
4. Приложение: Топологические свойства пространства $\mathcal{M}_+^b(T)$ . . 522
5. Критерий компактности для узкой сходимости 524
6. Узкая сходимость мер и компактная сходимость функций . . . 526
7. Приложение: Преобразование Лапласа 529
Упражнения 534
§ 6. Промеры и меры на локально выпуклом пространстве 540
1. Промеры на локально выпуклом пространстве 540
2. Образ промеры 542
3. Преобразование Фурье промеры 543
4. Вычисление гауссовых интегралов 545
5. Гауссовы промеры и меры 547
6. Примеры гауссовых промер 552
7. Мера Винера 554
8. Непрерывность преобразования Фурье 562
9. Лемма Минлоса 563
10. Меры на сопряженном к ядерному пространству 566
11. Меры на гильбертовом пространстве 568
12. Связи с функциями положительного типа 570
Упражнения 572
Добавление. Дополнения о гильбертовых пространствах 573
1. След одной квадратичной формы относительно другой 573
2. Отображения Гильберта — Шмидта 576
Упражнения 577
Исторический очерк 581
Библиография 592
Указатель терминов 594

ОТ РЕДАКЦИИ

Настоящий выпуск, завершающий книгу VI «Интегрирование», носит не совсем обычный характер: он содержит главы III — V и главу IX. Главы I — VIII уже были опубликованы в русском переводе: в 1967 г. (гл. I — V) и в 1970 г. (гл. VI — VIII).

При написании последней, девятой, главы были существенным образом переработаны главы III — V с целью распространения излагаемых понятий и результатов на более общие пространства. Изложение IX главы в значительной мере построено при помощи системы ссылок (в основном на указанные главы).

В связи с этим в настоящей книге вместе с переводом главы IX представлен перевод глав III — V со второго французского издания.

Во избежание путаницы система ссылок оставлена в том виде, как она дана в оригинале — указываются номера французских изданий; отсутствие номера означает первое издание (или ссылку внутри главы).

Глава IX посвящена интегрированию в отделимых топологических пространствах, не обязательно локально компактных, и в частности, в локально выпуклых пространствах, что дает возможность распространить на них теорию преобразований Фурье. В этой главе избран способ изложения, позволяющий, в случае компактных пространств, использовать предыдущие главы.

Главы III, IV отличаются от первого издания прежде всего многочисленными изменениями, связанными с рассмотрением комплексных мер. Глава IV — кроме того, введением понятия сходимости по мере и добавлением нового параграфа, посвященного барицентрам компактных связных множеств и теоремам Шоке об их выражении при помощи мер.

Основные изменения главы V носят следующий характер. Учитывая, что существенный верхний интеграл с нескольких точек зрения обладает более удовлетворительными свойствами, чем обычный верхний интеграл, посвященный ему параграф был расширен. Точно так же более подробно изучена теория суммируемых семейств положительных мер. Введено понятие диффузии; понятие μ-согласованного семейства положительных мер слегка обобщено, с тем чтобы иметь возможность определить композицию *диффузий*.

Для систематического изучения комплексных мер потребовалось частично отказаться от точки зрения пространств Рисса. Наконец, были изменены различные доказательства, с тем чтобы результаты могли в дальнейшем использоваться для случая отделимых пространств (не обязательно локально компактных), каковые изучаются в главе IX.

Терминология настоящего выпуска в некоторых случаях отлична от принятой в других выпусках: она приближена к терминологии, употребляющейся в соответствующей русской научной литературе по теории вероятностей. Все расхождения будут отмечены в предметном указателе.

ГЛАВА III

МЕРЫ НА ЛОКАЛЬНО КОМПАКТНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

§ 1. Меры на локально компактном пространстве

1. *Непрерывные функции с компактным носителем*

Определение 1. *Пусть X — топологическое пространство и E — векторное пространство над* $\mathbf{R}$ *или пространство* $\overline{\mathbf{R}}$. *Носителем отображения f пространства X в E называется, и обозначается* $\operatorname{supp}(f)$, *такое наименьшее замкнутое множество S из X, что $f(x) = 0$ на $X - S$* (иными словами, S есть замыкание в X множества тех $x \in X$, для которых $f(x) \neq 0$).

Пусть X — локально компактное пространство и E — топологическое векторное пространство над $\mathbf{R}$ или над $\mathbf{C}$; напомним, что через $\mathscr{C}(X; E)$ обозначается векторное пространство непрерывных отображений X в E; в случаях $E = \mathbf{R}$ или $E = \mathbf{C}$ значок пространства E в этом обозначении опускается, если это не ведет к недоразумению. Через $\mathscr{K}(X; E)$ обозначается подпространство пространства $\mathscr{C}(X; E)$, состоящее из непрерывных отображений *с компактным носителем*; мы будем, для любого подмножества A из X, обозначать через $\mathscr{C}(X, A; E)$ (соотв. $\mathscr{K}(X, A; E)$) подпространство в $\mathscr{C}(X; E)$ (соотв. в $\mathscr{K}(X; E)$), состоящее из тех отображений f, для которых $\operatorname{supp}(f) \subset A$. Если $E = \mathbf{R}$ или $E = \mathbf{C}$, то вместо $\mathscr{K}(X; \mathbf{R})$ или $\mathscr{K}(X; \mathbf{C})$ (соотв. $\mathscr{K}(X, A; \mathbf{R})$ или $\mathscr{K}(X, A; \mathbf{C})$) пишут $\mathscr{K}(X)$ (соотв. $\mathscr{K}(X, A)$), если не может возникнуть путаницы; через $\mathscr{K}_+(X)$ обозначают заостренный выпуклый конус, составленный из положительных функций пространства $\mathscr{K}(X, \mathbf{R})$.

Для любого компактного подмножества K из X пространство $\mathscr{K}(X, K; E)$ отождествляется с некоторым подпространством

пространства $\mathscr{C}(K; E)$ непрерывных функций (а именно, с подпространством непрерывных отображений K в E, обращающихся в нуль на границе множества K). Если наделить $\mathscr{C}(K; E)$ топологией равномерной сходимости на K, то $\mathscr{K}(X, K; E)$ становится *замкнутым* подпространством пространства $\mathscr{C}(K; E)$. В частности, когда E — *пространство Фреше* (соотв. *банахово пространство*), таковым будет и $\mathscr{K}(X, K; E)$, ибо если топология в E определяется полунормами p_n (соотв. нормой $x \mapsto \|x\|$), то топология в $\mathscr{K}(X, K; E)$ определяется полунормами $f \mapsto \sup_{x \in K} p_n(f(x))$ (соотв. нормой $f \mapsto \sup_{x \in K} \|f(x)\|$, обозначаемой $\|f\|$).

Пространство $\mathscr{K}(X; E)$ является объединением возрастающего фильтрующегося семейства подпространств $\mathscr{K}(X, K; E)$, где K пробегает множество компактных подмножеств из X; если при этом $K_1 \subset K_2$ — два компактных подмножества из X, то каноническая инъекция $\mathscr{K}(X, K_1; E) \to \mathscr{K}(X, K_2; E)$ *непрерывна* относительно введенных выше топологий. Если E *локально выпукло*, то можно, стало быть, определить в $\mathscr{K}(X; E)$ топологию, являющуюся *индуктивным пределом* локально выпуклых топологий пространств $\mathscr{K}(X, K; E)$ (Топ. вект. пр-ва, гл. II (2-е изд.), § 4, п. 4); в дальнейшем всюду, где не будет оговариваться противное, при рассмотрении $\mathscr{K}(X; E)$ как топологического векторного пространства будет подразумеваться именно эта топология.

Предложение 1. *Пусть X — локально компактное пространство и E — отделимое локально выпуклое пространство.*

(i) *Локально выпуклое пространство $\mathscr{K}(X; E)$ отделимо. Для любого компактного подмножества K из X топология, индуцированная топологией пространства $\mathscr{K}(X; E)$ в $\mathscr{K}(X, K; E)$, есть топология равномерной сходимости на K, и каждое из подпространств $\mathscr{K}(X, K; E)$ замкнуто в $\mathscr{K}(X; E)$.*

(ii) *Если E есть произведение конечного числа локально выпуклых пространств E_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$, то отображение $f \mapsto (\mathrm{pr}_i \circ f)$ есть изоморфизм пространства $\mathscr{K}(X; E)$ на произведение пространств $\prod_{1 \leqslant i \leqslant n} \mathscr{K}(X; E_i)$.*

(iii) *Если X есть сумма некоторого семейства $(X_\lambda)_{\lambda \in L}$ локально компактных пространств, то отображение $f \mapsto (f \mid X_\lambda)_{\lambda \in L}$ есть*

изоморфизм пространства $\mathscr{K}(X; E)$ *на пространство, являющееся топологической прямой суммой семейства* $(\mathscr{K}(X_\lambda; E))_{\lambda\in L}$.

(i) Отметим, что в $\mathscr{K}(X; E)$ топология равномерной сходимости *на* X согласуется со структурой векторного пространства в $\mathscr{K}(X; E)$, так как для любой $f \in \mathscr{K}(X; E)$ с (компактным) носителем S множество $f(X) = f(S) \cup \{0\}$ компактно, и значит, ограничено в E (Топ. векг. пр-ва, гл. III, § 3, п. 1, предл. 1). Но эта топология $\mathscr{T}_0$ локально выпукла и индуцирует в каждом из пространств $\mathscr{K}(X, K; E)$ топологию равномерной сходимости на K; поэтому то же самое имеет место для топологии — индуктивного предела $\mathscr{T}$ в $\mathscr{K}(X; E)$ (Топ. векг. пр-ва, гл. II (2-е изд.), § 4,*) п. 4, замечание); при этом $\mathscr{T}$ мажорирует $\mathscr{T}_0$, и $\mathscr{T}_0$ отделима, а стало быть, и $\mathscr{T}$ отделима. Наконец, предположим, что функция $f \in \mathscr{K}(X; E)$ является точкой прикосновения для $\mathscr{K}(X, K; E)$; по определению, в X найдется такое компактное множество $K' \supset K$, что $f \in \mathscr{K}(X, K'; E)$. Согласно вышеизложенному f есть точка прикосновения множества $\mathscr{K}(X, K; E)$ в пространстве $\mathscr{K}(X, K'; E)$, и значит, принадлежит $\mathscr{K}(X, K; E)$.

(ii) Критерий непрерывности в индуктивном пределе топологий (Топ. векг. пр-ва, гл. II (2-е изд.), § 4, п. 4, предл. 5) сразу же показывает, что отображение $f \mapsto (\mathrm{pr}_i \circ f)$ непрерывно и что то же самое верно для обратного отображения (что касается последнего, достаточно заметить следующее: если для любой функции $f_i \in \mathscr{K}(X; E_i)$ обозначить через f_i' отображение X в E, обладающее тем свойством, что $\mathrm{pr}_i \circ f_i' = f_i$ и $\mathrm{pr}_j \circ f_i' = 0$ для $j \neq i$, то каждое из отображений $f_i \mapsto f_i'$ будет непрерывным).

(iii) Каждое компактное подмножество K из X пересекается лишь со множествами X_λ *конечного* подсемейства $(X_\lambda)_{\lambda\in H}$ семейства $(X_\lambda)_{\lambda\in L}$, и очевидно, если положить $K_\lambda = K \cap X_\lambda$ для $\lambda \in H$, то отображение $f \mapsto (f \mid X_\lambda)_{\lambda\in H}$ будет изоморфизмом пространства $\mathscr{K}(X, K; E)$ на $\prod_{\lambda\in H} \mathscr{K}(X_\lambda, K_\lambda; E)$. Обратно, пусть для любой функции $f_\lambda \in \mathscr{K}(X_\lambda; E)$ через f_λ' обозначено отображение X в E, определяемое условиями $f_\lambda' \mid X_\lambda = f_\lambda$ и $f_\lambda' \mid X_\mu = 0$ для $\mu \neq \lambda$; ясно, что отображение $f_\lambda \mapsto f_\lambda'$ пространства $\mathscr{K}(X_\lambda; E)$ в $\mathscr{K}(X; E)$ непрерывно. Утверждение (iii) вытекает из этих

*) § 2 в русском издании.

замечаний и из признака непрерывности в индуктивных пределах (Топ. вект. пр-ва, гл. II (2-е изд.), § 4, п. 4, предл. 5).

Предложение 2. *Пусть X — локально компактное пространство и E — отделимое локально выпуклое пространство.*

(i) *Если E — пространство Фреше, то $\mathscr{K}(X; E)$ — бочечное пространство*

(ii) *Если X паракомпактно, то для любого ограниченного множества B из $\mathscr{K}(X; E)$ найдется такое компактное подмножество K из X, что $B \subset \mathscr{K}(X, K; E)$.*

Предположим, что E — пространство Фреше. Тогда $\mathscr{K}(X, K; E)$ для любого компактного подмножества K из E тоже будет пространством Фреше, а значит, бочечным пространством; но, как известно, индуктивный предел бочечных пространств является бочечным пространством (Топ. вект. пр-ва, гл. III, § 1, п. 2, следствие 2 из предл. 2), откуда и следует (i).

Если X паракомпактно, то (Общая топ., гл. I (3-е изд.), § 9, п. 10, теорема 5) X есть *сумма* семейства $(X_\lambda)_{\lambda \in L}$ локально компактных пространств, *счетных в бесконечности*; следовательно (предл. 1, (iii)), $\mathscr{K}(X; E)$ есть *топологическая прямая сумма* семейства подпространств $\mathscr{K}(X_\lambda; E)$ ($\lambda \in L$). В силу известной характеризации ограниченных множеств в топологической прямой сумме (Топ. вект. пр-ва, гл. III, (2-е изд.)), всякое ограниченное множество из $\mathscr{K}(X; E)$ содержится в сумме *конечного* числа подпространств $\mathscr{K}(X_\lambda; E)$, и нам достаточно доказать, что всякое ограниченное множество из $\mathscr{K}(X_\lambda; E)$ содержится в подпространстве $\mathscr{K}(X_\lambda, K_\lambda; E)$, где K_λ — компактное множество из X_λ. Тем самым все сводится к случаю, когда X счетно в бесконечности, или, иными словами, является объединением последовательности открытых относительно компактных множеств U_n, удовлетворяющих условию $\overline{U}_n \subset U_{n+1}$ (Общая топ., гл. I (3-е изд.), § 9, п. 9, предл. 15). Тогда $\mathscr{K}(X; E)$ есть *строгий* индуктивный предел пространств $\mathscr{K}(X, \overline{U}_n; E)$, откуда и следует утверждение (ii) (Топ. вект. пр-ва, гл. III, § 2, п. 4, предл. 6).

Будем говорить, что подмножество H из $\mathscr{K}(X; E)$ *строго компактно*, если оно компактно и если существует такое компактное подмножество K из X, что $H \subset \mathscr{K}(X, K; E)$. Из пред-

ложения 2 сразу же вытекает, что если X — *паракомпактное* локально компактное пространство и если E отделимо, то *любое компактное множество* из $\mathscr{K}(X; E)$ *строго компактно*. Можно привести примеры таких (не паракомпактных) локально компактных пространств X, чтобы в $\mathscr{K}(X; \mathbf{R})$ существовали *компактные, но не строго компактные* множества (упр. 3 и 4).

Напомним, что в силу теоремы Асколи (Общая топ., гл. X (2-е изд.), § 2, п. 5, следствие 3 из теоремы 2), строго компактное подмножество H из $\mathscr{K}(X; E)$, содержащееся в $\mathscr{K}(X, K; E)$, характеризуется следующими условиями: 1) оно замкнуто; 2) оно равностепенно непрерывно; 3) множество $H(x)$ относительно компактно в E для любого $x \in K$.

Следствие. *Пусть X — паракомпактное локально компактное пространство; если E — квазиполное локально выпуклое пространство, то пространство $\mathscr{K}(X; E)$ квазиполно.*

В самом деле, в силу предложения 2 (ii) достаточно заметить, что для любого компактного подмножества K из X множество $\mathscr{K}(X, K; E)$ есть замкнутое подпространство пространства $\mathscr{C}(K; E)$, которое квазиполно, поскольку любое ограниченное подмножество из $\mathscr{C}(K; E)$ состоит из функций, принимающих свои значения в одном и том же ограниченном подмножестве из E.

2. Свойства приближения

Лемма 1. *Пусть X — локально компактное пространство, K — компактное подмножество из X, $(V_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ — конечное покрытие K открытыми множествами из X. Тогда существуют такие n непрерывных отображений f_k пространства X в $[0, 1]$, что носитель f_k содержится в V_k для $1 \leqslant k \leqslant n$, $\sum_{k=1}^{n} f_k(x) \leqslant 1$ для любого $x \in X$ и $\sum_{k=1}^{n} f_k(x) = 1$ для любого $x \in K$.*

В самом деле, пусть X' — компактное пространство, полученное присоединением к X бесконечно удаленной точки ω (Общая топ., гл. I (3-е изд.), § 9, п. 8, теорема 4); множества $V_0 = X' - K$ и V_k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ образуют открытое покрытие пространства X'. Пусть $(f_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ — непрерывное разбиение единицы, подчиненное

этому покрытию пространства X' (Общая топ., гл. IX (2-е изд.), § 4, п. 3, предл. 3); функции f_k с индексом $k \geqslant 1$ удовлетворяют условиям леммы

Лемма 2. *Пусть X — локально компактное пространство, K — компактное подмножество из X, E — локально выпуклое пространство, q — непрерывная полунорма на E и Φ — равностепенно непрерывное множество отображений пространства X в E, с носителем, содержащимся в K. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется непрерывное разбиение $(\varphi_j)_{0 \leqslant j \leqslant n}$ единицы на X, обладающее следующими свойствами:*

(i) $\operatorname{supp}(\varphi_j) \subset K$ *для* $1 \leqslant j \leqslant n$.

(ii) *Если x_j — произвольная точка из* $\operatorname{supp}(\varphi_j)$ *для* $1 \leqslant j \leqslant n$, *то для любой функции $f \in \Phi$ и любого $x \in X$*

$$q\left(f(x) - \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(x) f(x_j)\right) \leqslant \varepsilon. \tag{1}$$

Для любого y, принадлежащего границе множества K, имеем $f(y) = 0$, где f — любая функция из Φ; следовательно, в X существует такая открытая окрестность V_y элемента y, что для любого $z \in V_y$ и любой $f \in \Phi$ справедливо неравенство $q(f(z)) \leqslant \varepsilon/2$. Пусть K' — множество точек из K, не принадлежащих никакой из окрестностей V_y, когда y пробегает границу множества K; K' компактно и принадлежит внутренности K. Множество Φ равномерно равностепенно непрерывно в K; стало быть, существует конечное открытое покрытие $(U_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ множества K', состоящее из таких открытых в X множеств, содержащихся в K, что для любой пары точек x, y из одного и того же множества U_j и для любой функции $f \in \Phi$ выполняется неравенство $q(f(x) - f(y)) \leqslant \varepsilon/2$. Согласно лемме 1, найдутся n непрерывных отображений φ_j $(1 \leqslant j \leqslant n)$ пространства X в $[0, 1]$, для которых $\operatorname{supp}(\varphi_j) \subset U_j$ и для которых $\sum_{j=1}^{n} \varphi_j(x) \leqslant 1$ на X и $\sum_{j=1}^{n} \varphi_j(x) = 1$ на K'. Таким образом, для $x_j \in \operatorname{supp}(\varphi_j)$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$ и $f \in \Phi$ имеем, при любом $x \in \bigcup U_j$,

$$q(f(x)\varphi_j(x) - f(x_j)\varphi_j(x)) = \varphi_j(x)\, q(f(x) - f(x_j)) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\varphi_j(x),$$

причем это соотношение верно и при $x \notin U_j$, поскольку в этом случае $\varphi_j(x) = 0$. В результате сложения получаем, для

любого $x \in X$,

$$q\Big(f(x)\ (1-\varphi_0(x)) - \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(x) f(x_j)\Big) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}(1-\varphi_0(x)), \qquad (2)$$

где полагаем $\varphi_0 = 1 - \sum_{j=1}^{n} \varphi_j$; отсюда вытекает (1) для $x \in K'$, потому что при этом $\varphi_0(x) = 0$; формула (1) верна также и для $x \notin K$, поскольку в таком случае левая часть обращается в нуль. Наконец, по определению множества K', имеем для $x \in K - K'$ неравенство $q(f(x)\ \varphi_0(x)) \leqslant \varepsilon/2$; это соотношение и формула (2) снова дают (1).

Пусть X — локально компактное пространство; для любого (действительного или комплексного) *банахова пространства* E будем через $\mathscr{C}^b(X; E)$ обозначать векторное пространство *непрерывных ограниченных* отображений X в E; известно, что топология *равномерной сходимости* на X согласуется со структурой (соотв. действительного или комплексного) векторного пространства $\mathscr{C}^b(X; E)$ и определяется *нормой*

$$\|f\| = \sup_{x \in X} \|f(x)\|. \qquad (3)$$

Пространство, нормированное таким образом, является *банаховым пространством* (Общая топ., гл. X (2-е изд.), § 3, п. 2, и п. 1, следствие 2 из предл. 3); топология, определяемая этой нормой в $\mathscr{K}(X; E)$ (иными словами, топология равномерной сходимости на X), слабее, чем топология — индуктивный предел, определенная для $\mathscr{K}(X; E)$ в п. 1.

Предложение 3. *Пусть X — локально компактное пространство, X' — компактное пространство, полученное присоединением к X бесконечно удаленной точки* ω (Общая топ., гл. I (3-е изд.), § 9, п. 8, теорема 4), *и E — банахово пространство. Замыкание множества $\mathscr{K}(X; E)$ в нормированном пространстве $\mathscr{C}^b(X; E)$ есть векторное пространство непрерывных функций на X, принимающих значения в E и стремящихся к 0 при стремлении к точке* ω.

Действительно, пусть $f \in \mathscr{C}^b(X; E)$ — функция, являющаяся точкой прикосновения множества $\mathscr{K}(X; E)$; для любого $\varepsilon > 0$

найдется такая функция $g \in \mathscr{K}(X; E)$, что $\|f(x) - g(x)\| \leqslant \varepsilon$ для всех $x \in X$; значит, если K — носитель функции g, то $\|f(x)\| \leqslant \varepsilon$ для всех $x \in \complement K$, и следовательно, $f(x)$ стремится к 0, когда x стремится к ω. Обратно, если f обладает этим свойством, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое компактное множество $K \subset X$, что $\|f(x)\| \leqslant \varepsilon$ для всех $x \in \complement K$. Согласно лемме 1, существует непрерывное отображение h пространства X в $[0, 1]$, имеющее компактный носитель и равное 1 на K; стало быть, $\|f(x)\,h(x)\| \leqslant \varepsilon$ на $\complement K$, и $f(x) = f(x)h(x)$ на K; но fh имеет компактный носитель и $\|f(x) - f(x)\,h(x)\| \leqslant 2\varepsilon$ для всех $x \in X$; тем самым предложение доказано.

Будем обозначать через $\mathscr{C}^0(X; E)$ подпространство пространства $\mathscr{C}^b(X; E)$, состоящее из функций, стремящихся к 0 в бесконечно удаленной точке ω; в соответствии со сказанным выше это — *пополнение нормированного пространства* $\mathscr{K}(X; E)$.

Предложение 4. *Пусть X — локально компактное пространство и E — локально выпуклое пространство; тогда пространство $\mathscr{K}(X; E)$ всюду плотно в $\mathscr{C}(X; E)$ относительно топологии компактной сходимости.*

В самом деле, в силу леммы 1, для любого компактного множества $K \subset X$ существует функция $h \in \mathscr{K}(X; \mathbf{R})$, равная 1 на K; для любой функции $f \in \mathscr{C}(X; E)$ функция hf, принадлежащая $\mathscr{K}(X; E)$, равна f на K, и наше утверждение отсюда вытекает.

Предложение 5. *Пусть X — локально компактное пространство и E — действительное* (соотв. *комплексное*) *локально выпуклое пространство. Для любого компактного подмножества K из X пространство $\mathscr{K}(X, K; \mathbf{R}) \otimes_{\mathbf{R}} E$* (соотв. $\mathscr{K}(X, K; \mathbf{C}) \otimes_{\mathbf{C}} E$) (отождествленное с множеством отображений X в пространство E; ср. Алгебра, гл. II (3-е изд.), § 7, п. 7, следствие из предл. 15) *плотно в $\mathscr{K}(X, K; E)$; векторное пространство $\mathscr{K}(X; \mathbf{R}) \otimes_{\mathbf{R}} E$* (соотв. $\mathscr{K}(X; \mathbf{C}) \otimes_{\mathbf{C}} E$) *плотно в $\mathscr{K}(X; E)$.*

Второе утверждение является очевидным следствием первого, и поэтому достаточно доказать только первое утверждение. Применим лемму 2, считая Φ состоящим из одного элемента f множества

$\mathscr{K}(X, K; E)$; тогда для любого $x \in X$

$$q\left(f(x) - \sum_{i=1}^{n} \varphi_j(x)\, f(x_j)\right) \leqslant \varepsilon,$$

где φ_j принадлежит $\mathscr{K}(X, K; \mathbf{R})$; но отображение $x \mapsto \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(x) f(x_j)$ канонически отождествляется с элементом $\sum_{j=1}^{n} \varphi_j \otimes f(x_j)$, что, согласно определению топологии в $\mathscr{K}(X, K; E)$, и доказывает предложение.

3. Определение меры

Определение 2. *Мерой* (или *комплексной мерой*) *на локально компактном пространстве* X *называется любая непрерывная линейная форма на пространстве* $\mathscr{K}(X; \mathbf{C})$.

Если μ — мера на локально компактном пространстве X, то значение этой меры на функции $f \in \mathscr{K}(X; \mathbf{C})$ называется *интегралом от* f *относительно* μ; для обозначения меры, кроме символов $\mu(f)$ и $\langle f, \mu \rangle$ общего типа, используются также обозначения $\int f d\mu$, $\int f\mu$, $\int f(x)\, d\mu(x)$ и $\int f(x)\, \mu(x)$; относительно использования буквы x см. Теор. мн., гл. I, § 1, п. 1.

Согласно критерию непрерывности в индуктивных пределах (Топ. вект. пр-ва, гл. II (2-е изд.), § 4, п. 4, предл. 5), утверждение, что μ есть мера на X, означает, что μ есть линейная форма на $\mathscr{K}(X; \mathbf{C})$, удовлетворяющая следующему условию: для любого компактного подмножества K из X найдется такое число M_K, что для любой функции $f \in \mathscr{K}(X; \mathbf{C})$, *носитель которой содержится в* K, справедливо неравенство

$$|\mu(f)| \leqslant M_K \cdot \|f\| \quad (\text{где } \|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|). \tag{4}$$

Вообще, имеет место следующее предложение.

Предложение 6. *Пусть* X *— локально компактное пространство и пусть* (K_α) *— семейство компактных подмножеств из* X, *внутренности* $\overset{\circ}{K}_\alpha$ *которых образуют покрытие* X. *Для того чтобы линейная форма* μ *на* $\mathscr{K}(X; \mathbf{C})$ *была мерой на* X, *необходимо и доста-*

точно, чтобы для любого α *существовало такое число* M_α, *что*

$$|\mu(f)| \leqslant M_\alpha \|f\| \tag{5}$$

для любой функции $f \in \mathscr{K}(X, K_\alpha; \mathbf{C})$.

Необходимость очевидна, и стало быть, достаточно доказать, что (5) влечет (4) для любого компактного подмножества $K \subset X$. Но K покрыто конечным числом открытых множеств $\overset{\circ}{K}_{\alpha_i}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$; поэтому, применяя к K и $\overset{\circ}{K}_\alpha$ лемму 1 из п. 2, выводим, что существуют такие непрерывные на X функции $g_i \geqslant 0$, что $\operatorname{supp}(g_i) \subset K_{\alpha_i}$,

$$0 \leqslant \sum_{i=1}^{n} g_i(x) \leqslant 1$$

для любого $x \in X$ и $\sum_{i=1}^{n} g_i(x) = 1$ для $x \in K$. Значит, для любой функции $f \in \mathscr{K}(X, K; \mathbf{C})$ можем записать: $f = \sum_{i=1}^{n} fg_i$, причем

$$fg_i \in \mathscr{K}(X, K_{\alpha i}; \mathbf{C})$$

и $\|fg_i\| \leqslant \|f\|$; следовательно, при $M = \sum_{i=1}^{n} M_{\alpha_i}$ получаем соотношение (4).

Будем обозначать через $\mathscr{M}(X; \mathbf{C})$, или просто $\mathscr{M}(X)$, если это не ведет к недоразумению, векторное пространство мер на X, или, иными словами, пространство, *сопряженное* к $\mathscr{K}(X; \mathbf{C})$. Как известно, для любого множества $\mathfrak{S}$ *ограниченных* подмножеств из $\mathscr{K}(X; \mathbf{C})$ определена $\mathfrak{S}$-*топология* на $\mathscr{M}(X; \mathbf{C})$, являющаяся локально выпуклой (Топ. вект. пр-ва, гл. IV, § 2, п. 3). Топологическое векторное пространство, полученное в результате наделения $\mathscr{M}(X; \mathbf{C})$ $\mathfrak{S}$-топологией, будем обозначать $\mathscr{M}_\mathfrak{S}(X; \mathbf{C})$ или $\mathscr{M}_\mathfrak{S}(X)$.

Предложение 7. *Для любого множества* $\mathfrak{S}$ *ограниченных подмножеств из* $\mathscr{K}(X; \mathbf{C})$, *образующих покрытие* $\mathscr{K}(X; \mathbf{C})$, *пространство* $\mathscr{M}_\mathfrak{S}(X; \mathbf{C})$ *отделимо и квазиполно.*

Это следует из того, что $\mathscr{K}(X; \mathbf{C})$ бочечно (Топ. вект. пр-ва, гл. III, § 3, п. 7, следствие 2 из теоремы 4).

Примеры мер. I. *Атомические меры.* Пусть X — локально компактное пространство и a — точка из X; отображение $f \mapsto f(a)$ пространства $\mathscr{K}(X, \mathbf{C})$ в $\mathbf{C}$ удовлетворяет, очевидно, условию (4) с $M_K = 1$ для любого компактного подмножества $K \subset X$, содержащего a, и значит, является мерой на X; она обозначается ε_a; говорят, что это есть *мера Дирака* в точке a или, еще, *мера, определяемая единичной массой, помещенной в точке a.*

Вообще, пусть α — такое отображение X в $\mathbf{C}$, что для любого компактного подмножества $K \subset X$ имеем $\sum_{x \in K} |\alpha(x)| < +\infty$. Тогда для любой функции $f \in \mathscr{K}(X, K; \mathbf{C})$ сумма

$$\mu(f) = \sum_{x \in X} \alpha(x) f(x)$$

определена и равна $\sum_{x \in K} \alpha(x) f(x)$; ясно, что μ есть линейная форма на $\mathscr{K}(X; \mathbf{C})$, и для $f \in \mathscr{K}(X, K; \mathbf{C})$ имеем

$$|\mu(f)| \leqslant \left(\sum_{x \in K} |\alpha(x)|\right) \cdot \|f\|;$$

иными словами, выполняется условие (4).

Мера μ на X называется *атомической*, если существует такое отображение α пространства X в $\mathbf{C}$, что $\sum_{x \in K} |\alpha(x)| < +\infty$ для любого компактного подмножества $K \subset X$ и что μ равна мере, определенной указанным выше способом. Если N — множество тех $x \in X$, в которых $\alpha(x) \neq 0$, то условие, налагаемое на α, влечет, что для любого компактного подмножества $K \subset X$ множество $K \cap N$ *счетно.* Говорят также, что μ определена посредством *масс* $\alpha(x)$, *помещенных в точках* $x \in N$. Если предположить, что $N \cap K$ *конечно* для любого компактного множества $K \subset X$, то очевидно, $\sum_{x \in K} |\alpha(x)| < +\infty$; это сводится к тому, что N есть *замкнутое и дискретное* подпространство пространства X, ибо в этом случае каждая точка из X обладает компактной окрестностью, содержащей лишь конечное число точек из N, и обратно, если это выполняется, то любое компактное подмножество из X может быть покрыто конечным числом таких окрестностей. Если N замкнуто и дискретно, то всякая атомическая мера, определяемая при помощи такой функции α, что $\alpha(x) = 0$ на $\complement N$, называется *дискретной* мерой на X (ср. § 2, п. 5).

II. *Мера Лебега.* Для любой функции $f \in \mathscr{K}$ (**R**; **C**) существует такой компактный интервал $[a, b]$ из **R**, что вне этого интервала функция f обращается в нуль. Следовательно, интеграл

$$I(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

определен; кроме того, согласно теореме о среднем (Функции действ. перем., гл. II, § 1, п. 5, предл. 6) имеем $|I(f)| \leqslant (b-a)\|f\|$; это показывает, что $f \mapsto I(f)$ есть мера на **R**; она называется *мерой Лебега*.

Для любого (не обязательно ограниченного) интервала J из **R** точно так же *мерой Лебега на* J называется мера $f \mapsto \int_J f(x)\,dx$, являющаяся линейной формой на $\mathscr{K}(J; \mathbf{C})$ (интеграл имеет смысл, поскольку существует такой содержащийся в J компактный интервал $[a, b]$, что вне этого интервала f обращается в нуль).

III. Пусть g — непрерывное отображение компактного интервала $I \subset \mathbf{R}$ в **C**, имеющее непрерывную производную на I. Рассмотрим компактное подпространство $\Gamma = g(I)$ пространства **C**; отображение

$$f \mapsto \int_I f(g(t))\,g'(t)\,dt$$

$\mathscr{C}(\Gamma; \mathbf{C})$ в **C**, согласно теореме о среднем, является непрерывной линейной формой, а стало быть, *комплексной мерой* на Γ; интеграл относительно этой меры записывается также $\int_\Gamma f(z)\,dz$, хотя он зависит не только от Γ, но и от g.

Замечание. Задание меры μ на локально компактном пространстве X определяет на X (с топологией пространства X) некоторую структуру $\mathscr{S}$. Пусть X_1 — другое множество и φ — биективное отображение X на X_1; в соответствии с общими определениями (Теор. мн., рез., § 9), структура $\mathscr{S}_1$, получаемая *перенесением* на X_1 структуры $\mathscr{S}$ из X посредством отображения φ, определяется следующим образом. Отображение φ переносит топологию с X на X_1; тогда $\mathscr{K}(X_1; \mathbf{C})$ будет состоять из таких

функций f, для которых $f \circ \varphi$ принадлежит $\mathscr{K}(X; \mathbf{C})$, и мера μ_1 на X_1 определяется равенством $\mu_1(f) = \mu(f \circ \varphi)$.

В частности, *автоморфизм* структуры $\mathscr{S}$ есть такой гомеоморфизм σ пространства X на себя, что

$$\mu(f) = \mu(f \circ \sigma)$$

для любой функции $f \in \mathscr{K}(X; \mathbf{C})$; в этом случае говорят также, что мера μ *инвариантна* относительно гомеоморфизма σ.

Пример. Мера Лебега на $\mathbf{R}$ *инвариантна* относительно любого *сдвига* аддитивной группы $\mathbf{R}$. В самом деле, для любой функции $f \in \mathscr{K}(\mathbf{R}; \mathbf{C})$ и любого действительного числа a по формуле замены переменных (Функции действ. перем., гл. II, § 2, п. 1, формула (1)) имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+a)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt.$$

Более общий случай см. в гл. VII.

4. *Произведение меры на непрерывную функцию*

Пусть X — локально компактное пространство и g — непрерывное отображение X в $\mathbf{C}$. Ясно, что $f \mapsto gf$ есть линейное отображение $\mathscr{K}(X; \mathbf{C})$ в себя; покажем, что это отображение *непрерывно*. Действительно, для любого компактного подмножества $K \subset X$ и любой функции $f \in \mathscr{K}(X, K; \mathbf{C})$ имеем $gf \in \mathscr{K}(X, K; \mathbf{C})$; кроме того, если $b_K = \sup_{x \in K} |g(x)|$, то $\|gf\| \leqslant b_K \|f\|$; отсюда следует наше утверждение (Топ. вект. пр-ва, гл. II (2-е изд.), § 4, п. 4, предл. 5). Стало быть, *транспонированное* к этому непрерывному линейному отображению (Топ. вект. пр-ва, гл. II (2-е изд.), § 6, п. 4) является линейным отображением $\mathscr{M}(X; \mathbf{C})$ в себя; оно обозначается $\mu \mapsto g \cdot \mu$ (или $\mu \mapsto g\mu$, если это не вызывает путаницы). Таким образом, если $\nu = g \cdot \mu$, то для любой функции $f \in \mathscr{K}(X; \mathbf{C})$ имеем

$$\langle f, \nu \rangle = \langle gf, \mu \rangle \tag{6}$$

или

$$\int f(x)\,d\nu(x) = \int f(x)\,g(x)\,d\mu(x)$$

(что в сокращенном виде записывается $d\nu(x) = g(x)\,d\mu(x)$). Говорят, что $g \cdot \mu$ есть *произведение меры* μ *на функцию* g, или, еще, *мера плотности* g *относительно* μ (ср. гл. V, § 5). Если g_1, g_2 —

непрерывные отображения X в $\mathbf{C}$, а μ_1, μ_2 — меры на X, то

$$(g_1 + g_2)\cdot\mu = g_1\cdot\mu + g_2\cdot\mu,$$
$$g\cdot(\mu_1 + \mu_2) = g\cdot\mu_1 + g\cdot\mu_2,$$
$$(g_1 g_2)\cdot\mu = g_1\cdot(g_2\cdot\mu).$$

Кроме того, имеем $1\cdot\mu = \mu$ (здесь 1 означает постоянную функцию, равную 1 на X); следовательно, множество $\mathscr{M}(X; \mathbf{C})$, наделенное внешним законом композиции $(g, \mu) \mapsto g\cdot\mu$ и своей аддитивной структурой, становится *модулем* над кольцом $\mathscr{C}(X; \mathbf{C})$.

5. *Действительные меры. Положительные меры*

Пусть X — локально компактное пространство. Действительное векторное пространство $\mathscr{K}(X; \mathbf{R})$ есть подпространство действительного векторного пространства, подчиненного комплексному векторному пространству $\mathscr{K}(X; \mathbf{C})$; при этом отображение $(f_1, f_2) \mapsto f_1 + if_2$ есть *изоморфизм* топологического произведения $\mathscr{K}(X; \mathbf{R}) \times \mathscr{K}(X; \mathbf{R})$ на топологическое векторное пространство $\mathscr{K}(X; \mathbf{C})$ (п. 1, предл. 1).

Для любой (комплексной) меры $\mu \in \mathscr{M}(X; \mathbf{C})$ сужение μ_0 меры μ на $\mathscr{K}(X; \mathbf{R})$ есть непрерывное $\mathbf{R}$-линейное отображение $\mathscr{K}(X; \mathbf{R})$ в $\mathbf{C}$; это сужение в свою очередь определяет μ, ибо если $f = f_1 + if_2$ с $f_1, f_2 \in \mathscr{K}(X; \mathbf{R})$, то $\mu(f) = \mu_0(f_1) + i\mu_0(f_2)$. Обратно, пусть μ_0 есть непрерывное $\mathbf{R}$-линейное отображение $\mathscr{K}(X; \mathbf{R})$ в $\mathbf{C}$; ясно, что отображение

$$f_1 + if_2 \mapsto \mu_0(f_1) + i\mu_0(f_2)$$

есть (комплексная) мера на X. Следовательно, всякая мера на X может отождествляться с ее сужением на $\mathscr{K}(X; \mathbf{R})$.

Пусть μ — мера на X. Назовем *сопряженной мерой* к μ меру $\bar{\mu}$, определяемую равенством $\bar{\mu}(f) = \overline{\mu(\bar{f})}$ для любой функции $f \in \mathscr{K}(X; \mathbf{C})$; в самом деле, ясно, что $\bar{\mu}$ есть $\mathbf{C}$-линейная форма и что она непрерывна на $\mathscr{K}(X; \mathbf{C})$; очевидно, $\bar{\bar{\mu}} = \mu$, и для двух мер μ, ν и двух скаляров α, β из $\mathbf{C}$

$$\overline{(\alpha\mu + \beta\nu)} = \bar{\alpha}\cdot\bar{\mu} + \bar{\beta}\cdot\bar{\nu}.$$

Вообще, для любой функции $g \in \mathscr{C}(X; \mathbf{C})$ и любой меры μ на X

$$\overline{g\cdot\mu} = \bar{g}\cdot\bar{\mu}, \tag{7}$$

что следует сразу же из определения (п. 4).

Мера μ на X называется *действительной*, если $\bar{\mu} = \mu$; согласно сказанному выше, это сводится к утверждению, что $\mu(f)$ для любой функции $f \in \mathscr{K}(X; \mathbf{R})$ является *действительным* числом. Стало быть, если отождествить действительную меру с ее сужением на $\mathscr{K}(X; \mathbf{R})$, то можно утверждать, что множество действительных мер на X *двойственно* действительному локально выпуклому пространству $\mathscr{K}(X; \mathbf{R})$; это есть действительное векторное пространство, которое обозначается $\mathscr{M}(X; \mathbf{R})$ (или иногда $\mathscr{M}(X)$, когда это не ведет к недоразумению). Мера Лебега на $\mathbf{R}$ есть *действительная* мера, равно как и мера Дирака ε_a для любой точки $a \in X$. Если $g \in \mathscr{C}(X; \mathbf{R})$ и если μ — действительная мера, то в силу (7) мера $g \cdot \mu$ тоже действительна.

Пусть μ — (комплексная) мера на X. Согласно приведенному выше определению, меры $\mu_1 = (\mu + \bar{\mu})/2$ и $\mu_2 = (\mu - \bar{\mu})/(2i)$ *действительны*; их называют соответственно *действительной частью* и *мнимой частью* меры μ и обозначают соответственно $\mathrm{Re}\,\mu$ и $\mathrm{Im}\,\mu$; эти меры характеризуются также тем фактом, что для любой функции $f \in \mathscr{K}(X; \mathbf{R})$

$$\mu_1(f) = \mathrm{Re}\,(\mu(f)), \qquad \mu_2(f) = \mathrm{Im}\,(\mu(f)).$$

Очевидно,

$$\mu = \mu_1 + i\mu_2, \qquad \bar{\mu} = \mu_1 - i\mu_2.$$

Пространство $\mathscr{K}(X; \mathbf{R})$ непрерывных числовых функций на X с компактным носителем является, очевидно, *пространством Рисса* для отношения порядка $f \leqslant g$. Будем говорить, что действительная мера μ на X *положительна*, если для любой функции $f \geqslant 0$, принадлежащей $\mathscr{K}(X; \mathbf{R})$, $\mu(f) \geqslant 0$; стало быть, это есть положительная линейная форма на пространстве Рисса $\mathscr{K}(X; \mathbf{R})$ (гл. II, § 2, п. 1, опред. 1). Обратно:

Теорема 1. *Всякая положительная линейная форма на пространстве Рисса $\mathscr{K}(X; \mathbf{R})$ есть (положительная) действительная мера на X.*

В самом деле, пусть μ — положительная линейная форма на $\mathscr{K}(X; \mathbf{R})$ и пусть K — компактное подмножество из X. Существует такое непрерывное отображение f_0 пространства X в $[0, 1]$ с компактным носителем, что $f_0(x) = 1$ на K (п. 2, лемма 1).

Значит, для любой функции $g \in \mathscr{K}(X, K; \mathbf{R})$ имеем $-\|g\| f_0 \leqslant g \leqslant \|g\| f_0$, и стало быть, $|\mu(g)| \leqslant \|g\| \cdot \mu(f_0)$, что и доказывает теорему.

Обозначим через $\mathscr{M}_+(X)$ заостренный конус положительных мер на X (или, что сводится к тому же, конус положительных линейных форм на пространстве Рисса $\mathscr{K}(X; \mathbf{R})$).

Теорема 2. *Всякая действительная мера на локально компактном пространстве X есть разность двух положительных мер.*

В силу теоремы 1 и теоремы 1, гл. II, § 2, п. 2, все сводится к доказательству того, что действительная мера μ на X является *относительно ограниченной* линейной формой на пространстве Рисса $\mathscr{K}(X; \mathbf{R})$. Но если $f \geqslant 0$ — непрерывная функция на X с компактным носителем K, то соотношение $0 \leqslant g \leqslant f$ в $\mathscr{K}(X; \mathbf{R})$ влечет, что $\|g\| \leqslant \|f\|$ и что носитель функции g содержится в K. По предположению, найдется такое число $M_K \geqslant 0$, что $|\mu(h)| \leqslant M_K \cdot \|h\|$ для любой функции $h \in \mathscr{K}(X, K; \mathbf{R})$; следовательно, $|\mu(g)| \leqslant M_K \cdot \|g\| \leqslant M_K \cdot \|f\|$, что и доказывает теорему.

Таким образом, пространство $\mathscr{M}(X; \mathbf{R})$ действительных мер на X совпадает с пространством относительно ограниченных линейных форм на пространстве Рисса $\mathscr{K}(X; \mathbf{R})$; напомним, что в $\mathscr{M}(X; \mathbf{R})$ отношение порядка $\mu \leqslant \nu$ означает, что $\nu - \mu$ есть положительная мера, или (равносильно), что для любой функции $f \in \mathscr{K}_+(X)$ выполняется неравенство $\mu(f) \leqslant \nu(f)$.

Теорема 3. *Пространство $\mathscr{M}(X; \mathbf{R})$ действительных мер на локально компактном пространстве X является вполне решеточным.*

Это следует из теоремы 1, гл. II, § 2, п. 2.

В соответствии с обозначениями гл. II, § 2, положим для любой *действительной* меры μ на X

$$\mu^+ = \sup(\mu, 0), \quad \mu^- = \sup(-\mu, 0), \quad |\mu| = \sup(\mu, -\mu);$$

имеем

$$\mu = \mu^+ - \mu^-, \quad |\mu| = \mu^+ + \mu^-, \quad \inf(\mu^+, \mu^-) = 0.$$

Кроме того, для любой функции $f \in \mathscr{K}_+(X)$ имеем

$$\int f\,d\mu^+ = \sup_{0 \leqslant g \leqslant f,\ g \in \mathscr{K}(X)} \int g\,d\mu, \tag{8}$$

$$\int f\,d|\mu| = \sup_{|g| \leqslant f,\ g \in \mathscr{K}(X)} \int g\,d\mu, \tag{9}$$

откуда, в частности, для любой функции $f \in \mathscr{K}(X; \mathbf{R})$ вытекает неравенство

$$\left|\int f\,d\mu\right| \leqslant \int |f|\,d\,|\mu|. \tag{10}$$

Это неравенство остается верным и для $f \in \mathscr{K}(X; \mathbf{C})$; действительно, умножив f на некоторое комплексное число с абсолютным значением, равным 1 (что не изменит обеих частей), можно предположить, что $\int f\,d\mu \geqslant 0$. Тогда

$$\left|\int f\,d\mu\right| = \int f\,d\mu = \int (\mathrm{Re}\, f)\,d\mu \leqslant \int |\mathrm{Re}\, f|\,d\,|\mu| \leqslant \int |f|\,d\,|\mu|.$$

6. *Абсолютное значение комплексной меры*

Пусть μ — комплексная мера на локально компактном пространстве X; для любой функции $f \in \mathscr{K}_+(X)$ положительное действительное число

$$L(f) = \sup_{|g| \leqslant f,\ g \in \mathscr{K}(X;\, \mathbf{C})} \left|\int g\,d\mu\right| \tag{11}$$

конечно, ибо соотношение $|g| \leqslant f$ влечет $\mathrm{supp}\,(g) \subset \mathrm{supp}\,(f)$ и $\|g\| \leqslant \|f\|$, а стало быть, наше утверждение вытекает из формулы (4) п. 3. Покажем, что L продолжается единственным образом до *положительной меры* на X; учитывая теорему 1 из п. 5 и предложение 3, гл. II, § 2, п. 1, достаточно показать, что если f_1, f_2 — две функции из $\mathscr{K}_+(X)$, то $L(f_1 + f_2) = L(f_1) + L(f_2)$. Но если $|g_1| \leqslant f_1$, $|g_2| \leqslant f_2$, где g_1 и g_2 — функции из $\mathscr{K}(X; \mathbf{C})$, то $|g_1 + \zeta g_2| \leqslant f_1 + f_2$ для любого комплексного числа ζ с абсолютным значением, равным 1, и значит,

$$|\mu(g_1 + \zeta g_2)| = |\mu(g_1) + \zeta\mu(g_2)| \leqslant L(f_1 + f_2).$$

Можно предположить, что ζ выбрано так, чтобы

$$|\mu(g_1) + \zeta\mu(g_2)| = |\mu(g_1)| + |\mu(g_2)|;$$

а так как $|\mu(g_i)|$ сколь угодно близко к $L(f_i)$ $(i = 1, 2)$, то это показывает, что $L(f_1) + L(f_2) \leqslant L(f_1 + f_2)$. С другой стороны, рассмотрим такую функцию $g \in \mathscr{K}(X; \mathbf{C})$, что $|g| \leqslant f_1 + f_2$. Функция g_i $(i = 1, 2)$, равная $gf_i/(f_1 + f_2)$ в точках, где $f_1(x) + f_2(x) \neq 0$, и 0 — в остальных точках, непрерывна на X, поскольку $f_i/(f_1 + f_2)$ $(i = 1, 2)$ непрерывна в каждой точке, где $f_1(x) + f_2(x) \neq 0$, и $|g_i(x)| \leqslant |g(x)|$ для любого $x \in X$, что доказывает непрерывность g_i в точках, где $f_1(x) + f_2(x) = 0$ $(i = 1, 2)$, так как в этих точках также $g(x) = 0$. Ясно, что $|g_i| \leqslant f_i$ $(i = 1, 2)$ и $g = g_1 + g_2$, и значит, $|\mu(g)| \leqslant |\mu(g_1)| + |\mu(g_2)| \leqslant L(f_1) + L(f_2)$; а поскольку $|\mu(g)|$ сколь угодно близко к $L(f_1 + f_2)$, то $L(f_1 + f_2) \leqslant L(f_1) + L(f_2)$, что и завершает доказательство нашего утверждения.

Если μ — *действительная* мера, то из формулы (9) следует, что $|\mu| \leqslant L$; но, с другой стороны, согласно изложенному в конце п. 5, для $g \in \mathscr{K}(X; \mathbf{C})$ и $|g| \leqslant f \in \mathscr{K}_+(X)$ имеем $\left|\int g\,d\mu\right| \leqslant \int |g| \cdot d|\mu| \leqslant \int f\,d|\mu|$, и значит $L \leqslant |\mu|$, и $L = |\mu|$.

Обозначим для любой *комплексной* меры μ положительную меру L через $|\mu|$ и будем говорить, что $|\mu|$ есть *абсолютное значение меры* μ. Тогда определение $|\mu|$ запишется в виде

$$|\mu|(f) = \sup_{|g| \leqslant f,\ g \in \mathscr{K}(X;\, \mathbf{C})} |\mu(g)|, \tag{12}$$

и значит, для любой функции $g \in \mathscr{K}(X; \mathbf{C})$

$$\left|\int g\,d\mu\right| \leqslant \int |g|\,d|\mu|. \tag{13}$$

Ясно, что для любого скаляра $\alpha \in \mathbf{C}$ и любой меры μ на X

$$|\alpha\mu| = |\alpha| \cdot |\mu|. \tag{14}$$

С другой стороны, если μ и ν — меры на X, f — функция из $\mathscr{K}_+(X)$, а g — такая функция из $\mathscr{K}(X; \mathbf{C})$, что $|g| \leqslant f$, то

$$\left|\int g\,d(\mu+\nu)\right| = \left|\int g\,d\mu + \int g\,d\nu\right| \leqslant \int f\,d|\mu| + \int f\,d|\nu|,$$

откуда

$$|\mu + \nu| \leqslant |\mu| + |\nu|. \tag{15}$$

В тех же обозначениях, $|g| \leqslant f$ и $|\bar{g}| \leqslant f$ эквивалентны, и

$$|\bar{\mu}| = |\mu|. \tag{16}$$

Из (14), (15) и (16) вытекает, что

$$|\operatorname{Re}\mu| \leqslant |\mu|, \quad |\operatorname{Im}\mu| \leqslant |\mu|, \quad |\mu| \leqslant |\operatorname{Re}\mu| + |\operatorname{Im}\mu|. \tag{17}$$

Предложение 8. *Если μ — мера на X, то для любой функции $h \in \mathscr{C}(X; \mathbf{C})$*

$$|h \cdot \mu| \leqslant |h| \cdot |\mu|. \tag{18}$$

Действительно, если $f \in \mathscr{K}_+(X)$ и если $g \in \mathscr{K}(X; \mathbf{C})$ такова, что $|g| \leqslant f$, то в силу (13) имеем $\left|\int gh\,d\mu\right| \leqslant \int |gh|\,d|\mu| \leqslant \int f|h|\,d|\mu|$, что и доказывает (18).

7. *Определение меры посредством продолжения*

Пусть X — локально компактное пространство; если V — векторное подпространство, *плотное* в $\mathscr{K}(X; \mathbf{C})$, то ясно, что две меры μ_1, μ_2 на X, совпадающие на V, равны и что всякая линейная форма на V, непрерывная в топологии, индуцированной топологией пространства $\mathscr{K}(X; \mathbf{C})$, продолжается (и притом единственным образом) до меры на X. Более гибкий критерий для положительных мер формулируется следующим образом.

Предложение 9. *Пусть V — векторное подпространство пространства $\mathscr{K}(X; \mathbf{R})$, обладающее следующим свойством:*

(P) *Для любого компактного подмножества K из X существует такая функция $f \in V$, что $f \geqslant 0$ и $f(x) > 0$ для всех $x \in K$.*

При этих условиях всякая линейная форма на V, положительная относительно порядка, индуцированного из $\mathscr{K}(X; \mathbf{R})$ (гл. II, § 2, п. 1, опред. 1), *продолжается до положительной меры на X (которая единственна, если V плотно в $\mathscr{K}(X; \mathbf{R})$).*

Для любой функции $f \in \mathscr{K}(X; \mathbf{R})$ с носителем K существует такая функция $g \in V$, что $f \leqslant g$: в самом деле, в V найдется такая функция $h \geqslant 0$, что $h(x) > 0$ для всех $x \in K$; если положить $\alpha = \inf_{x \in K} h(x)$, то $\alpha > 0$, и функция $(\alpha^{-1}\|f\|)\,h = g$ будет искомой. Далее достаточно применить теорему 1 из п. 5, и предложение 1 из Топ. Вект. пр-в, гл. II (2-е изд.), § 3, п. 1.

8. Ограниченные меры

Пусть X — локально компактное пространство. Поскольку топология, индуцированная на $\mathscr{K}(X; \mathbf{C})$ топологией пространства $\mathscr{C}^b(X; \mathbf{C})$, слабее, чем топология — индуктивный предел на $\mathscr{K}(X; \mathbf{C})$, то мера на X *не обязательно непрерывна* относительно топологии равномерной сходимости на X.

Определение 3. *Мера на локально компактном пространстве X называется ограниченной, если она непрерывна на $\mathscr{K}(X; \mathbf{C})$ в топологии равномерной сходимости.*

Это сводится к утверждению, что существует такое конечное число $M \geqslant 0$, что для любой функции $f \in \mathscr{K}(X; \mathbf{C})$

$$|\mu(f)| \leqslant M\|f\| \tag{19}$$

(где $\|f\|$ определяется формулой (3), п. 2).

Таким образом, утверждение об ограниченности меры μ означает, что μ принадлежит пространству, двойственному к пространству $\mathscr{K}(X; \mathbf{C})$, *нормированному* посредством $\|f\|$; это пространство мы обозначим $\mathscr{M}^1(X; \mathbf{C})$ (или просто $\mathscr{M}^1(X)$, если это не ведет к недоразумению). Известно, что $\mathscr{M}^1(X; \mathbf{C})$ имеет *норму* $\|\mu\|$, равную наименьшему из чисел $M \geqslant 0$, для которых неравенство (19) выполняется при любой функции $f \in \mathscr{K}(X; \mathbf{C})$, или, равносильно,

$$\|\mu\| = \sup_{\|f\| \leqslant 1,\ f \in \mathscr{K}(X;\ \mathbf{C})} |\mu(f)|. \tag{20}$$

Наделенное этой нормой, $\mathscr{M}^1(X; \mathbf{C})$ является *банаховым пространством* (Топ. вект. пр-ва, гл. IV, § 5, п. 1).

Определение $\|\mu\|$ формулой (20) распространяется на *любую* меру μ на X, и снова, в нарушение общепринятого, говорят, что $\|\mu\|$ есть *норма* меры μ; для того чтобы μ была ограничена, необходимо и достаточно, чтобы $\|\mu\|$ была *конечна*.

Если X *компактно*, то любая мера на X ограничена.

Примеры. 1) Мера ε_a, определенная единичной массой в точке $a \in X$, ограничена, и $\|\varepsilon_a\| = 1$.

2) Мера Лебега на $\mathbf{R}$ не ограничена; в самом деле, для любого целого $n > 0$ существует функция $f \in \mathscr{K}(\mathbf{R}; \mathbf{C})$ со значениями в $[0, 1]$,

равная 1 на интервале $[-n, n]$ (п. 2 лемма 1); следовательно, $\|f\| = 1$ и

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx \geqslant \int_{-n}^{n} f(x)\,dx = 2n,$$

чем доказано, что не существует конечного числа M, удовлетворяющего соотношению (19).

3) На числовой прямой $\mathbf{R}$ отображение

$$f \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)\,dx}{1+x^2}$$

является ограниченной мерой, так как для любой функции $f \in \mathscr{K}(\mathbf{R}; \mathbf{C})$

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)\,dx}{1+x^2} \right| \leqslant \|f\| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi \cdot \|f\|.$$

Поскольку соотношения $\|f\| \leqslant 1$ и $\|\bar{f}\| \leqslant 1$ эквивалентны, то из (20) следует, что для любой меры μ на X

$$\|\bar{\mu}\| = \|\mu\|. \tag{21}$$

Предложение 10. *Для любой меры μ на X*

$$\|\mu\| = \sup_{0 \leqslant f \leqslant 1,\ f \in \mathscr{K}(X;\,\mathbf{R})} |\mu|(f). \tag{22}$$

В самом деле, принимая во внимание формулу (12), определяющую абсолютное значение меры, записываем правую часть (22) в виде

$$\sup_{0 \leqslant f \leqslant 1,\ f \in \mathscr{K}(X;\,\mathbf{R})} \left(\sup_{|g| \leqslant f,\ g \in \mathscr{K}(X;\,\mathbf{C})} |\mu(g)| \right) = \sup_{\|g\| \leqslant 1,\ g \in \mathscr{K}(X;\,\mathbf{C})} |\mu(g)|.$$

Следствие 1. *Для любой меры μ на X нормы мер μ и $|\mu|$ равны; для того чтобы μ была ограничена, необходимо и достаточно, чтобы $|\mu|$ была ограничена.*

Следствие 2. *Для любой меры μ на компактном пространстве X*

$$\|\mu\| = |\mu|(1) = \int d\,|\mu|. \tag{23}$$

Эта формула будет обобщена в главе IV, § 4, п. 7.

На *компактном* пространстве X для любой (комплексной) меры μ на X комплексное число $\mu(1)$ называется *полной массой* меры μ. Если μ *положительна*, то ее *полная* масса равна ее норме. Если μ — положительная мера на *компактном* пространстве X

с полной массой, равной 1, то говорят еще, что ее значение $\mu(f)$ для непрерывной функции $f \in \mathscr{C}(X; \mathbf{C})$ есть *среднее* функции f относительно меры μ.

Следствие 3. *Для любой действительной меры* μ *на локально компактном пространстве* X

$$\|\mu\| = \sup_{\|f\| \leqslant 1,\ f \in \mathscr{K}(X;\, \mathbf{R})} |\mu(f)|. \tag{24}$$

Достаточно воспользоваться формулой (22) и выражением (9) для $|\mu|(f)$, когда μ есть действительная мера μ и $f \in \mathscr{K}_+(X)$.

Таким образом, множество действительных ограниченных мер является двойственным к *нормированному* пространству $\mathscr{K}(X; \mathbf{R})$; оно обозначается $\mathscr{M}^1(X; \mathbf{R})$ или $\mathscr{M}^1(X)$, если это не ведет к недоразумению. Каноническая инъекция $\mathscr{M}^1(X; \mathbf{R}) \to \mathscr{M}^1(X; \mathbf{C})$ является, в силу (24), *изометрией*.

Предложение 11. *Если* μ *и* ν *— положительные меры на* X, *то* $\|\mu + \nu\| = \|\mu\| + \|\nu\|$.

В самом деле, функции $f \in \mathscr{K}(X; \mathbf{R})$, удовлетворяющие условию $0 \leqslant f \leqslant 1$, образуют множество S, фильтрующееся по отношению $\leqslant$. Значит, для любой положительной меры μ на X из (22) и из теоремы о монотонном пределе вытекает, что $\|\mu\| = \lim_{f \in S} \mu(f)$; отсюда сразу же получаем утверждение.

Следствие 1. *Если* μ *и* ν *— положительные меры на* X, *удовлетворяющие условию* $\mu \leqslant \nu$, *то* $\|\mu\| \leqslant \|\nu\|$; *в частности, если* ν *ограничена, то* μ *тоже ограничена.*

В самом деле, $\|\nu\| = \|\mu\| + \|\nu - \mu\|$.

Следствие 2. *Для любой действительной меры* μ *на* X

$$\|\mu\| = \|\mu^+\| + \|\mu^-\|.$$

В самом деле (следствие 1 из предл. 10), норма меры μ равна норме меры $|\mu| = \mu^+ + \mu^-$.

Предложение 12. *Если* μ *— ограниченная мера на* X *и* g *— непрерывное ограниченное отображение* X *в* $\mathbf{C}$, *то мера* $g \cdot \mu$ *ограничена и* $\|g \cdot \mu\| \leqslant \|g\| \cdot \|\mu\|$.

В самом деле, для любой функции $f \in \mathscr{K}(X; \mathbf{C})$

$$|\mu(fg)| \leqslant \|\mu\| \cdot \|fg\| \leqslant \|\mu\| \cdot \|g\| \cdot \|f\|.$$

9. *Широкая топология в пространстве мер*

Пусть X — локально компактное пространство. Можно рассмотреть в пространстве $\mathscr{M}(X; \mathbf{C})$ топологию *простой* сходимости на $\mathscr{K}(X; \mathbf{C})$; мы назовем ее *широкой топологией* в $\mathscr{M}(X; \mathbf{C})$.

Так как $\mathscr{K}(X; \mathbf{C}) = \mathscr{K}(X; \mathbf{R}) + i\mathscr{K}(X; \mathbf{R})$, то широкая топология в $\mathscr{M}(X; \mathbf{C})$ определяется посредством *полунорм* $\sup_{1 \leqslant i \leqslant n} |\mu(f_i)|$, где $(f_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ — произвольная конечная последовательность функций из $\mathscr{K}(X; \mathbf{R})$ (или из $\mathscr{K}_+(X)$). Утверждение, что фильтр $\mathfrak{F}$ в $\mathscr{M}(X; \mathbf{C})$ *широко сходится* к мере μ_0, означает, что для любой функции $f \in \mathscr{K}(X; \mathbf{R})$ имеем $\mu_0(f) = \lim_{\mu, \mathfrak{F}} \mu(f)$. Для любой функции $f \in \mathscr{K}(X; \mathbf{C})$ отображение $\mu \mapsto \mu(f)$ есть *широко непрерывная* линейная форма на пространстве $\mathscr{M}(X; \mathbf{C})$.

Предложение 13. *Пусть X — локально компактное пространство и пусть ε_x для любого $x \in X$ есть мера Дирака в точке x. Отображение $x \mapsto \varepsilon_x$ есть гомеоморфизм пространства X на некоторое подпространство пространства $\mathscr{M}(X; \mathbf{C})$ мер на X, наделенного широкой топологией. При этом, если X' означает компактное пространство, полученное добавлением к X точки на бесконечности ω, то ε_x стремится к 0, когда x стремится к ω.*

Для любой функции $f \in \mathscr{K}(X; \mathbf{C})$ имеем $\langle f, \varepsilon_x \rangle = f(x)$; в силу непрерывности f это показывает, что отображение $x \mapsto \varepsilon_x$ непрерывно. Если x, y — различные точки из X, то существует такая функция $f \in \mathscr{K}(X; \mathbf{C})$, что $f(x) = 1$, $f(y) = 0$ (п. 2, лемма 1), чем доказано, что $\varepsilon_x \neq \varepsilon_y$; значит, отображение $x \mapsto \varepsilon_x$ инъективно. Кроме того, для любой функции $f \in \mathscr{K}(X; \mathbf{C})$ $\langle f, \varepsilon_x \rangle$ по определению, стремится к 0, когда x стремится к ω, и стало быть, $x \mapsto \varepsilon_x$ продолжается по непрерывности на $X' = X \cup \{\omega\}$, если положить в точке ω значение 0. Это продолженное отображение снова инъективно, поскольку $\varepsilon_x \neq 0$ для всех $x \in X$. Таким образом, это есть гомеоморфизм компактного пространства X' на некоторое подпространство пространства $\mathscr{M}(X; \mathbf{C})$, ибо $\mathscr{M}(X; \mathbf{C})$ отделимо в широкой топологии (Общая топ., гл. I (3-е изд.), § 9, п. 4, следствие 2 из теоремы 2).

Предложение 14. *В пространстве $\mathscr{M}(X; \mathbf{C})$ мер на локально компактном пространстве X конус $\mathscr{M}_+(X)$ положительных мер*

является полным относительно равномерной структуры, порожденной широкой топологией (и следовательно, *широко замкнутым в* $\mathscr{M}(X; \mathbf{C})$).

Действительно, рассмотрим фильтр Коши Φ относительно широкой равномерной структуры на $\mathscr{M}_+(X)$; по определению, предел $\mu_0(f) = \lim_{\mu, \Phi} \mu(f)$ существует для любой функции $f \in \mathscr{K}(X; \mathbf{C})$ и, на основании принципа продолжения неравенств, получаем $\mu_0(f) \geqslant 0$ для любой функции $f \in \mathscr{K}_+(X)$; следовательно, μ_0 есть положительная мера на X (п. 5, теорема 1).

Отметим, что само пространство $\mathscr{M}(X; \mathbf{C})$ (или $\mathscr{M}(X; \mathbf{R})$) *не обязательно полно* относительно широкой равномерной структуры (Топ. вект. пр-ва, гл. IV, § 1, упр. 11).

Следствие. *Если A и B — широко замкнутые подмножества из $\mathscr{M}_+(X)$, то $A + B$ широко замкнуто в $\mathscr{M}_+(X)$ (а значит, и в $\mathscr{M}(X; \mathbf{C})$).*

В самом деле, это есть общее свойство слабо полных выступающих конусов в локально выпуклых пространствах (Топ. вект. пр-ва, гл. II (2-е изд.), § 6, п. 8, следствие 2 из предл. 11).

Предложение 15. *Пусть H — подмножество из $\mathscr{M}(X; \mathbf{C})$. Следующие свойства эквивалентны:*

a) *H широко ограничено.*

b) *H широко относительно компактно.*

c) *H равностепенно непрерывно.*

d) *Для любого компактного подмножества $K \subset X$ существует такое число $M_K \geqslant 0$, что каковы бы ни были мера $\mu \in H$ и функция $f \in \mathscr{K}(X, K; \mathbf{C})$, $|\mu(f)| \leqslant M_K \|f\|$.*

В силу того, что пространство $\mathscr{K}(X; \mathbf{C})$ бочечно (п. 1, предл. 2), эквивалентность свойств a), b), c) вытекает из теоремы 1, Топ. вект. пр-ва, гл. IV, § 2, п. 2.

Ясно, что d) влечет a). Наконец, если H равностепенно непрерывно, то множество сужений мер $\mu \in H$ на $\mathscr{K}(X, K; \mathbf{C})$ также равностепенно непрерывно, откуда следует условие d), поскольку $\mathscr{K}(X, K; \mathbf{C})$ — нормированное пространство.

* В главе IV, § 4, п. 6 мы увидим, что условия предложения 15 эквивалентны также тому факту, что для любого компактного подмножества $K \subset X$ существует такая константа M_K, что $|\mu|(K) \leqslant M_K$ для любой меры $\mu \in H$.*

Следствие 1. *Пусть* ν *— положительная мера на* X; *множество мер* μ, *удовлетворяющих условию* $|\mu| \leqslant \nu$, *широко компактно.*

Следствие 2. *Множество мер* μ, *удовлетворяющих условию* $\|\mu\| \leqslant a$ ($a > 0$ — произвольное конечное число), *широко компактно.*

Следствие 3. *Если* X *компактно, то множество положительных мер* μ *на* X, *удовлетворяющих условию* $\|\mu\| = 1$, *широко компактно.*

В самом деле, это есть пересечение широко компактного множества (следствие 2) мер μ, удовлетворяющих условию $\|\mu\| \leqslant 1$, и широко замкнутых множеств, определенных соответственно соотношениями $\mu \geqslant 0$ и $\mu(1) = 1$ (п. 8, следствие 2 из предл. 10).

Следствие 4. *В пространстве* $\mathscr{M}(X; \mathbf{C})$ *отображение* $\mu \mapsto \|\mu\|$ *полунепрерывно снизу в широкой топологии.*

Это утверждение вытекает непосредственно из следствия 2.

Отметим, что отображение $\mu \mapsto |\mu|$ пространства $\mathscr{M}(X; \mathbf{C})$ в себя не обязано быть непрерывным в широкой топологии (упр. 4).

Предложение 16. *Пусть* K *— компактное подмножество из* X *и* H *— широко ограниченное подмножество из* $\mathscr{M}(X; \mathbf{C})$; *тогда билинейная форма* $(f, \mu) \mapsto \langle f, \mu \rangle$ *непрерывна в* $\mathscr{K}(X, K; \mathbf{C}) \times H$, *если наделить* $\mathscr{K}(X, K; \mathbf{C})$ *топологией равномерной сходимости, а* H *— широкой топологией.*

В самом деле, существует такое число $M \geqslant 0$, что для любой функции $f \in \mathscr{K}(X, K; \mathbf{C})$ и любой меры $\mu \in H$

$$|\mu(f)| \leqslant M\|f\|$$

(предл. 15). Следовательно, если μ_0 и μ — две меры, принадлежащие H, а f_0 и f — две функции из $\mathscr{K}(X, K; \mathbf{C})$, то

$$|\mu(f) - \mu_0(f_0)| = |\mu(f - f_0) + \mu(f_0) - \mu_0(f_0)| \leqslant$$
$$\leqslant M\|f - f_0\| + |\mu(f_0) - \mu_0(f_0)|,$$

и эта последняя величина произвольно мала вместе с $\|f - f_0\|$ и $|\mu(f_0) - \mu_0(f_0)|$, что и доказывает предложение.

10. Компактная сходимость в $\mathscr{M}(X; \mathbf{C})$

Напомним, что топология *компактной сходимости* в $\mathscr{M}(X; \mathbf{C})$ есть топология равномерной сходимости на компактных подмножествах из $\mathscr{K}(X; \mathbf{C})$. Назовем топологией *строго компактной сходимости* в $\mathscr{M}(X; \mathbf{C})$ топологию равномерной сходимости на строго компактных подмножествах (п. 1) из $\mathscr{K}(X; \mathbf{C})$.

Предложение 17. *В пространстве $\mathscr{M}(X; \mathbf{C})$ рассмотрим следующие топологии:*

$\mathscr{T}_1$: *топология простой сходимости на тотальном множестве T в $\mathscr{K}(X; \mathbf{C})$;*

$\mathscr{T}_2$: *широкая топология;*

$\mathscr{T}_3$: *топология строго компактной сходимости;*

$\mathscr{T}_4$: *топология компактной сходимости.*

Каждая из этих топологий слабее, чем следующая за ней. Кроме того:

(i) *Ограниченные подмножества — одни и те же для $\mathscr{T}_2$, $\mathscr{T}_3$ и $\mathscr{T}_4$.*

(ii) *Если H — широко ограниченное подмножество из $\mathscr{M}(X; \mathbf{C})$, то топологии, индуцированные в H топологиями $\mathscr{T}_1$, $\mathscr{T}_2$, $\mathscr{T}_3$, $\mathscr{T}_4$, совпадают.*

Широко ограниченное подмножество H из $\mathscr{M}(X; \mathbf{C})$ равностепенно непрерывно (п. 9, предл. 15), и значит, первое утверждение вытекает из предложения 7, Топ. векст. пр-ва, гл. III, § 3, п. 6, а второе — из теоремы 1, Общая топ., гл. X (2-е изд.), § 2, п. 4.

Напомним, что если X *паракомпактно*, то топология строго компактной сходимости совпадает с топологией компактной сходимости (п. 1, предл. 2).

Предложение 18. *В конусе $\mathscr{M}_+(X)$ совпадают топологии, индуцированные следующими топологиями:*

$\mathscr{T}_1$: *топологией простой сходимости на векторном подпространстве V пространства $\mathscr{K}(X; \mathbf{C})$, плотном в $\mathscr{K}(X; \mathbf{C})$ и удовлетворяющем свойству* (P) (п. 7, предл. 9);

$\mathscr{T}_2$: *широкой топологией;*

$\mathscr{T}_3$: *топологией строго компактной сходимости.*

Всякий фильтр является пересечением мажорирующих его ультрафильтров (Общая топ., гл. I (3-е изд.), § 6, п. 5, предл. 7); поэтому достаточно показать, что если $\mathfrak{U}$ — ультрафильтр

в $\mathscr{M}_+(X)$, сходящийся к некоторой мере μ_0 в топологии $\mathscr{T}_1$, то он сходится к μ_0 и в топологии $\mathscr{T}_3$. Пусть, стало быть, K — компактное подмножество из X; по предположению, найдется такая функция $h \in V$, что $h \geqslant 0$ на X и $h > 0$ на K; следовательно, любая функция $f \in \mathscr{K}(X, K; \mathbf{C})$ может быть записана в виде $f = gh$, где $g \in \mathscr{K}(X, K; \mathbf{C})$, и если $c = \inf_{x \in K} h(x) > 0$, то $\|g\| \leqslant c^{-1}\|f\|$. По предположению, существует такое множество $H_0 \in \mathfrak{U}$, что для любой меры $\mu \in H_0$

$$0 \leqslant \mu(h) \leqslant \mu_0(h) + 1 = b.$$

Значит, для любой функции $f \in \mathscr{K}(X; \mathbf{C})$ имеем

$$|\langle f, h \cdot \mu \rangle| = |\langle hf, \mu \rangle| \leqslant \|f\| \cdot \mu(h) \leqslant b\|f\|$$

для любой меры $\mu \in H_0$; тем самым доказано, что множество H мер $h \cdot \mu$, где μ пробегает H_0, *широко ограничено*. Если $\mathfrak{U}_0$ есть ультрафильтр, индуцированный на H_0 ультрафильтром $\mathfrak{U}$, то образ $\mathfrak{U}_0$ при отображении $\mu \mapsto h \cdot \mu$ есть базис ультрафильтра $\mathfrak{F}$ в H; а поскольку H относительно компактно в топологии строго компактной сходимости (предл. 17 и п. 9, предл. 15), то $\mathfrak{F}$ сходится в этой топологии к некоторой мере ν_0. Иными словами, для любого $\varepsilon > 0$ и любого компактного подмножества L из $\mathscr{K}(X, K; \mathbf{C})$ существует такое подмножество $N \subset H_0$, принадлежащее $\mathfrak{U}$, что для всякой функции $g \in L$ и любой пары мер μ, μ' из N выполняется неравенство $|\langle g, h \cdot \mu \rangle - \langle g, h \cdot \mu' \rangle| \leqslant \varepsilon$, или, еще,

$$|\langle gh, \mu \rangle - \langle gh, \mu' \rangle| \leqslant \varepsilon.$$

Но, как мы видели выше, отображение $g \mapsto gh$ есть *автоморфизм* банахова пространства $\mathscr{K}(X, K; \mathbf{C})$. Таким образом, мы показали, что $\mathfrak{U}$ является *фильтром Коши* в $\mathscr{M}_+(X)$ относительно топологии строго компактной сходимости. И тем более, это есть фильтр Коши в широкой топологии, широко сходящийся, как показывает предложение 14, п. 9, к некоторой мере μ_1; кроме того, поскольку V плотно в $\mathscr{K}(X; \mathbf{C})$, то из условия следует, что $\mu_1 = \mu_0$; наконец, в силу того, что $\mathfrak{U}$ есть фильтр Коши в строго компактной топологии, он сходится также к μ_0 в этой топологии (Общая топ., гл. X (2-е изд.), § 1, п. 5, предл. 5), и теорема доказана.

Следствие. *Если X паракомпактно, то топологии, индуцированные на $\mathscr{M}_+(X)$ широкой топологией и топологией компактной сходимости, совпадают.*

Напротив, топологии, индуцированные на $\mathscr{M}_+(X)$ топологией компактной сходимости и топологией строго компактной сходимости, могут быть различны в случае, если X не является паракомпактным (упр. 3).

Упражнения

°1) a) Пусть X — локально компактное пространство. Показать, что любое компактное выпуклое подмножество A локально выпуклого пространства $\mathscr{K}(X; \mathbf{C})$, содержащееся в $\mathscr{K}_+(X)$, строго компактно. (Рассмотреть функцию, являющуюся верхней огибающей множества функций $f \in A$, т. е. функцию $s = \sup_{f \in A} f$, которая непрерывна на X и стремится к 0 на бесконечности пространства X. Для любой непрерывной числовой функции g на X обозначим через $P(g)$ множество тех $x \in X$, в которых $g(x) > 0$. Показать, что в A существует такая функция f, что $P(f) = P(s)$; для этого заметить, что если K_n — компактное множество тех $x \in X$, в которых $s(x) \geqslant 1/n$, то имеется конечное число таких функций $f_{n,i} \in A$, что открытые множества $P(f_{n,i})$ покрывают K_n. Использовать далее тот факт, что A выпукло и замкнуто.)

b) Предположим, что в X существует счетное всюду плотное множество D. Показать, что в этом случае любое компактное выпуклое подмножество A пространства $\mathscr{K}(X; \mathbf{C})$ строго компактно. (Пусть U — множество таких $x \in X$, что найдется функция $f \in A$, для которой $f(x) \neq 0$; U есть открытое подмножество из X. Используя тот факт, что A — пространство Бэра, показать, что существует $g \in A$, для которой $g(x) \neq 0$ при любом $x \in U \cap D$.)

°2) Пусть Y — локально компактное, но не компактное пространство, счетное в бесконечности, и пусть (Y_n) — возрастающая последовательность компактных подмножеств из Y, образующая покрытие Y и такая, что $Y_n \subset \mathring{Y}_{n+1}$ для любого n, причем любое компактное подмножество из Y содержится в одном из Y_n (Общая топ., гл. I (3-е изд.), § 9, п. 9, следствие 1 из предл. 15). Пусть βY — компактификация Стоуна — Чеха пространства Y (Общая топ., гл. IX (2-е изд.), § 1, упр. 7), так что пространство $\mathscr{C}(\beta Y; \mathbf{R})$ отождествляется с пространством ограниченных непрерывных числовых функций на Y, и Y открыто и плотно в βY; значит, $\operatorname{supp}(f)$ для любой функции $f \in \mathscr{C}(\beta Y; \mathbf{R})$ есть замыкание в βY множества тех $y \in Y$, в которых $f(y) \neq 0$. Напомним, что если Z_1, Z_2 — два подмножества из Y, замкнутые в Y и не имеющие общих точек, то их замыкания $\overline{Z}_1$, $\overline{Z}_2$ в βY не имеют общих точек (Общая топ. гл. IX (2-е изд.), § 4, упр. 17).

Пусть ω — точка из $\beta Y - Y$ и пусть $X = \beta Y - \{\omega\}$. Показать, что в пространстве $\mathscr{K}(X; \mathbf{R})$ топология $\mathscr{T}$ — индуктивный предел,

определенная в п. 1,— совпадает с *топологией равномерной сходимости*. (Если p — полунорма, непрерывная относительно $\mathscr{T}$, то показать, рассуждением от противного, что найдется такое число $c > 0$, что $p(f) \leqslant c \| f \|$ для любой функции $f \in \mathscr{K}(X; \mathbf{R})$. В противном случае нашлась бы такая последовательность (f_n) функций из $\mathscr{K}(X; \mathbf{R})$, что

$$\| f_n \| \leqslant 1, \quad p(f_n) \geqslant n, \quad \operatorname{supp}(f_n) \cap Y_n = \varnothing,$$

$$\operatorname{supp}(f_n) \cap \operatorname{supp}(f_k) = \varnothing$$

для любого $k < n$. Пусть теперь Z_i $(i = 0, 1)$ — объединение множеств

$$Y \cap \operatorname{supp}(f_{2n+i});$$

показать, что одно из двух множеств Z_0, Z_1 относительно компактно в X (Общая топ., гл. X (2-е изд.), § 4, упр. 7), и прийти к противоречию.)

Вывести отсюда, что пространство $\mathscr{K}(X; \mathbf{R})$, наделенное топологией $\mathscr{T}$, *не является квазиполным*.

3) В примере из упражнения 2 возьмем в качестве Y дискретное пространство $\mathbf{N}$. Пусть для любого $n \in \mathbf{N}$ через e_n обозначена такая функция из $\mathscr{K}(X; \mathbf{R})$, что $e_n(n) = 1$ и $e_n(x) = 0$ для $x \neq n$ из X. Показать, что множество A, состоящее из функций 0 и $e_n/(n+1)$, компактно в $\mathscr{K}(X; \mathbf{R})$, но не строго компактно. Показать, что если $\mathfrak{U}$ есть ультрафильтр в $\mathbf{N}$, индуцированный фильтром окрестностей точки ω в $\beta Y = \beta\mathbf{N}$, то семейство положительных мер $(n\varepsilon_n)$ стремится по $\mathfrak{U}$ к 0 равномерно на любом строго компактном множестве из $\mathscr{K}(X; \mathbf{R})$, но не стремится к 0 равномерно на A.

°4) a) Пусть B_n — замкнутый единичный шар в евклидовом пространстве $\mathbf{R}^n$ и пусть A_n — множество функций $f \in \mathscr{C}(B_n; \mathbf{R})$ вида

$$f(x) = \lambda (\|x\|^2 - 1) + (x/a),$$

где $|\lambda| \leqslant 1/n$ и $\| a \| \leqslant 1/n$. Множество A_n выпукло и компактно в банаховом пространстве $\mathscr{C}(B_n; \mathbf{R})$ и обладает следующим свойством: каковы бы ни были функции $f_1, \ldots, f_n$, принадлежащие A_n, найдется такая точка $x \in B_n$, что $f_1(x) = \ldots = f_n(x) = 0$; напротив, существуют $n+1$ функций $g_1, \ldots, g_{n+1}$, принадлежащих A_n и не обращающихся одновременно в нуль ни в одной точке из B_n (можно рассмотреть отображение $x \mapsto x/(1 - \| x \|^2)$ $\mathring{B}_n$ в $\mathbf{R}^n$).

b) Пусть B'_n — множество B_n, наделенное дискретной топологией, и пусть $D_n = \beta B'_n$. Пусть, далее, Y (соответственно Y') есть локально компактное пространство — топологическая сумма пространств D_n (соотв. B'_n). Показать, что $\beta Y = \beta Y'$.

c) Пусть $K_n \subset \mathscr{C}(D_n; \mathbf{R})$ для любого целого n есть множество числовых функций, сужение которых на $B'_n = B_n$ принадлежит A_n. Пусть K — подмножество множества $\mathscr{C}(\beta Y; \mathbf{R})$, состоящее из функций, сужение которых на D_n принадлежит K_n для любого $n \in \mathbf{N}$.

Показать, что K есть компактное выпуклое подмножество банахова пространства $\mathscr{C}(\beta Y; \mathbf{R})$. Для любого конечного семейства $(f_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ функций из K через $W(f_1, \ldots, f_n)$ обозначим множество тех $y \in Y'$, в которых $f_i(y) = 0$ для $1 \leqslant i \leqslant n$. Показать, что $W(f_1, \ldots, f_n)$ образуют базис фильтра $\mathfrak{V}$ на дискретном пространстве Y'. Вывести отсюда, что существует такая точка $\omega \in \beta Y - Y$, что след на Y' фильтра окрестностей точки ω в βY есть более сильный фильтр, чем $\mathfrak{V}$. Вывести, что если положить $X = \beta Y - \{\omega\}$, то $K \subset \mathscr{K}(X; \mathbf{R})$, и при помощи упражнения 2 получить, что в $\mathscr{K}(X; \mathbf{R})$ множество K *выпукло, компактно, но не строго компактно.*

5) Показать, что если E — пространство Фреше, а X локально компактно, то $\mathscr{K}(X; E)$ есть борнологическое пространство.

Вывести отсюда, что для любого множества $\mathfrak{S}$ ограниченных подмножеств пространства $\mathscr{K}(X; \mathbf{C})$, являющегося покрытием $\mathscr{K}(X; \mathbf{C})$ и такого, что всякое множество, состоящее из точек сходящейся последовательности в $\mathscr{K}(X; \mathbf{C})$, принадлежит $\mathfrak{S}$, пространство $\mathscr{M}_{\mathfrak{S}}(X; \mathbf{C})$ полно.

6) Пусть μ — мера на локально компактном пространстве X. Показать, что $|\mu| = \sup \mathrm{Re}\,(\alpha\mu)$, когда скаляр α пробегает множество комплексных чисел с абсолютным значением $\leqslant 1$. (Заметить, что для любой функции $g \in \mathscr{K}(X; \mathbf{C})$ и любого $\varepsilon > 0$ существуют конечное число таких отображений h_i пространства X в $]0,1[$ с компактным носителем и такие скаляры α_i, что

$$\|g - \sum_i \alpha_i h_i\| \leqslant \varepsilon \text{ и } \|\,|g| - \sum_i |\alpha_i|\, h_i\| \leqslant \varepsilon.)$$

Показать, что справедливо также равенство $|\mu| = \sup \mathrm{Re}\,(h\cdot\mu)$, где h пробегает множество таких функций из $\mathscr{K}(X; \mathbf{C})$, что $\|h\| \leqslant 1$.

7) Построить пример, показывающий, что в $\mathscr{M}(X; \mathbf{C})$ множество действительных ограниченных мер μ, удовлетворяющих условию $\|\mu\| = a$, не обязательно широко замкнуто, даже когда X компактно; показать, что если X локально компактно, но не компактно, то множество ограниченных положительных мер, удовлетворяющих условию $\|\mu\| = 1$, не является широко замкнутым.

8) Пусть X — локально компактное пространство; для любого компактного подмножества K из X и любого целого $n > 0$ обозначим через $S_{K,n}$ множество функций $f \in \mathscr{K}(X; \mathbf{C})$ с носителем, содержащимся в K, и таких, что $\|f\| \leqslant n$. *Квазисильной* топологией в $\mathscr{M}(X; \mathbf{C})$ называется топология равномерной сходимости на множествах $S_{K,n}$. Она является более слабой, чем *сильная* топология (когда $\mathscr{M}(X; \mathbf{C})$ рассматривается как двойственное к пространству $\mathscr{K}(X; \mathbf{C})$; ср. Топ. вект. пр-ва, гл. IV, § 3, п. 1), и совпадает с ней, когда X паракомпактно.

а) Показать, что квазисильная топология на $\mathscr{M}(X; \mathbf{C})$ определяется посредством полунорм $\mu \mapsto |\mu|(f)$, где f пробегает $\mathscr{K}_+(X)$; про-

странство $\mathscr{M}(X; \mathbf{C})$ полно в квазисильной топологии. Ограниченные подмножества из $\mathscr{M}(X; \mathbf{C})$ относительно квазисильной топологии являются равностепенно непрерывными подмножествами из $\mathscr{M}(X; \mathbf{C})$.

b) Показать, что в $\mathscr{M}(X; \mathbf{R})$ квазисильная топология согласуется со структурой упорядоченного векторного пространства (Топ. вект. пр-ва, гл. II (2-е изд.), § 2, п. 7). Вывести отсюда, что если H — возрастающее мажорированное фильтрующееся множество в $\mathscr{M}(X; \mathbf{R})$, то верхняя грань H в $\mathscr{M}(X; \mathbf{R})$ совпадает с пределом его фильтра сечений относительно квазисильной топологии (там же).

9) Пусть X — компактный интервал $[0, 1]$ из $\mathbf{R}$.

a) Пусть μ_n — мера, наделяющая массой $+1$ точку 0 и массой -1 точку $1/n$. Показать, что последовательность (μ_n) широко сходится к 0 в $\mathscr{M}(X; \mathbf{C})$, но $|\mu_n|$ не сходится широко к 0.

b) Пусть μ — мера Лебега на X и пусть $g_n(x) = \sin nx$. Показать, что мера $(1 - g_n) \cdot \mu$ положительна, и когда n неограниченно возрастает, широко сходится к μ, но не сходится сильно к μ. Вывести отсюда, что топологии, индуцированные в $\mathscr{M}_+(X)$ широкой топологией и сильной топологией (совпадающей здесь с квазисильной топологией), различны (ср. упр. 10).

10) Пусть Φ — фильтр на множестве $\mathscr{M}_+(X)$ положительных мер на X. Показать, что если Φ широко сходится, то для любого компактного подмножества K из X существуют такое множество $M \in \Phi$ и такое число $a_K > 0$, что $|\mu(f)| \leqslant a_K \cdot \|f\|$ для любой функции $f \in \mathscr{K}(X, K; \mathbf{C})$ и любой меры $\mu \in M$.

°11) a) Показать, что если наделить $\mathscr{M}(X; \mathbf{C})$ квазисильной топологией (соотв. топологией строго компактной сходимости, соотв. широкой топологией), то билинейная форма $(f, \mu) \mapsto \langle f, \mu \rangle$ будет $(\mathfrak{S}, \mathfrak{T})$-гипонепрерывна, где $\mathfrak{T}$ есть множество широко ограниченных подмножеств из $\mathscr{M}(X; \mathbf{C})$ и где $\mathfrak{S}$ есть множество ограниченных подмножеств из $\mathscr{K}(X; \mathbf{C})$, содержащихся в $\mathscr{K}(X, K; \mathbf{C})$ для надлежащим образом выбранного компактного множества K (соотв. множество строго компактных подмножеств из $\mathscr{K}(X; \mathbf{C})$, соотв. множество конечных подмножеств из $\mathscr{K}(X; \mathbf{C})$) (ср. Топ. вект. пр-ва, гл. III, § 4, упр. 7).

b) Показать, что для любого компактного подмножества K из X билинейная форма $(f, \mu) \mapsto \langle f, \mu \rangle$ непрерывна на $\mathscr{K}(X, K; \mathbf{C}) \times \mathscr{M}(X; \mathbf{C})$, если наделить $\mathscr{M}(X; \mathbf{C})$ квазисильной топологией; она непрерывна на $\mathscr{K}(X, K; \mathbf{C}) \times \mathscr{M}_+(X)$, если наделить $\mathscr{M}_+(X)$ широкой топологией (воспользоваться упр. 10).

c) Предположим, что X паракомпактно, но не компактно. Показать, что билинейная форма $(f, \mu) \mapsto \langle f, \mu \rangle$ не является непрерывной на $\mathscr{K}(X; \mathbf{C}) \times \mathscr{M}_+(X)$, если $\mathscr{M}_+(X)$ наделено сильной топологией (совпадающей в этом случае с квазисильной топологией).

d) Построить пример, когда X компактно и когда билинейная форма $(f, \mu) \mapsto \langle f, \mu \rangle$ не является непрерывной на $\mathscr{C}(X; \mathbf{C}) \times \mathscr{M}(X; \mathbf{C})$.

если наделить $\mathscr{M}(X; \mathbf{C})$ топологией компактной сходимости (Топ. вект. пр-ва, гл. IV, § 3, упр. 2).

°12) a) Показать, что билинейное отображение $(g, \mu) \mapsto g \cdot \mu$ произведения $\mathscr{C}_c^0(X; \mathbf{C}) \times \mathscr{M}(X; \mathbf{C})$ в $\mathscr{M}(X; \mathbf{C})$ непрерывно, если наделить $\mathscr{C}(X; \mathbf{C})$ топологией компактной сходимости, а $\mathscr{M}(X; \mathbf{C})$ — квазисильной топологией (упр. 8) или топологией строго компактной сходимости.

b) Показать, что билинейное отображение $(g, \mu) \mapsto g \cdot \mu$ произведения $\mathscr{C}(X; \mathbf{C}) \times \mathscr{M}(X; \mathbf{C})$ в $\mathscr{M}(X; \mathbf{C})$ будет $(\mathfrak{S}, \mathfrak{T})$-гипонепрерывным, если наделить $\mathscr{C}(X, \mathbf{C})$ топологией компактной сходимости, а $\mathscr{M}(X; \mathbf{C})$ — широкой топологией; при этом $\mathfrak{S}$ означает множество конечных подмножеств из $\mathscr{C}(X; \mathbf{C})$, а $\mathfrak{T}$ — множество широко ограниченных подмножеств из $\mathscr{M}(X; \mathbf{C})$.

c) Показать, что отображение $(g, \mu) \mapsto g \cdot \mu$ произведения $\mathscr{C}(X, \mathbf{C}) \times \mathscr{M}_+(X)$ в $\mathscr{M}(X; \mathbf{C})$ непрерывно, если наделить $\mathscr{C}(X; \mathbf{C})$ топологией компактной сходимости, а $\mathscr{M}(X; \mathbf{C})$ и $\mathscr{M}_+(X)$ — широкой топологией.

d) Построить пример такого компактного пространства X, чтобы билинейное отображение $(g, \mu) \mapsto g \cdot \mu$ произведения $\mathscr{C}(X; \mathbf{C}) \times \mathscr{M}(X; \mathbf{C})$ в $\mathscr{M}(X; \mathbf{C})$ не было непрерывным, если наделить $\mathscr{C}(X; \mathbf{C})$ топологией равномерной сходимости, а $\mathscr{M}(X; \mathbf{C})$ — широкой топологией.

13) Показать, что для любой функции $f \in \mathscr{K}_+(X)$ отображение $\mu \mapsto |\mu|(f)$ полунепрерывно снизу на $\mathscr{M}(X; \mathbf{C})$ относительно широкой топологии.

°14) a) Пусть X — локально компактное пространство со счетным базисом. Показать, что пространство $\mathscr{M}_+(X)$, наделенное широкой топологией, метризуемо.

b) Пусть L — множество возрастающих последовательностей $(k_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ неотрицательных целых чисел, стремящихся к $+\infty$ вместе с n и равных нулю при $n \leqslant 0$, за исключением конечного числа значений n; пусть P — множество классов эквивалентности, состоящих из сдвигов $(k_{n+h})_{n \in \mathbf{Z}}$ одной и той же последовательности $(k_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ (h пробегает $\mathbf{Z}$); L и P не является счетными. Пусть X — дискретное пространство, являющееся топологической суммой множеств P и $\mathbf{Z}$; пусть H — множество положительных мер на X, определенных следующим образом: для любого $\alpha \in P$ и любой последовательности $g \in \alpha$ пусть $\nu_{\alpha, g}$ — мера, определенная посредством массы $+1$ в точке α, массы 0 в остальных точках из P и массы $g(n)$ в каждой точке $n \in \mathbf{Z}$; H есть конус, порожденный мерами $\nu_{\alpha, g}$. Пусть теперь μ — мера на X, определенная посредством массы $+1$ в каждой точке из P и массы 0 в каждой точке из $\mathbf{Z}$. Показать, что μ есть точка прикосновения множества H в широкой топологии, но не является точкой прикосновения в широкой топологии никако широко ограниченного подмножества из H. (Воспользоваться тем фактом, что для любо-

го отображения f множества $\mathbf{Z}$ в $\mathbf{N}$ существует такая возрастающая последовательность $(k_n) \in L$, что $\lim_{n\to\infty} k_{n+h}/f(n) = +\infty$ для любого $h \in \mathbf{Z}$.)

15) Пусть X — локально компактное, но не компактное пространство; в пространстве $\mathscr{M}^1(X; \mathbf{C})$ ограниченных мер на X, двойственном к банахову пространству $\mathscr{C}^0(X; \mathbf{C})$, назовем *ультрасильной* топологию, определяемую нормой $\| \mu \|$, а *слабой* — топологию $\sigma(\mathscr{M}^1(X; \mathbf{C}), \mathscr{C}^0(X; \mathbf{C}))$.

a) Показать, что если X паракомпактно, то слабая топология в $\mathscr{M}^1(X; \mathbf{C})$ строго сильнее, чем широкая топология (ср. с упр. 2).

b) Показать, что в $\mathscr{M}^1(X; \mathbf{C})$ ультрасильная топология строго сильнее, чем квазисильная (заметим, что относительно этой последней ε_x стремится к 0, когда x стремится к бесконечности).

c) Показать, что если X счетно в бесконечности и не дискретно, то в $\mathscr{M}^1(X; \mathbf{C})$ слабая и квазисильная топологии не сравнимы.

d) Показать, что в $\mathscr{M}^1(X; \mathbf{C})$ всякое слабо ограниченное множество ограничено в ультрасильной топологии, но могут существовать множества, ограниченные в квазисильной топологии, но не являющиеся слабо ограниченными.

16) Пусть X — локально компактное пространство и X' — компактное пространство, полученное присоединением к X бесконечно удаленной точки. Пусть μ — ограниченная мера на X; показать, что на X' существует, и причем только одна, мера μ', продолжающая меру μ и такая, что $\| \mu' \| = \| \mu \|$.

17) Пусть для любой меры μ на локально компактном пространстве X и для любого гомеоморфизма σ пространства X на себя через μ_σ обозначена мера $f \mapsto \mu(f \circ \sigma)$.

a) Доказать, что $|\mu_\sigma| = |\mu|_\sigma$.

b) Пусть $\mathscr{M}(X; \mathbf{C})$ наделено широкой топологией и пусть $\mathscr{A}$ — множество непрерывных эндоморфизмов локально выпуклого пространства $\mathscr{M}(X; \mathbf{C})$; пусть $\mathscr{A}$ наделено топологией равномерной сходимости на широко ограниченных подмножествах из $\mathscr{M}(X; \mathbf{C})$. Пусть, далее, Γ — группа гомеоморфизмов X на себя, наделенная топологией $\mathscr{T}_\beta$, определенной в Общей топ., гл. X (2-е изд.), § 3, п. 5. Пусть, наконец, для любого $\sigma \in \Gamma$ через A_σ обозначено отображение $\mu \mapsto \mu_\sigma$, принадлежащее $\mathscr{A}$; показать, что отображение $\sigma \mapsto A_\sigma$ множества Γ в $\mathscr{A}$ непрерывно.

18) Пусть X — компактное пространство и μ — такая мера на X, что $\mu(1) = \| \mu \|$. Показать, что μ — положительная мера. Сначала заметить, что если $\mu_1 = \mathrm{Re}(\mu)$, $\mu_2 = \mathrm{Im}(\mu)$, то $\mu_1(1) = \| \mu_1 \|$, и показать, что μ_1 — положительная мера, используя гл. II, § 2, п. 2, предложение 4; затем доказать, что $\mu_2 = 0$, рассматривая $\mu(1 + if)$ для надлежащим образом выбранной функции $f \in \mathscr{C}(X; \mathbf{R})$.

§ 2. Носитель меры

1. *Сужение меры на открытое множество. Определение меры при помощи локальных данных*

Пусть X — локально компактное пространство, а Y — открытое множество в X. Подпространство Y пространства X локально компактно, и всякая непрерывная функция со значениями в топологическом векторном пространстве E, определенная на Y и имеющая компактный носитель, может быть продолжена по непрерывности на все X, если положить ее равной 0 на $\complement Y$; следовательно, таким способом можно отождествить пространство $\mathscr{K}(Y; E)$ с подпространством пространства $\mathscr{K}(X; E)$, состоящим из непрерывных функций с компактным носителем, *содержащимся в* Y. Если μ — мера на X, то ясно, что сужение μ на $\mathscr{K}(Y; \mathbf{C})$ есть мера на Y; ее называют *сужением* меры μ на открытое подпространство Y или, еще, мерой, *индуцированной* на Y мерой μ, и обозначают $\mu \mid Y$. Сужениями на Y мер $|\mu|$, $\operatorname{Re}\mu$, $\operatorname{Im}\mu$ являются, соответственно, $|\mu \mid Y|$, $\operatorname{Re}(\mu \mid Y)$ и $\operatorname{Im}(\mu \mid Y)$, в силу § 1, пп. 5 и 6. Если μ действительна, то сужениями мер μ^+ и μ^- на Y будут, соответственно, $(\mu \mid Y)^+$ и $(\mu \mid Y)^-$, в силу формулы (8), § 1, п° 5.

Легко видеть, что если Y и Z — такие открытые множества в X, что $Y \supset Z$, и если $\mu \mid Y$ и $\mu \mid Z$ — сужения μ на Y и на Z, то $\mu \mid Z$ будет также сужением $\mu \mid Y$ на открытое подпространство Z локально компактного пространства Y.

В главе IV, § 5, п° 7 мы обобщим это определение на случай, когда Y есть локально компактное подпространство пространства X.

Отметим, что мера на Y *не обязана быть* сужением меры на X (ср. гл. V, § 7, п. 2, предл. 6).

Например, пусть Y — открытый интервал $]0,1[$ из $X = \mathbf{R}$; отображение

$$f \mapsto \int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}}\,dx$$

есть мера на Y, ибо всякая функция из $\mathscr{K}(Y; \mathbf{C})$ обращается в нуль в некоторой окрестности 0 на $\mathbf{R}$. Но эта мера не может быть продолжена до меры на $\mathbf{R}$, так как в противном случае ее сужение на множество функций $f \in \mathscr{K}(Y; \mathbf{C})$, удовлетворяющих условию $\|f\| \leqslant 1$, было бы ограничено; но это не так.

Однако имеет место следующее предложение.

Предложение 1. *Пусть* $(Y_\alpha)_{\alpha\in A}$ — *открытое покрытие пространства* X *и пусть на каждом подпространстве* Y_α *задана мера* μ_α *так, чтобы для любой пары* (α, β) *сужения мер* μ_α *и* μ_β *на* $Y_\alpha \cap Y_\beta$ *совпадали. При этих условиях на* X *существует, и притом единственная, мера* μ, *сужение которой на* Y_α *равно* μ_α *для любого индекса* α.

Вначале покажем, что всякая функция $f \in \mathscr{K}(X; \mathbf{C})$ может быть записана в виде конечной суммы $f \in \sum_i f_i$, где для каждой функции $f_i \in \mathscr{K}(X; \mathbf{C})$ существует такой индекс α_i, что $\operatorname{supp}(f_i) \subset Y_{\alpha i}$. Если $K = \operatorname{supp}(f)$, то найдется конечное число таких индексов α_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$, что $Y_{\alpha i}$ образуют покрытие множества K; пусть h_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ — такие непрерывные отображения X в $]0,1[$, что носитель h_i компактен и содержится в $Y_{\alpha i}$ для $1 \leqslant i \leqslant n$ и что $\sum_{i=1}^{n} h_i(x) = 1$ на K (§ 1, п. 2, лемма 1); функции $f_i = fh_i$ удовлетворяют поставленному условию. Это прежде всего показывает, что если существует искомая мера μ, то она *единственна*, так как для любой конечной суммы $f = \sum_{i=1}^{n} f_i$, где $f_i \in \mathscr{K}(Y_{\alpha i}; \mathbf{C})$, должно быть $\mu(f) = \sum_{i=1}^{n} \mu_{\alpha_i}(f_i)$. Далее, существование линейной формы μ на $\mathscr{K}(X; \mathbf{C})$, сужение которой на каждое подпространство $\mathscr{K}(Y_\alpha; \mathbf{C})$ равно μ_α, будет установлено, как только будет доказано следующее свойство: если $(g_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$ и $(h_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ — такие конечные последовательности функций из $\mathscr{K}(X; \mathbf{C})$, что $g_i \in \mathscr{K}(Y_{\alpha i}; \mathbf{C})$ для $1 \leqslant i \leqslant m$, $h_j \in \mathscr{K}(Y_{\beta_j}; \mathbf{C})$ для $1 \leqslant j \leqslant n$ и

$$\sum_{i=1}^{m} g_i(x) = \sum_{j=1}^{n} h_j(x) = 1$$

на K, то

$$\sum_{i=1}^{m} \mu_{\alpha_i}(fg_i) = \sum_{j=1}^{n} \mu_{\beta_j}(fh_j).$$

Но

$$fg_i = \sum_{j=1}^{n} fg_ih_j,$$

откуда

$$\sum_{i=1}^{m} \mu_{\alpha_i}(fg_i) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \mu_{\alpha_i}(fg_ih_j).$$

Точно так же,

$$\sum_{j=1}^{n} \mu_{\beta_j}(fh_j) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} \mu_{\beta_j}(fg_ih_j).$$

Но так как носитель функции fg_ih_j содержится в $Y_{\alpha_i} \cap Y_{\beta_j}$, то $\mu_{\alpha_i}(fg_ih_j) = \mu_{\beta_j}(fg_ih_j)$, чем и доказано наше утверждение.

Остается показать, что μ есть мера на X; но каждая точка из X имеет компактную окрестность, содержащуюся в одном из Y; стало быть, заключение следует сразу же из определения меры μ и из предложения 6, п. 3, § 1.

Следствие (принцип локализации). *Пусть μ и ν — меры на X и пусть (Y_α) — такое семейство открытых множеств из X, что для любого α сужения на Y_α мер μ и ν равны; тогда равны и сужения мер μ и ν на $Y = \bigcup_\alpha Y_\alpha$.*

2. Носитель меры

Пусть μ — мера на локально компактном пространстве X и пусть $\mathfrak{G}$ — множество таких открытых подмножеств $U \subset X$, что сужение μ на U равно нулю; из принципа локализации сразу же вытекает (п° 1, следствие из предл. 1), что если U_0 — *объединение* множеств $U \in \mathfrak{G}$, то и само U_0 принадлежит $\mathfrak{G}$, и значит, является наибольшим среди всех множеств из $\mathfrak{G}$.

Определение 1. *Носителем меры μ на локально компактном пространстве X называется, и обозначается* $\operatorname{supp}(\mu)$, *замкнутое множество, являющееся дополнением наибольшего множества среди всех открытых множеств из X, на которых сужение меры μ обращается в нуль.*

Утверждение, что точка $x \in X$ не принадлежит носителю меры μ, означает, что существует такая открытая окрестность V точки x, что сужение меры μ на V обращается в нуль; утверждение, что x принадлежит носителю меры μ, означает, следовательно, что для *любой* окрестности V точки x существует функция $f \in \mathscr{K}(X; \mathbf{C})$, носитель которой содержится в V и которая такова, что $\mu(f) \neq 0$.

Примеры. 1) Для того чтобы мера на X была нулевой, необходимо и достаточно, чтобы ее носитель был *пуст*.

2) Носитель меры Лебега на $\mathbf{R}$ есть вся прямая $\mathbf{R}$; в самом деле, он не пуст и инвариантен относительно любого сдвига.

3) Рассмотрим на интервале $X = [0, 1]$ из $\mathbf{R}$ счетное всюду плотное множество, расположенное в последовательность (a_n), и пусть μ — мера, определенная массой 2^{-n}, помещенной в точке a_n для любого $n \geqslant 0$ (§ 1, п. 3, пример 1). Носителем меры μ является все X; в самом деле, пусть x — произвольная точка из X, V — окрестность точки x и $f \geqslant 0$ — непрерывная числовая функция на X, равная 1 в точке x и имеющая носитель, содержащийся в V (§ 1, п. 2, лемма 1); множество тех $y \in V$, для которых $f(y) > 0$, открыто в X, значит, содержит точку a_n, и следовательно, $\mu(f) \geqslant f(a_n)\, 2^{-n} > 0$.

Предложение 2. *Носитель меры μ совпадает с носителем меры $|\mu|$; если μ действительна, то ее носитель является объединением носителей мер μ^+ и μ^-.*

Действительно, если сужение меры μ на открытое множество U равно нулю, то это будет иметь место и для сужения меры $|\mu|$ (соотв. мер μ^+ и μ^-, когда μ действительна), и обратно.

Отметим, что носители мер μ^+ и μ^- могут быть непустыми и *тождественными* (ср. гл. V, § 5, упр. 6).

Предложение 3. *Если μ и ν — меры на локально компактном пространстве X, удовлетворяющие условию $|\mu| \leqslant |\nu|$, то* $\operatorname{supp}(\mu) \subset \operatorname{supp}(\nu)$.

В самом деле, если сужение меры ν на некоторое открытое множество обращается в нуль, то это имеет место и для сужения меры μ.

Предложение 4. *Носитель суммы двух мер содержится в объединении их носителей.*

Действительно, если сужения двух мер на открытое множество обращаются в нуль, то это имеет место и для сужения их суммы.

Если μ и ν — *положительные* меры, то носитель меры $\lambda = \mu + \nu$ *равен* объединению носителей мер μ и ν: в самом деле, если x_0 — точка из этого объединения, а V — произвольная окрестность точки x_0, то найдется непрерывная функция $f \geqslant 0$, имеющая компактный носитель, содержащийся в V, и такая, что одно из двух чисел $\mu(f)$, $\nu(f)$ будет > 0; тем более, имеем

$$\lambda(f) = \mu(f) + \nu(f) > 0.$$

Предложение 5. *Носитель сужения меры* μ *на открытое множество* U *есть след на* U *носителя меры* μ.

Предложение очевидным образом вытекает из определений.

Предложение 6. *Множество мер на локально компактном пространстве* X, *носитель которых содержится в замкнутом множестве* F, *является широко замкнутым векторным подпространством пространства* $\mathscr{M}(X; \mathbf{C})$.

Действительно, это множество есть пересечение широко замкнутых гиперплоскостей, задаваемых уравнениями $\mu(f) = 0$, где f пробегает множество функций из $\mathscr{K}(X; \mathbf{C})$, носитель которых не пересекает F.

Предположим, что X *не компактно*; если в пространстве $\mathscr{M}(X; \mathbf{C})$ мер на X задан фильтр Φ, то мы будем говорить, что носитель меры μ *бесконечно удаляется по* Φ, если для любого компактного множества K из X существует такое множество $M \in \Phi$, что для любой меры $\mu \in M$ имеем $\operatorname{supp}(\mu) \cap K = \varnothing$.

Предложение 7. *Если* Φ — *такой фильтр в* $\mathscr{M}(X; \mathbf{C})$, *что носитель меры* μ *бесконечно удаляется по* Φ, *то* μ *широко сходится по* Φ *к* 0.

В самом деле, пусть f — произвольная функция из $\mathscr{K}(X; \mathbf{C})$ и пусть K — ее носитель. По условию, существует такое множество $M \in \Phi$, что для любой меры $\mu \in M$ $\operatorname{supp}(\mu) \cap K = \varnothing$; следовательно, $\mu(f) = 0$ для любого $\mu \in M$, что и доказывает предложение.

3. *Характеризация носителя меры*

Согласно определению, если носитель функции $f \in \mathscr{K}(X; \mathbf{C})$ *не пересекает* носителя меры μ, то $\mu(f) = 0$; однако имеет место следующее, более точное свойство.

Предложение 8. *Пусть* μ — *мера на локально компактном пространстве* X. *Для любой функции* $f \in \mathscr{K}(X; \mathbf{C})$, *обращающейся в нуль на* $\operatorname{supp}(\mu)$, $\mu(f) = 0$.

Положим $K = \operatorname{supp}(f)$, $S = \operatorname{supp}(\mu)$. Для заданного $\varepsilon > 0$ через V обозначим множество тех $x \in X$, для которых $|f(x)| < \varepsilon$; по условию, V является открытым множеством, содержащим S;

значит, $\complement S$ будет окрестностью компактного множества $\complement V$. Следовательно, существует непрерывное отображение h пространства X в $[0, 1]$, равное 1 на $\complement V$ и имеющее носитель, содержащийся в $\complement S$ (§ 1, п° 2, лемма 1). А поскольку носитель функции fh не пересекает S, то $\mu(fh) = 0$. С другой стороны, $f = fh$ на $K \cap \complement V$ и $|fh| \leqslant f$ на X; стало быть, согласно выбору V, $|f - fh| \leqslant 2\varepsilon$ на X. Наконец, заметим, что найдется такое число M_K, что $|\mu(g)| \leqslant M_K \|g\|$ для любой функции $g \in \mathscr{K}(X; \mathbf{C})$, носитель которой содержится в K; а так как носитель разности $f - fh$ содержится в K, то $|\mu(f - fh)| \leqslant 2M_K\varepsilon$, и следовательно, $|\mu(f)| = |\mu(f - fh)| \leqslant 2M_K\varepsilon$; но ε произвольно, и значит, $\mu(f) = 0$.

Следствие 1. *Если функции f и g из $\mathscr{K}(X; \mathbf{C})$ равны на* $\operatorname{supp}(\mu)$, *то* $\mu(f) = \mu(g)$.

Следствие 2. *Пусть μ — положительная мера на X; если функция $f \in \mathscr{K}(X; \mathbf{C})$ такова, что $f(x) \geqslant 0$ на* $\operatorname{supp}(\mu)$, *то* $\mu(f) \geqslant 0$.

В самом деле, $f = |f|$ на S, и значит, в силу следствия 1, $\mu(f) = \mu(|f|) \geqslant 0$.

Следствие 3. *Пусть μ — ограниченная мера на X; если функция $f \in \mathscr{K}(X; \mathbf{C})$ такова, что $|f(x)| \leqslant a$ на* $\operatorname{supp}(\mu)$, *то* $|\mu(f)| \leqslant a\|\mu\|$.

Действительно, $\operatorname{supp}(|\mu|) = \operatorname{supp}(\mu)$, и если h — непрерывное отображение пространства X в $[0, 1]$, равное 1 на $\operatorname{supp}(f)$ и имеющее компактный носитель, то $|f(x)| \leqslant ah(x)$ на $\operatorname{supp}(\mu)$, а значит, в силу следствия 2,

$$|\mu|(|f|) \leqslant a\,|\mu|(h) \leqslant a\|\mu\|;$$

утверждение следует теперь из формулы (13), п. 6.

Предложение 9. *Пусть μ — положительная мера на X; если f — такая функция из $\mathscr{K}_+(X)$, что $\mu(f) = 0$, то f обращается в нуль на* $\operatorname{supp}(\mu)$.

Пусть x — такая точка из X, что $f(x) > 0$; покажем, что x не принадлежит $\operatorname{supp}(\mu)$. В самом деле, тогда существует такая

компактная окрестность V точки x и такое число $a > 0$, что $f(y) \geqslant a$ на V. Пусть теперь $g \geqslant 0$ — непрерывная функция с компактным носителем в V; покажем, что $\mu(g) = 0$; действительно, если положить $b = \|g\|$, то $g \leqslant bf/a$, откуда $\mu(g) \leqslant b\mu(f)/a = 0$.

Предложение 10. *Пусть μ — мера на локально компактном пространстве X; тогда для любой функции $g \in \mathscr{C}(X; \mathbf{C})$ носитель меры $g \cdot \mu$ есть замыкание T множества точек $x \in \operatorname{supp}(\mu)$, для которых $g(x) \neq 0$.*

Действительно, положим $S = \operatorname{supp}(\mu)$; и пусть x_0 — точка, не принадлежащая T; найдется такая открытая окрестность V точки x_0, что в каждой точке из $V \cap S$ функция g равна нулю; если $f \in \mathscr{K}(X; \mathbf{C})$ имеет носитель в V, то fg обращается в нуль на S, и значит (предл. 8), $\mu(gf) = 0$; иными словами, сужение $g \cdot \mu$ на V равно нулю.

Обратно, предположим, что сужение $g \cdot \mu$ на некоторую открытую окрестность W точки $x_0 \in X$ равно нулю, и покажем, что в $W \cap S$ не существует точки, в которой $g \neq 0$. В самом деле, если бы существовала такая точка y, то существовала бы и компактная окрестность U точки y, содержащаяся в W и такая, что в каждой точке x этой окрестности $g(x) \neq 0$; но тогда всякая функция $f \in \mathscr{K}(X; \mathbf{C})$, носитель которой содержится в U, может быть записана в виде $f = gh$, где $h \in \mathscr{K}(X; \mathbf{C})$ имеет носитель в $U \subset W$; следовательно, мы имели бы $\mu(f) = \mu(gh) = 0$, что противоречит условию, что $y \in S$.

Отметим, что T содержится в пересечении носителя S меры μ и носителя функции g, не будучи обязательно равным этому пересечению. Например, если $X = \mathbf{R}$, если μ — мера Дирака в точке 0 и если $g(x) = x$, то $g \cdot \mu = 0$, хотя пересечение носителей g и μ есть множество, содержащее точку 0 и, стало быть, не пусто.

Следствие. *Для того чтобы мера $g \cdot \mu$ была нулевой, необходимо и достаточно, чтобы g обращалась в нуль на носителе меры μ.*

Предложение 11. *Всякая мера с компактным носителем ограничена.*

Действительно, $|\mu|$ тоже является мерой с компактным носителем, и значит, можно ограничиться случаем, когда $\mu \geqslant 0$; если

h — непрерывное отображение X в $[0, 1]$ с компактным носителем, равное 1 на supp (μ), то для любой функции $f \in \mathscr{K}(X; \mathbf{C})$ имеем $|f(x)| \leqslant \|f\| h(x)$ на supp (μ), и значит (следствие 2 из предл. 8), $\mu(|f|) \leqslant \mu(h) \|f\|$, чем предложение и доказано (§ 1, п° 8).

4. *Точечные меры. Меры с конечным носителем*

Предложение 12. *Пусть a_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ — различные точки в локально компактном пространстве X. Всякая мера на X, носитель которой принадлежит множеству точек a_i, есть линейная комбинация мер ε_{a_i} $(1 \leqslant i \leqslant n)$.*

В самом деле, такая мера μ является нулевой для любой функции $f \in \mathscr{K}(X; \mathbf{C})$, удовлетворяющей n соотношениям $f(a_i) = 0$ (п. 3, предл. 8); а так как эти соотношения записываются в виде $\varepsilon_{a_i}(f) = 0$, то μ является линейной комбинацией мер ε_{a_i} (Алгебра, гл. II (3-е изд.), § 7, п. 5, следствие 1 из теоремы 7).

В частности, всякая мера, носитель которой пуст или сводится к единственной точке x, имеет вид $\alpha\varepsilon_x$, где α — комплексное число; говорят, что такая мера есть *точечная мера*; стало быть, всякая мера, носитель которой конечен, есть сумма точечных мер.

Теорема 1. *Всякая мера μ на локально компактном пространстве X есть широкий элемент прикосновения векторного пространства V мер, носитель которых конечен и содержится в* supp (μ).

Достаточно доказать, что μ ортогональна подпространству V^0 пространства $\mathscr{K}(X; \mathbf{C})$, ортогональному к V (Топ. вект. пр-ва, гл. II (2-е изд.), § 6, п° 3, следствие 2 из теоремы 1), т. е. что соотношения $\langle f, \varepsilon_a \rangle = 0$, где a пробегает носитель меры μ, влекут $\langle f, \mu \rangle = 0$; но это есть не что иное, как предложение 8 из п. 3.

Следствие 1. *Всякая ограниченная мера μ на X является широким элементом прикосновения выпуклого множества A мер, носители которых конечны и содержатся в носителе меры μ и нормы которых $\leqslant \|\mu\|$. Кроме того, если ν широко стремится к μ, оставаясь в A, то $\|\nu\|$ стремится к $\|\mu\|$.*

Для доказательства первого утверждения достаточно установить, что мера μ принадлежит множеству, полярному к множеству A^0, которое полярно A в $\mathscr{K}(X; \mathbf{C})$ (Топ. вект. пр-ва, гл. II

(2-е изд.), § 6, п. 3, теорема 1); это означает, что для $f \in \mathscr{K}(X; \mathbf{C})$ соотношения $|\langle f, \varepsilon_a \rangle| \leqslant 1/\|\mu\|$ при любом $a \in \operatorname{supp}(\mu)$ влекут $|\langle f, \mu \rangle| \leqslant 1$; но это верно в силу следствия 3 из предложения 8 п. 3.

Для доказательства второго утверждения отметим, что

$$\liminf_{\nu \to \mu,\ \nu \in A} \|\nu\| \geqslant \|\mu\|,$$

поскольку функция $\nu \mapsto \|\nu\|$ полунепрерывна снизу в широкой топологии (§ 1, п. 9, следствие 4 из предл. 15), и наше утверждение следует из того, что $\|\nu\| \leqslant \|\mu\|$ для $\nu \in A$ по определению.

Следствие 2. *Всякая ограниченная мера μ на X является широким элементом прикосновения множества мер, носители которых конечны и содержатся в носителе меры μ и норма которых равна $\|\mu\|$.*

Без ограничения общности можно предположить $\mu \neq 0$. Пусть V — открытая окрестность элемента 0 в широкой топологии; согласно следствию 1, для любого ε, $0 < \varepsilon < 1$, существует мера ν_0, носитель которой конечен и содержится в $\operatorname{supp}(\mu)$ и которая обладает тем свойством, что $\nu_0 - \mu \in V$ и $\|\mu\| \geqslant \|\nu_0\| \geqslant (1-\varepsilon)\|\mu\|$. Если положить $\nu = (\|\mu\|/\|\nu_0\|)\,\nu_0$, то $\|\nu\| = \|\mu\|$, и $\|\nu - \nu_0\| \leqslant \varepsilon\|\mu\|$; а поскольку ε сколь угодно мало, то $\nu - \mu \in V + V$, откуда и получаем утверждение.

Следствие 3. *Всякая ограниченная положительная мера на X является широким элементом прикосновения выпуклого множества положительных мер, носители которых конечны и содержатся в носителе меры μ и норма которых равна $\|\mu\|$.*

Рассуждение, аналогичное проведенному в следствии 2, позволяет ограничиться доказательством того, что μ есть широкий элемент прикосновения выпуклого множества B, состоящего из положительных мер с конечными носителями в $\operatorname{supp}(\mu)$ и нормой $\leqslant \|\mu\|$. Для этого в свою очередь достаточно установить, что μ принадлежит полярному множеству к B^0, которое полярно к B в $\mathscr{K}(X; \mathbf{R})$ (Топ. вект. пр-ва, гл. II (2-е изд.), § 6, п. 3, теорема 1); последнее означает, что для любого $f \in \mathscr{K}(X; \mathbf{R})$ соотношения $\langle f, \varepsilon_a \rangle \leqslant 1/\|\mu\|$ при любом $a \in \operatorname{supp}(\mu)$ влекут $\langle f, \mu \rangle \leqslant 1$, это вытекает из п. 3, следствия 2 из предложения 8.

Следствие 4. *В пространстве* $\mathscr{M}(X; \mathbf{C})$ *множество точечных мер тотально в топологии строго компактной сходимости* (§ 1, п. 10).

В самом деле, в конусе $\mathscr{M}_+(X)$ топология строго компактной сходимости совпадает с широкой топологией (§ 1, п. 10, предл. 18), и любая мера на X записывается в виде $\mu_1 - \mu_2 + i\mu_3 - i\mu_4$, где μ_j $(1 \leqslant j \leqslant 4)$ — положительные меры; таким образом, заключение следует из теоремы 1.

Предложение 13. *Пусть* μ *— мера на локально компактном пространстве* X. *Для того чтобы точка* x_0 *принадлежала* $\operatorname{supp}(\mu)$, *необходимо и достаточно, чтобы точечная мера* ε_{x_0} *была широким элементом прикосновения множества мер* $g \cdot \mu$, *где* g *пробегает множество непрерывных функций с компактным носителем, удовлетворяющим условию* $\| g \cdot \mu \| \leqslant 1$.

Достаточность очевидным образом следует из предложения 6, п. 2. Чтобы показать необходимость, предположим, что $x_0 \in \operatorname{supp}(\mu)$; рассмотрим конечное число функций f_k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ из $\mathscr{K}(X; \mathbf{C})$ и произвольное число $\delta > 0$; достаточно доказать, что существует такая функция $g \in \mathscr{K}(X; \mathbf{C})$, удовлетворяющая условию $\| g \cdot \mu \| \leqslant 1$, что выполняется неравенство

$$| f_k(x_0) - \mu(g f_k) | \leqslant \delta$$

для $1 \leqslant k \leqslant n$. Пусть U — такая относительно компактная открытая окрестность точки x_0, что колебание каждой из f_k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ на U не превосходит $\delta/2$. По условию, в силу того, что $x_0 \in \operatorname{supp}(\mu)$, найдется функция $g_0 \in \mathscr{K}(X; \mathbf{C})$, имеющая носитель из U и такая, что $\mu(g_0) \neq 0$; мера $\nu = g_0 \cdot \mu$ отлична от нулевой, ибо для любой функции $f \in \mathscr{K}(X; \mathbf{C})$, равной 1 на U, имеем $\nu(f) = \mu(g_0) \neq 0$. Кроме того, ν ограничена (п. 3, предл. 11); умножая, если нужно, g_0 на скаляр, можем предположить, что $\| \nu \| = 1$. Далее, положив $\alpha_k = f_k(x_0)$, для $1 \leqslant k \leqslant n$ и для любой функции $h \in \mathscr{K}(X; \mathbf{C})$ имеем

$$f_k(x_0) - \nu(f_k h) = \alpha_k (1 - \nu(h)) + \nu((\alpha_k - f_k) h).$$

Но носитель меры ν содержится в U, и значит, можно отождествить ν с ее сужением на U; тогда условие $\| \nu \| = 1$ влечет существование функции $h \in \mathscr{K}(X; \mathbf{C})$ с носителем из U, такой, что $\| h \| \leqslant 1$ и что $| \alpha_k (1 - \nu(h)) | \leqslant \delta/2$ для $1 \leqslant k \leqslant n$. При этом

согласно определению окрестности U имеем $|(\alpha_k - f_k(x))\,h(x)| \leqslant \delta/2$ для любого $x \in U$; а поскольку $\|\nu\| = 1$ и $\operatorname{supp}(\nu) \subset U$, то $|\nu((\alpha_k - f_k)h)| \leqslant \delta/2$, и значит, положив $g = g_0 h$, получаем

$$|f_k(x_0) - \mu(gf_k)| \leqslant \delta \quad \text{для} \quad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

Тем самым предложение доказано, ибо

$$\|g\cdot\mu\| = \|(g_0 h)\cdot\mu\| \leqslant \|g_0\cdot\mu\| = 1.$$

Следствие. *Пусть μ — мера на X. Для того чтобы мера ν на X была широким элементом прикосновения множества мер $g\cdot\mu$, где g пробегает $\mathscr{K}(X; \mathbf{C})$, необходимо и достаточно, чтобы* $\operatorname{supp}(\nu) \subset \operatorname{supp}(\mu)$.

В самом деле, $\operatorname{supp}(g\cdot\mu) \subset \operatorname{supp}(\mu)$ в силу предложения 10, п. 3; следовательно, носитель любого широкого предела мер вида $g\cdot\mu$ также содержится в $\operatorname{supp}(\mu)$ (п. 2, предл. 6). Обратно, если $\operatorname{supp}(\nu) \subset \operatorname{supp}(\mu)$, то ν есть широкий предел мер с *конечными* носителями, содержащимися в $\operatorname{supp}(\mu)$ (теорема 1), и стало быть, является (согласно предложению 13) широким элементом прикосновения множества мер $g\cdot\mu$.

5. *Дискретные меры*

Предложение 14. *Для того чтобы мера μ на локально компактном пространстве X была дискретной мерой* (§ 1, п. 3, пример 1), *необходимо и достаточно, чтобы ее носитель был дискретным замкнутым подпространством пространства X.*

Пусть μ — дискретная мера на X, определенная при помощи масс $h(x) \neq 0$, расположенных в точках x дискретного замкнутого подпространства N пространства X; покажем, что носитель меры μ совпадает с N. В самом деле, для всякой точки $a \in N$ и любой окрестности V точки a найдется функция $f \in \mathscr{K}(X; \mathbf{C})$ с носителем в V, равная 1 в точке a и 0 в остальных точках из N; отсюда $\mu(f) = h(a) \neq 0$. Если, напротив, $b \notin N$, то найдется окрестность W точки b, не имеющая ни одной общей точки с N; тогда для любой функции $g \in \mathscr{K}(X; \mathbf{C})$ с носителем в N выполняется равенство $\mu(g) = 0$, показывающее, что b не принадлежит носителю меры μ.

Обратно, пусть μ — мера, носитель которой является дискретным замкнутым подпространством N пространства X. Для любой точки $a \in N$ существует открытая окрестность V_a точки a, не

содержащая ни одной точки из N, отличной от a; следовательно, сужение меры μ на V_a есть точечная мера с носителем $\{a\}$ (п. 2, предл. 5) и значит (п. 4, предл. 12), имеет вид $h(a)\,\varepsilon_a$, где $h(a) \neq 0$. Если положить $h(x) = 0$ в точках из $\mathbf{C}N$ и обозначить через ν меру, определенную при помощи масс $h(x)$, то на основании принципа локализации получаем, что $\nu = \mu$.

Мы видим, таким образом, что на *дискретном* пространстве X всякая мера *дискретна*.

Упражнения

1) Пусть X — *локально компактное* пространство и пусть Φ — такой фильтр в $\mathscr{M}(X; \mathbf{C})$, что носитель меры μ бесконечно удаляется по Φ; показать, что μ стремится к 0 по Φ относительно квазисильной топологии (§ 1, упр. 8).

2) Показать, что в ультрасильной топологии в $\mathscr{M}^1(X; \mathbf{C})$ (§ 1, упр. 15) множество мер с компактным носителем всюду плотно в $\mathscr{M}^1(X; \mathbf{C})$.

3) Пусть X — интервал $[0, 1]$ из $\mathbf{R}$. Показать, что в банаховом пространстве $\mathscr{M}(X; \mathbf{C})$ расстояние меры Лебега до любой дискретной меры $\geqslant 1$.

°4) Пусть A — несчетное множество. Рассмотрим во множестве $\mathfrak{P}(A)$ отношение между M и N: «$M \cap \mathbf{C}N$ и $N \cap \mathbf{C}M$ счетны»; показать, что это есть отношение эквивалентности, слабо согласующееся с отношением включения $M \subset M'$ (Множества, гл. III (2-е изд.) § 1, упр. 2). Пусть B — фактормножество множества $\mathfrak{P}(A)$ по этому отношению эквивалентности; показать, что в B отношение, полученное из отношения включения факторизацией, есть отношение порядка, для которого B является булевой решеткой (там же, упр. 17). Известно (*Общая топ.*, гл. II (3-е изд.), § 4, упр. 12), что существует изоморфизм структуры порядка множества B на булеву решетку, состоящую из замкнутых и открытых одновременно подмножеств вполне несвязного компактного пространства X. Показать, что если U — непустое открытое множество в X, то существует несчетное семейство непустых попарно не пересекающихся открытых подмножеств V_α из U (воспользоваться тем, что несчетное множество допускает несчетное разбиение, состоящее из несчетных подмножеств). Вывести отсюда, что всякая мера на X имеет *нигде не плотный* носитель.

5) Пусть X — компактное пространство. Говорят, что бесконечная последовательность $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ точек из X имеет *предельное распределение*, если последовательность мер с конечным носителем $\dfrac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon_{x_i}$

широко стремится к некоторому пределу μ в $\mathscr{M}_+(X)$; говорят также, что последовательность (x_n) *равнораспределена по мере* μ. Показать, что если T — тотальное множество в банаховом пространстве $\mathscr{C}(X; \mathbf{C})$, то для того, чтобы последовательность (x_n) имела предельное распределение, необходимо и достаточно, чтобы последовательность $\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$ стремилась к пределу в $\mathbf{C}$ для любой функции $f \in T$. Показать, в частности, что если X — метризуемое компактное пространство, то для любой последовательности (x_n) точек из X существует подпоследовательность (x_{n_k}), имеющая предельное распределение.

Показать, что если X — интервал $[0, 1]$ из $\mathbf{R}$, а μ — мера Лебега на X, то для того чтобы последовательность (x_n) точек из X была равнораспределена относительно μ, необходимо и достаточно, чтобы она была *равнораспределена* mod 1 в смысле: (Общая топ., гл. VII, § 1 упр. 14). Для этого необходимо и достаточно, чтобы для любого целого $m \in \mathbf{Z}$ последовательность $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} e^{2i\pi m x_k}$ стремилась к 0 при $m \neq 0$.

Вывести отсюда снова, в частности, что последовательность точек $x_n = n\theta - [n\theta]$ $(n \in \mathbf{N})$ равнораспределена mod 1 для любого иррационального числа θ (Общая топ., гл. VII, § 1, упр. 14). Каково будет предельное распределение, когда θ рационально? (Ср. также гл. IV, § 5, п. 12.)

§ 3. Интегралы от непрерывных вектор-функций

На протяжении всего параграфа через X обозначается локально компактное пространство, через E — локально выпуклое пространство над $\mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$. Через E' обозначается сопряженное к E (пространство непрерывных линейных форм на E), через E'^* — алгебраическое сопряженное к E' (пространство всех линейных форм на E'); для $x \in E$, $x' \in E'$, $x'^* \in E'^*$ используются обозначения $\langle x, x' \rangle = x'(x)$, $\langle x'^*, x' \rangle = x'^*(x')$.

Напомним, что если E отделимо, то оно отождествляется с некоторым подпространством пространства E'^* путем идентификации элемента $x \in E$ с линейной формой $x' \to \langle x, x' \rangle$ на E' и что E'^*, наделенное слабой топологией $\sigma(E'^*, E')$, канонически отождествляется с пополнением пространства E, наделенным ослабленной топологией $\sigma(E, E')$.

1. Определение интеграла от вектор-функции

Напомним, что отображение f пространства X в E называется *слабо непрерывным*, если для любого $z' \in E'$ отображение $x \mapsto \langle f(x), z' \rangle$ пространства X в $\mathbf{C}$ (иными словами, отображение $z' \circ f$, обозначаемое также $\langle f, z' \rangle$) непрерывно. Будем говорить, что отображение f пространства X в E *скалярно финитно*, если для любого $z' \in E'$ отображение $x \mapsto \langle f(x), z' \rangle$ имеет компактный носитель. Будем обозначать через $\widetilde{\mathscr{K}}(X; E)$ пространство отображений X в E, *являющихся слабо непрерывными и скалярно финитными*; ясно, что $\widetilde{\mathscr{K}}(X; E) \supset \mathscr{K}(X; E)$, однако два пространства могут не совпадать (см. ниже пример 2); в случае конечномерного E они совпадают.

Отметим, что в определении слабо непрерывной функции (соответственно скалярно финитной функции) топология пространства E участвует лишь посредством сопряженного к E пространства E'; значит, множество этих функций не должно заменяться при замене топологии пространства E любой локально выпуклой топологией, для которой сопряженное пространство остается тем же.

Заметим, что если E и F — два пространства в двойственности, то это равносильно тому, что отображение X в E *непрерывно* в топологии $\sigma(E, F)$, или что оно *слабо непрерывно*.

Пусть f — отображение X в E, слабо непрерывное и скалярно финитное, и пусть μ — мера на X; для любого $z' \in E'$ имеем $z' \circ f \in \mathscr{K}(X)$; положим

$$\varphi(z') = \int \langle f(x), z' \rangle \, d\mu(x) = \mu(z' \circ f).$$

Ясно, что φ есть линейная форма на E', а стало быть, *элемент из* E'^*.

Определение 1. *Для любой функции* $f \in \widetilde{\mathscr{K}}(X; E)$ *интегралом от* f *относительно* μ *называется, и обозначается* $\int f \, d\mu$, *или* $\int f(x) \, d\mu(x)$, *или* $\int f \mu$, *или* $\int f(x) \, \mu(x)$, *элемент из* E'^*, *определяемый формулой*

$$\left\langle \int f \, d\mu, z' \right\rangle = \int \langle f, z' \rangle \, d\mu \text{ для любого } z' \in E'. \qquad (1)$$

Отметим, что в случае *отделимого* пространства E *не обязательно* $\int f\,d\mu \in E$, даже когда $f \in \mathscr{K}(X; E)$ (упр. 1; ср. п. 3).

Примеры. 1) Предположим, что E — *конечномерное* пространство над $\mathbf{C}$ и что оно отделимо, так что если $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ — базис в E, то отображение

$$(\xi_1, \ldots, \xi_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i$$

есть изоморфизм пространства $\mathbf{C}^n$ на E. Тогда, как известно, всякая линейная форма на E непрерывна, или, иными словами, E' идентично алгебраическому сопряженному E^* пространства E, а E'^* канонически отождествляется с E. Пусть $(e'_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ — базис в E', двойственный к базису (e_i); для того чтобы отображение f пространства X в пространство E было слабо непрерывно и скалярно финитно, необходимо и достаточно, чтобы функции $f_i = e'_i \circ f$ были непрерывны и имели компактный носитель; тогда $f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)\, e_i$ для любого $x \in X$, и

$$\int f\,d\mu = \sum_{i=1}^{n} \mu(f_i)\, e_i.$$

2) Возьмем в качестве E пространство $\mathscr{M}(X; \mathbf{C})$ мер на X, наделенное *широкой* топологией (§ 1, п. 9); тогда сопряженное к E пространство E' канонически отождествляется с пространством $\mathscr{K}(X; \mathbf{C})$ (Топ. вект. пр-ва, гл. I (2-е изд.), § 6, п. 2, предл. 3). Отображение $x \mapsto \varepsilon_x$ пространства X в E *непрерывно* (§ 1, п. 9, предл. 13), но его носитель не компактен, если X не компактно; однако оно *скалярно финитно*, ибо для любой функции $f \in E'$ функция $x \mapsto \langle \varepsilon_x, f\rangle = f(x)$ по определению имеет компактный носитель. Кроме того, имеем

$$\int \langle \varepsilon_x, f\rangle\, d\mu = \int f(x)\, d\mu(x) = \langle \mu, f\rangle$$

для любой функции $f \in \mathscr{K}(X; \mathbf{C}) = E'$, чем доказано, что

$$\int \varepsilon_x\, d\mu(x) = \mu$$

для любой меры μ на X.

3) Если E отделимо, то для любой точки $y \in X$ и любой функции $f \in \widetilde{\mathscr{K}}(X; E)$ имеем

$$\int f \, d\varepsilon_y = f(y),$$

так как $\int \langle f, z' \rangle \, d\varepsilon_y = \langle f(y), z' \rangle$ по определению.

Замечания. 1) Если E — локально выпуклое пространство и N — замыкание $\{0\}$ в E, так что $E_1 = E/N$ — ассоциированное с E отделимое локально выпуклое пространство, то, как известно, сопряженные пространства E' и E'_1 совпадают; для того чтобы функция f принадлежала $\widetilde{\mathscr{K}}(X; E)$, необходимо и достаточно, чтобы $f_1 = \pi \circ f$ (где $\pi\colon E \to E_1$ — канонический гомоморфизм) принадлежала $\widetilde{\mathscr{K}}(X; E_1)$, и тогда $\int f \, d\mu = \int f_1 \, d\mu$. Можно, следовательно, ограничиться рассмотрением только *отделимых* локально выпуклых пространств.

2) Пусть E — локально выпуклое пространство *над* **C** и пусть E_0 — локально выпуклое пространство *над* **R**, базисное для E; мы знаем, что отображение $z' \mapsto \operatorname{Re} z'$, которое каждой (комплексной) непрерывной линейной форме z' на E ставит в соответствие (действительную) непрерывную линейную форму $z \mapsto \operatorname{Re} \langle z, z' \rangle$ на E_0, есть R-изоморфизм сопряженного пространства E' на сопряженное к E_0 пространство E'_0 (Топ. вект. пр-ва, гл. II (2-е изд.), § 8, п. 1). Точно так же, алгебраическое сопряженное E'^*_0 действительного векторного пространства E'_0 канонически отождествляется с действительным пространством, базисным для алгебраического сопряженного E'^* пространства E'. Отсюда следует, что если μ — *действительная мера*, а f — отображение из $\widetilde{\mathscr{K}}(X; E)$, то формула (1) по-прежнему верна, если рассматривать f как отображение, принимающее значения в E_0, и канонические билинейные формы, фигурирующие в обеих частях равенства, относить соответственно к двойственности между E'_0 и E'^* в левой части и к двойственности между E_0 и E'_0 в правой.

2. *Свойства векторного интеграла*

Предложение 1. *Отображение*

$$(f, \mu) \mapsto \int f \, d\mu$$

произведения $\widetilde{\mathscr{K}}(X; E) \times \mathscr{M}(X; \mathbf{C})$ *в* E'^* *билинейно.*

Предложение следует непосредственно из определения 1, п. 1.

Пусть u — непрерывное линейное отображение пространства E в локально выпуклое пространство F; известно, что *транс-*

понированное отображение ${}^t u$ есть линейное отображение сопряженного к F пространства F' в сопряженное к E пространство E'; мы будем обозначать через ${}^{tt}u$ отображение $E'^* \to F'^*$, транспонированное к ${}^t u$ (в алгебраическом смысле); если E и F отделимы и канонически отождествляются соответственно с подпространствами пространств E'^* и F'^*, то ${}^{tt}u$ *продолжает* отображение u. В этих обозначениях справедливо

Предложение 2. *Пусть u — непрерывное линейное отображение пространства E в локально выпуклое пространство F; для любой функции $f \in \widetilde{\mathscr{K}}(X; E)$ функция $u \circ f$ принадлежит $\widetilde{\mathscr{K}}(X; F)$ и*

$$\int u(f(x))\, d\mu(x) = {}^{tt}u\left(\int f(x)\, d\mu(x)\right). \tag{2}$$

Для любой непрерывной линейной формы $z' \in F'$ имеем $z' \circ u \circ f = y' \circ f$, если положить $y' = z' \circ u = {}^t u(z') \in E'$, откуда следует первое утверждение; кроме того, для любого $z' \in F'$ имеем

$$\left\langle \int (u \circ f)\, d\mu, z' \right\rangle = \int \langle u \circ f, z' \rangle\, d\mu =$$

$$= \int \langle f, {}^t u(z') \rangle\, d\mu = \left\langle \int f\, d\mu, {}^t u(z') \right\rangle = \left\langle {}^{tt}u\left(\int f\, d\mu\right), z' \right\rangle,$$

откуда и получаем формулу (2).

Предложение 3. *Для любой функции $g \in \mathscr{C}(X; \mathbf{C})$ и любой функции $f \in \widetilde{\mathscr{K}}(X; E)$ функция gf принадлежит $\widetilde{\mathscr{K}}(X; E)$ и*

$$\int f\, d(g \cdot \mu) = \int f g\, d\mu. \tag{3}$$

В самом деле, для любого $z' \in E'$ имеем $\langle gf, z' \rangle = g \langle f, z' \rangle$, откуда следует первое утверждение; кроме того,

$$\left\langle \int f d(g \cdot \mu), z' \right\rangle = \int \langle f, z' \rangle\, d(g \cdot \mu) = \int g \langle f, z' \rangle\, d\mu =$$

$$= \int \langle gf, z' \rangle\, d\mu = \left\langle \int gf\, d\mu, z' \right\rangle,$$

откуда получаем (3).

Предложение 4. *Пусть μ — положительная мера на X, S — ее носитель и f — функция из $\widetilde{\mathscr{K}}(X; E)$. Предположим, что E отделимо и что пространство E'^* наделено слабой топологией $\sigma(E'^*, E')$. Тогда:*

(i) *Интеграл* $\int f\,d\mu$ *принадлежит замыканию* C *в* E'^* *выпуклого конуса, порожденного* $f(S)$.

(ii) *Если* μ *ограничена, то интеграл* $\int f\,d\mu$ *принадлежит множеству* $\|\mu\|\cdot D$, *где* D *— замкнутая выпуклая оболочка множества* $f(S)$ *в* E'^*.

Если E комплексно, то мы наделяем его своей структурой *действительного* векторного базисного пространства, что, как мы видели, не меняет формулы (1).

(i) Известно, что C есть пересечение замкнутых полупространств в E'^*, содержащих $f(S)$ и определенных при помощи замкнутых гиперплоскостей, проходящих через 0; значит, достаточно доказать, что для $z' \in E'$ соотношение $\langle f(x), z'\rangle \geqslant 0$ при любом $x \in S$ влечет

$$\left\langle \int f\,d\mu,\ z' \right\rangle \geqslant 0;$$

но поскольку

$$\left\langle \int f\,d\mu,\ z' \right\rangle = \int \langle f,\ z'\rangle\,d\mu,$$

то это вытекает из следствия 2 предложения 8, § 2, п. 3.

(ii) Известно, что D есть пересечение замкнутых полупространств в E'^*, содержащих $f(S)$; стало быть, достаточно доказать, что для $z' \in E'$ соотношение $\langle f(x), z'\rangle \leqslant a$ при любом $x \in S$ влечет

$$\left\langle \int f\,d\mu,\ z' \right\rangle \leqslant a\|\mu\|;$$

но это вытекает из следствия 3 предложения 8, § 2, п. 3.

Следствие. *Пусть* μ *— положительная мера на* X, f *— отображение, принадлежащее* $\mathscr{K}(X; E)$, *и* D *— замкнутая выпуклая оболочка множества* $f(X)$ *в* E'^*. *Тогда существует такое число* $a > 0$, *что* $\int f\,d\mu \in a\cdot D$.

Если ν *— произвольная мера на* X, *то существуют такие числа* $a_1, a_2, a_3, a_4 > 0$, *что*

$$\int f\,d\nu \in a_1 D - a_2 D + ia_3 D - ia_4 D.$$

Предположим вначале, что μ положительна; по условию, носитель K функции f компактен; если ν — сужение μ на откры-

тую относительно компактную окрестность множества K, то ν ограничена и $\int f\,d\mu = \int f\,d\nu \in \| \nu \| \cdot D$, в силу предложения 4, (ii). Второе утверждение вытекает из первого, поскольку произвольную комплексную меру можно представить в виде $\mu_1 - \mu_2 + i\mu_3 - i\mu_4$, где μ_j положительны.

Предложение 5. *Пусть пространство X компактно и пусть f — непрерывное отображение X в отделимое локально выпуклое пространство E. Тогда замкнутая выпуклая оболочка множества $f(X)$ в E'^* (относительно топологии $\sigma(E'^*, E')$) равна множеству векторов $\int f\,d\mu$ относительно всех положительных мер μ массы 1 на X.*

Пусть C — замкнутая выпуклая оболочка множества $f(X)$ в E'^*; поскольку $f(X)$ компактно и E'^* *полно*, множество C компактно. Как мы уже знаем (предл. 4), $\int f\,d\mu \in C$ для любой меры μ, принадлежащей выпуклому множеству H положительных мер на X с полной массой, равной 1. С другой стороны, H выпукло и *компактно* в широкой топологии (§ 1, п. 9, следствие 3 из предл. 15) и является замыканием (в этой топологии) выпуклого множества H_0 положительных мер массы 1 с *конечным* носителем (§ 2, п. 5, следствие 3 из теоремы 1). Но образ H_0 при отображении $\mu \mapsto \int f\,d\mu$ есть выпуклая оболочка C_0 множества $f(X)$ в E'^*. С другой стороны, это отображение непрерывно в широкой топологии в $\mathscr{M}(X; C)$ и в топологии $\sigma(E'^*, E')$ в E'^*, так как $\left\langle \int f\,d\mu, z' \right\rangle = \int \langle f, z' \rangle\,d\mu$ по определению; значит, образ множества $H = \overline{H}_0$ есть *компактное* выпуклое множество, содержащее C_0 и содержащееся в C; а поскольку $C = \overline{C}_0$, то этот образ равен C.

Предложение 6. *Для любого непрерывного отображения f с компактным носителем, отображающего X в отделимое локально выпуклое пространство E, любой непрерывной полунормы q на E и любой меры μ на X, удовлетворяющей условию $\int f\,d\mu \in E$, имеем*

$$q\left(\int f\,d\mu\right) \leqslant \int (q \circ f)\,d\,|\mu|. \qquad (4)$$

Пусть D — множество тех $z \in E$, для которых $q(z) \leqslant 1$; D замкнуто, выпукло и содержит 0, а значит, $D = D^{00}$ (Топ. вект. пр-ва, гл. IV, § 2, п. 3, следствие 2 из предл. 4). Следовательно, достаточно доказать, что для любого $z' \in D^0$

$$\left|\left\langle \int f\,d\mu, z' \right\rangle\right| \leqslant \int (q \circ f)\, d\,|\,\mu\,|;$$

а поскольку

$$\left\langle \int f\,d\mu, z' \right\rangle = \int \langle f, z' \rangle\, d\mu$$

и, по определению D^0, для любого $x \in X$

$$|\,\langle f(x), z' \rangle\,| \leqslant q(f(x)),$$

то утверждение следует из неравенства (13), § 1, п. 6.

3. *Критерии принадлежности интеграла пространству E*

Предложение 7. *Пусть E — отделимое локально выпуклое пространство и $f \in \mathscr{K}(X; E)$. Если $f(X)$ содержится в полном выпуклом подмножестве A пространства E, то* $\int f\,d\mu \in E$.

Пусть K — носитель отображения f; по условию, он компактен. Отображение f обращается в нуль на $X - K$; поэтому множество $f(X)$ равно $f(K)$ или $f(K) \cup \{0\}$, и значит, компактно в силу того, что f непрерывно, а E отделимо; тогда замкнутая выпуклая оболочка C множества $f(X)$ в E предкомпактна (относительно равномерной структуры, индуцированной структурой из E) (Топ. вект. пр-ва, гл. II (2-е изд.), § 4, п. 1, предл. 3). Но C есть замкнутое подмножество полного пространства A; поэтому C полно, а значит, компактно; и тем более, C компактно в ослабленной топологии $\sigma(E, E')$; но поскольку последняя индуцирована топологией $\sigma(E'^*, E')$, то C является замкнутой выпуклой оболочкой множества $f(X)$ в E'^* относительно топологии $\sigma(E'^*, E')$; стало быть, при помощи следствия из предложения 4, п. 2 получаем требуемое.

Следствие 1. *Пусть E — отделимое локально выпуклое пространство; для любой функции $f \in \mathscr{K}(X; E)$ интеграл* $\int f\,d\mu$ *принадлежит пополнению $\hat{E}$ пространства E.*

Поскольку сопряженные к E и $\hat{E}$ пространства совпадают, достаточно применить предложение 6, считая, что f принимает значения в $\hat{E}$.

Следствие 2. *Если E — отделимое квазиполное локально выпуклое пространство, то $\int f\,d\mu \in E$ для любой функции $f \in \mathscr{K}(X; E)$.*

Как уже было замечено в начале доказательства предложения 7, множество $f(X)$ компактно и его замкнутая выпуклая оболочка C в E предкомпактна, и значит, ограничена; но поскольку множество C замкнуто и ограничено, то оно, в силу сделанного предложения относительно E, полно и, стало быть, достаточно применить предложение 7.

В главе VI, § 1, п. 2 мы приведем другие критерии того, чтобы $\int f\,d\mu$ принадлежал E, — критерии, которые применимы, в частности, к функциям из $\tilde{\mathscr{K}}(X; E)$, а не только к функциям из $\mathscr{K}(X; E)$.

Следствие 2 из предложения 7 применимо в следующих двух случаях: 1° E — *банахово пространство*; 2° E — сопряженное к отделимому локально выпуклому *бочечному* пространству G, и E наделено $\mathfrak{S}$-топологией, где $\mathfrak{S}$ — некоторое покрытие G ограниченными подмножествами (Топ. вект. пр-ва, гл. III, § 3, п. 7, следствие 2 из теоремы 4). Например, можно применить следствие 2 из предложения 7 в том случае, когда E является слабым сопряженным банахова пространства или пространством мер $\mathscr{M}(Y; C)$, наделенным широкой топологией.

Если $X = \mathbf{R}$, μ — мера Лебега на $\mathbf{R}$ и E — *банахово пространство*, то интеграл $\int f\,d\mu$ от функции из $\mathscr{K}(X; E)$ есть не что иное, как интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx,$$

определявшийся в Функциях действ. перем., гл. II, § 3, п. 1. Это следует из формулы (10), там же.

4. Свойства непрерывности интеграла

Предложение 8. *Пусть E — отделимое пространство и μ — мера на X. Отображение $f \mapsto \int f\,d\mu$ пространства $\mathscr{K}(X; E)$ в $\hat{E}$* (п. 3, следствие 1 из предл. 7) *есть единственное непрерывное линейное отображение Φ, обладающее тем свойством, что $\Phi(g \cdot a) = \mu(g) \cdot a$ для любого вектора $a \in E$ и любой функции $g \in \mathscr{K}(X; \mathbf{C})$.*

Для доказательства непрерывности отображения $f \mapsto \int f\,d\mu$ достаточно показать, что его сужение на $\mathscr{K}(X, K; E)$ непрерывно для любого компактного подмножества K из X (Топ. вект. пр-ва, гл. II (2-е изд.), § 4, п. 4, предл. 5). Отметим, что если топология пространства E определяется семейством полунорм (q_α), то топология пространства $\mathscr{K}(X, K; E)$ определяется семейством полунорм

$$p_\alpha(f) = \sup_{x \in K} q_\alpha(f(x)).$$

Итак, пусть h — непрерывное отображение X в $[0, 1]$, имеющее компактный носитель и такое, что $h(x) = 1$ на K; в силу предложения 6, п. 2, для любой функции $f \in \mathscr{K}(X, K; E)$ имеем

$$q_\alpha\left(\int f\,d\mu\right) = q_\alpha\left(\int hf\,d\mu\right) \leqslant$$

$$\leqslant \int h(x)\, q_\alpha(f(x))\, d\,|\mu|(x) \leqslant |\mu|(h) \cdot p_\alpha(f)$$

(полунормы q_α продолжаются по непрерывности на $\hat{E}$), что доказывает непрерывность отображения $f \mapsto \int f\,d\mu$. С другой стороны, в обозначениях предложения

$$\int (g(x) \cdot a)\,d\mu = \mu(g) \cdot a$$

в силу примера 1, п. 1, и предложения 2, п. 2, примененного к канонической инъекции $\mathbf{C} \cdot a \to E$. Кроме того, подпространство пространства $\mathscr{K}(X; E)$, состоящее из линейных комбинаций $\sum_i g_i \cdot a_i$, где $a_i \in E$, $g_i \in \mathscr{K}(X; \mathbf{C})$, плотно в $\mathscr{K}(X; E)$ (§ 1, п. 2, предл. 5), чем и завершается доказательство предложения.

Предложение 9. *Пусть E отделимо и пусть непрерывное отображение f пространства X в E имеет компактный носитель. Если пространство $\mathscr{M}(X; \mathbf{C})$ наделено топологией строго компактной сходимости* (§ 1, п. 10), *то отображение $\mu \mapsto \int f\,d\mu$ пространства $\mathscr{M}(X; \mathbf{C})$ в $\hat{E}$ является единственным непрерывным линейным отображением Ψ, удовлетворяющим условию $\Psi(\varepsilon_x) = f(x)$ для любого $x \in X$.*

Для любого $z' \in E'$ имеем

$$\left\langle \int f\,d\varepsilon_x,\ z' \right\rangle = \int (z' \circ f)\,d\varepsilon_x = z'(f(x)) = \langle f(x),\ z' \rangle,$$

откуда $\int f\,d\varepsilon_x = f(x)$. Но мы знаем, что множество точечных мер плотно в $\mathscr{M}(X; \mathbf{C})$ относительно топологии строго компактной сходимости (§ 2, п. 4, следствие 4 из теоремы 1). Таким образом, все сводится к доказательству непрерывности линейного отображения u: $\mu \mapsto \int f\,d\mu$. Чтобы это доказать, рассмотрим линейное отображение v: $z' \mapsto \langle f, z' \rangle$ пространства E' в $\mathscr{K}(X; \mathbf{C})$ и покажем, что образ при отображении v *равностепенно непрерывного* подмножества H из E' содержится в *строго компактном* подмножестве из $\mathscr{K}(X; \mathbf{C})$. В самом деле, если K — носитель f, то носители функций $\langle f, z' \rangle$ для $z' \in H$ принадлежат K; с другой стороны, эти функции образуют равностепенно непрерывное множество и для любого $x \in X$ множество элементов $z'(f(x))$ ограничено; стало быть, наше утверждение вытекает из теоремы Асколи (Общая топ., гл. X (2-е изд.), § 2, п. 5, следствие 3 из теоремы 2). Из формулы (1), п. 1 теперь выводим, что u есть не что иное, как сужение на $\mathscr{M}(X; \mathbf{C})$ *транспонированного* отображения ${}^t v$ (в алгебраическом смысле); его непрерывность следует, таким образом, из изложенного ранее (Топ. вект. пр-ва, гл. IV (2-е изд.)).

Следствие. *В предположениях и обозначениях предложения* 9 *сужение отображения $\mu \mapsto \int f\,d\mu$ на множество $\mathscr{M}_+(X)$ положительных мер или на широко ограниченное подмножество B из $\mathscr{M}(X; \mathbf{C})$ широко непрерывно.*

В самом деле, из предложений 17 и 18, § 1, п. 10 вытекает, что топология, индуцированная в $\mathscr{M}_+(X)$ или в B топологией строго

компактной сходимости, будет та же, что и топология, индуцированная широкой топологией.

Напротив, отображение $\mu \longmapsto \int f\,d\mu$ может не быть непрерывным на всем пространстве $\mathscr{M}(X; \mathbf{C})$ относительно широкой топологии (упр. 2).

Упражнения

1) Пусть E — гильбертово пространство с ортонормированным счетным базисом (e_n) (Топ. вект. пр-ва, гл. V, § 2, п. 3), E_0 — всюду плотное его подпространство, состоящее из линейных комбинаций конечного числа векторов e_n. Пусть далее X — компактное подпространство из $\mathbf{R}$, состоящее из 0 и из точек $1/n$ (n — натуральное); и пусть μ — положительная мера на X, определенная посредством массы $1/n^2$ в каждой точке $1/n$ и массы 0 в точке 0 (§ 1, п. 3, пример 1). Рассмотрим непрерывное отображение f пространства X в E_0, определенное как $f(0) = 0, f(1/n) = e_n/n$ для $n \geqslant 1$; показать, что интеграл $\int f\,d\mu$ не принадлежит E_0.

2) Пусть пространства X и E и отображение f определены, как в упражнении 1; показать, что отображение $\lambda \longmapsto \lambda(f)$ пространства $\mathscr{M}(X; \mathbf{C})$ в E не является непрерывным в широкой топологии. (Показать, что если g_k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ — непрерывные скалярные функции на пространстве X, то на X существует такая дискретная мера λ, что $\int g_k\,d\lambda = 0$ для $1 \leqslant k \leqslant n$, но $\| \int f\,d\lambda \|$ сколь угодно велика.)

3) a) Пусть E — квазиполное отделимое локально выпуклое пространство. Показать, что если $\mathscr{M}(X; \mathbf{C})$ наделено квазисильной топологией (§ 1, упр. 8) (соотв. топологией строго компактной сходимости), то отображение $(f, \mu) \longmapsto \int f\,d\mu$ $(\mathfrak{S}, \mathfrak{T})$-гипонепрерывно, где $\mathfrak{T}$ есть множество широко ограниченных подмножеств из $\mathscr{M}(X; \mathbf{C})$, а $\mathfrak{S}$ — множество ограниченных (соответственно компактных) подмножеств из $\mathscr{K}(X; E)$, содержащихся в $\mathscr{K}(X, K; E)$, для надлежащим образом выбранного компактного множества K.

b) Показать, что для любого компактного подмножества K из X отображение $(f, \mu) \longmapsto \int f\,d\mu$ непрерывно на $\mathscr{K}(X, K; E) \times \mathscr{M}(X; \mathbf{C})$, если наделить $\mathscr{M}(X; \mathbf{C})$ квазисильной топологией, и непрерывно из $\mathscr{K}(X, K; E) \times \mathscr{M}_+(X; \mathbf{C})$, если наделить $\mathscr{M}(X; \mathbf{C})$ широкой топологией.

4) Доказать следствие из предложения 4, п. 2, используя предложение 8 из п. 4 (свести к случаю, когда E квазиполно, и воспользоваться также следствием 3 из предложения 15 § 1, п. 9).

§ 4. Произведения мер

1. Произведение двух мер

ТЕОРЕМА 1. *Пусть X, Y — локально компактные пространства, λ — мера на X, μ — мера на Y; существует, и притом единственная, такая мера ν на $X \times Y$, что для любой функции $g \in \mathscr{K}(X; \mathbf{C})$ и любой функции $h \in \mathscr{K}(Y; \mathbf{C})$*

$$\int g(x)\, h(y)\, d\nu(x, y) = \left(\int g(x)\, d\lambda(x)\right)\left(\int h(y)\, d\mu(y)\right). \quad (1)$$

ЛЕММА 1. *Пусть X, Y — локально компактные пространства и K (соотв. L) — компактное подмножество из X* (соотв. Y).

(i) *Сужение на $\mathscr{K}(X \times Y, K \times L; \mathbf{C})$ канонической биекции ω: $\mathscr{F}(X \times Y; \mathbf{C}) \to \mathscr{F}(X; \mathscr{F}(Y; \mathbf{C}))$* (Теория множеств, § 4, п. 14) *есть изометрия банахова пространства $\mathscr{K}(X \times Y, K \times L; \mathbf{C})$ на банахово пространство $\mathscr{K}(X, K; \mathscr{K}(Y, L; \mathbf{C}))$.*

(ii) *Векторное пространство $\mathscr{K}(X, K; \mathbf{C}) \otimes_{\mathbf{C}} \mathscr{K}(Y, L; \mathbf{C})$, канонически отождествленное с подпространством из $\mathscr{K}(X \times Y, K \times L; \mathbf{C})$* (Алгебра, гл. II (3-е изд.), § 7, п. 7, комментарии после следствия из предл. 15), *плотно в этом банаховом пространстве.*

Ясно, что образ при отображении ω пространства $\mathscr{K}(X \times Y, K \times L; \mathbf{C})$ содержится в $\mathscr{K}(X, K; \mathscr{K}(Y, L; \mathbf{C}))$. Обратно, если u — непрерывное отображение X в $\mathscr{K}(Y, L; \mathbf{C})$, с носителем в K, то отображение $(x, y) \mapsto u(x)(y)$ пространства $X \times Y$ в $\mathbf{C}$ непрерывно и его носитель содержится в $K \times L$; значит, сужение отображения ω на $\mathscr{K}(X \times Y, K \times L; \mathbf{C})$ есть биекция этого пространства на $\mathscr{K}(X, K; \mathscr{K}(Y, L; \mathbf{C}))$; тот факт, что это сужение является изометрией банахова пространства, вытекает из соотношения

$$\sup_{(x, y) \in K \times L} |f(x, y)| = \sup_{x \in K} \left(\sup_{y \in L} |f(x, y)|\right).$$

Тем самым (i) доказано; с другой стороны, образ при отображении ω пространства

$$\mathscr{K}(X, K; \mathbf{C}) \otimes_{\mathbf{C}} \mathscr{K}(Y, L; \mathbf{C}),$$

отождествленный с некоторым подпространством пространства $\mathscr{K}(X \times Y, K \times L; \mathbf{C})$, есть пространство $\mathscr{K}(X, K; \mathbf{C}) \otimes_{\mathbf{C}}$

$\otimes_{\mathbf{C}} \mathscr{K}(Y, L; \mathbf{C})$, канонически отождествленное теперь с пространством отображений X в $\mathscr{K}(Y, L; \mathbf{C})$ (Алгебра, гл. II (3-е изд.) § 7, п. 7, следствие из предл. 15); но мы знаем, что это подпространство пространства $\mathscr{K}(X, K; \mathscr{K}(Y, L; \mathbf{C}))$ *плотно* в последнем (§ 1, п. 2, предл. 5), и значит, утверждение (ii) следует из того, что сужение отображения ω есть топологический изоморфизм, и лемма доказана.

Отметим теперь, что любое компактное подмножество из $X \times Y$ содержится в произведении $K \times L$, где K (соотв. L) есть некоторое компактное подмножество из X (соотв. Y). Стало быть, из леммы 1 (ii) вытекает, что подпространство $\mathscr{K}(X; \mathbf{C}) \otimes_{\mathbf{C}} \mathscr{K}(Y; \mathbf{C})$ *плотно* в $\mathscr{K}(X \times Y; \mathbf{C})$; а поскольку соотношение (1) записывается так же в виде $\nu(g \otimes h) = \lambda(g)\,\mu(h)$ для $g \in \mathscr{K}(X; \mathbf{C})$, $h \in \mathscr{K}(Y; \mathbf{C})$, то из этого сразу же следует *единственность* ν. Для доказательства существования ν мы воспользуемся следующей леммой.

Лемма 2. *В обозначениях леммы* 1, *для любой функции* $f \in \mathscr{K}(X \times Y, K \times L; \mathbf{C})$ *функция*

$$y \mapsto h(y) = \int f(x, y)\, d\lambda(x) \tag{2}$$

принадлежит $\mathscr{K}(Y, L; \mathbf{C})$.

В самом деле, для любой функции $u \in \mathscr{K}(X; \mathscr{K}(Y, L; \mathbf{C}))$ интеграл $\int u(x)\, d\lambda(x)$ принадлежит пространству $\mathscr{K}(Y, L; \mathbf{C})$, ибо последнее есть банахово пространство (§ 3, п. 3, следствие 1 из предложения 7); но для $u = \omega(f)$ и для любого $y \in Y$ имеем

$$\left\langle \int u(x)\, d\lambda(x),\ \varepsilon_y \right\rangle = \int u(x)(y)\, d\lambda(x) = \int f(x, y)\, d\lambda(x).$$

откуда и следует лемма.

Рассмотрим теперь для любой функции $f \in \mathscr{K}(X \times Y; \mathbf{C})$ число $\nu(f) = \mu\left(\int f(x, y)\, d\lambda(x)\right)$ (которое мы, допуская вольность, обозначаем $\int d\mu(y) \int f(x, y)\, d\lambda(x)$); если K (соотв. L) есть компактное подмножество из X (соотв. Y), то найдется такое число a_K (соответственно b_L), что для любой функции $g \in \mathscr{K}(X, K; \mathbf{C})$ (соответственно $h \in \mathscr{K}(Y, L; \mathbf{C})$) справедливо неравенство $|\lambda(g)| \leqslant a_K \|g\|$ (соотв. $|\mu(h)| \leqslant b_L \|h\|$). Отсюда

следует, что для любой функции $f \in \mathscr{K}(X \times Y, K \times L; \mathbf{C})$

$$\left| \int f(x, y)\, d\lambda(x) \right| \leqslant a_K \| f \|$$

для любого $y \in Y$, и далее, $|\nu(f)| \leqslant a_K b_L \| f \|$. Стало быть, линейная форма ν на $\mathscr{K}(X \times Y; \mathbf{C})$ есть *мера* на $X \times Y$ и, очевидно, удовлетворяет (1), чем и завершается доказательство теоремы 1.

Определение 1. *Пусть заданы меры λ и μ, определенные соответственно на локально компактных пространствах X и Y; мерой-произведением меры λ на меру μ — называется единственная мера ν на $X \times Y$, удовлетворяющая соотношению* (1) *для любой функции $g \in \mathscr{K}(X; \mathbf{C})$ и любой функции $h \in \mathscr{K}(Y; \mathbf{C})$.*

В доказательстве теоремы 1 можно переставить местами пространства X и Y; канонически отождествляя $Y \times X$ и $X \times Y$, мы определим, таким образом, на $X \times Y$ меру

$$f \mapsto \int d\lambda(x) \int f(x, y)\, d\mu(y),$$

которая снова удовлетворяет условию (1). Стало быть, доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть λ, μ — меры, определенные соответственно на локально компактных пространствах X, Y. Для любой функции $f \in \mathscr{K}(X \times Y; \mathbf{C})$ интеграл от f относительно меры-произведения ν меры λ на меру μ имеет своим значением*

$$\int f(x, y)\, d\nu(x, y) = \int d\lambda(x) \int f(x, y)\, d\mu(y) =$$

$$= \int d\mu(y) \int f(x, y)\, d\lambda(x). \qquad (3)$$

В силу последней формулы интеграл от f относительно меры-произведения ν обозначается чаще всего $\int\int f\, d\lambda\, d\mu$, а также $\int\int f \lambda\mu$, $\int f \mu\lambda$, $\int\int f(x, y)\, d\lambda(x)\, d\mu(y)$, $\int\int\int f(x, y)\, d\mu(y)\, d\lambda(x)$, $\int\int f(x, y)\, \lambda(x)\, \mu(y)$, $\int\int f(x, y)\, \mu(y)\, \lambda(x)$; говорят, что это есть *двойной* интеграл от f относительно λ и μ. В этих обозначениях формула (3) записывается в виде

$$\int\int f(x, y)\, d\lambda(x)\, d\mu(y) = \int d\lambda(x) \int f(x, y)\, d\mu(y) =$$

$$= \int d\mu(y) \int f(x, y)\, d\lambda(x). \qquad (4)$$

Формула (3) показывает, что если λ и μ — действительные (соотв. положительные) меры, то мера-произведение ν действительна (соотв. положительна).

Примеры. 1) Мера-произведение мер Дирака ε_x ($x \in X$) и ε_y ($y \in Y$) есть мера Дирака $\varepsilon_{(x,\ y)}$.

2) Возьмем $X = Y = \mathbf{R}$, а в качестве λ и μ — *меры Лебега* на $\mathbf{R}$ (§ 1, п. 3); их произведение называется *мерой Лебега* на $\mathbf{R}^2$; интеграл от функции $f \in \mathscr{K}(\mathbf{R}^2; \mathbf{C})$ относительно этой меры обозначается $\int\int f(x, y)\, dx\, dy$ или $\int\int f(x, y)\, dydx$; формула (4) для функции, обращающейся в нуль вне некоторого компактного прямоугольника $[a, b] \times [c, d]$, влечет формулу

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x, y)\, dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\, dy,$$

(см. Функции действ. перем., гл. II, § 3, п. 6).

Поскольку мера Лебега на $\mathbf{R}$ инвариантна относительно любого сдвига (§ 1, п. 3), то отсюда сразу же следует, что мера Лебега на $\mathbf{R}^2$ *инвариантна относительно любого сдвига плоскости* $\mathbf{R}^2$.

Замечание. Пусть E — отделимое локально выпуклое пространство и пусть f — такое отображение пространства $\mathscr{K}(X \times Y; E)$, что $f(X \times Y)$ содержится в *полном выпуклом* подмножестве C пространства E. Тогда для любого $y \in Y$ интеграл $\boldsymbol{h}(y) = \int f(x, y)\, d\lambda(x)$ принадлежит E (§ 3, п. 3, предл. 7); кроме того, функция $\boldsymbol{h}$ принадлежит $\widetilde{\mathscr{K}}(Y; E)$; в самом деле, для любого $z' \in E'$ имеем

$$\langle \boldsymbol{h}(y), z' \rangle = \int \langle f(x, y), z' \rangle\, d\lambda(x),$$

и значит, в силу леммы 2, $y \mapsto \langle \boldsymbol{h}(y), z' \rangle$ принадлежит $\mathscr{K}(Y; \mathbf{C})$. Стало быть, интеграл $\int \boldsymbol{h}\, d\mu$ определен (и априори принадлежит E'*); покажем, что

$$\int\int f(x, y)\, d\lambda(x)\, d\mu(y) = \int d\mu(y) \int f(x, y)\, d\lambda(x) = \int d\lambda(x) \int f(x, y)\, d\mu(y), \qquad (5)$$

обобщив тем самым формулу (4). Действительно, для любого $z' \in E'$ в силу (4) имеем

$$\left\langle \int\int f\, d\lambda\, d\mu, z' \right\rangle = \int\int \langle f, z' \rangle\, d\lambda\, d\mu = \int d\mu \int \langle f, z' \rangle\, d\lambda =$$
$$= \int \left\langle \int f\, d\lambda, z' \right\rangle d\mu = \left\langle \int d\mu \int f\, d\lambda, z' \right\rangle,$$

откуда следует формула (5).

2. *Свойства мер-произведений*

Если мера λ (соотв. μ) есть мера на пространстве X (соотв. на Y) и ν есть мера-произведение λ на μ, то сужение ν на $\mathscr{K}(X; \mathbf{C}) \otimes_{\mathbf{C}} \otimes_{\mathbf{C}} \mathscr{K}(Y; \mathbf{C})$ есть не что иное, как *тензорное произведение* $\lambda \otimes \mu$ двух линейных форм λ и μ (Алгебра, гл. II, (3-е изд.), § 3, п. 2), поскольку соотношение (1) из п. 1 записывается в виде $\langle g \otimes h, \nu \rangle = \langle g, \lambda \rangle \langle h, \mu \rangle = \langle g \otimes h, \lambda \otimes \mu \rangle$, каковы бы ни были $g \in \mathscr{K}(X; \mathbf{C})$ и $h \in \mathscr{K}(Y; \mathbf{C})$. Допуская некоторую вольность, мы будем обозначать через $\lambda \otimes \mu$ меру-произведение ν (а не только ее сужение на всюду плотное подпространство $\mathscr{K}(X; \mathbf{C}) \otimes_{\mathbf{C}} \otimes_{\mathbf{C}} \mathscr{K}(Y; \mathbf{C})$ пространства $\mathscr{K}(X \otimes Y; \mathbf{C})$).

Отображение $(\lambda, \mu) \mapsto \lambda \otimes \mu$ пространства $\mathscr{M}(X; \mathbf{C}) \times \mathscr{M}(Y; \mathbf{C})$ в $\mathscr{M}(X \times Y; \mathbf{C})$, очевидно, билинейно, в силу формулы (3), п. 1.

Предложение 1. *Пусть λ — мера на X, μ — мера на Y; если $g \in \mathscr{C}(X; \mathbf{C})$, $h \in \mathscr{C}(Y; \mathbf{C})$, то*

$$(g \cdot \lambda) \otimes (h \cdot \mu) = (g \otimes h) \cdot (\lambda \otimes \mu). \tag{6}$$

В самом деле, для любой функции $f \in \mathscr{K}(X \times Y; \mathbf{C})$ согласно формуле 3, п. 1, имеем

$$\langle f, (g \otimes h) \cdot (\lambda \otimes \mu) \rangle = \int d\lambda(x) \int f(x, y)\, g(x)\, h(y)\, d\mu(y) =$$
$$= \int g(x)\, d\lambda(x) \int f(x, y)\, h(y)\, d\mu(y),$$

что и доказывает формулу (6).

Предложение 2. *Носитель произведения $\lambda \otimes \mu$ равен произведению носителя меры λ и носителя меры μ.*

Прежде всего заметим, что соотношение $\lambda \otimes \mu = 0$ влечет тот факт, что одна из мер λ, μ будет нулевой (Алгебра, гл. II

(3-е изд.), § 7, п. 7, предл. 16, (ii)). С другой стороны, если U (соотв. V) есть открытое множество в X (соотв. Y), то сужение $\lambda \otimes \mu$ на произведение $U \times V$ есть произведение сужений λ на U и μ на V, что следует из теоремы 1, п. 1 и из определения сужения меры на открытое множество (§ 2, п. 1). Для того чтобы сужение $\lambda \otimes \mu$ на $U \times V$ было нулевым, необходимо и достаточно, стало быть, чтобы нулевым было сужение λ на U или сужение μ на V, чем предложение и доказано, если учесть определение носителя меры (§ 2, п. 2).

Предложение 3. *Пусть* $\lambda \in \mathscr{M}(X; \mathbf{C})$, $\mu \in \mathscr{M}(Y; \mathbf{C})$. *Тогда*

$$|\lambda \otimes \mu| = |\lambda| \otimes |\mu|. \tag{7}$$

Пусть $f \in \mathscr{K}_+(X \times Y; \mathbf{C})$, $g \in \mathscr{K}(X \times Y; \mathbf{C})$ таковы, что $|g| \leqslant f$; имеем (§ 1, п. 6, формула (13))

$$|\langle g, \lambda \otimes \mu\rangle| = \left|\int d\lambda(x) \int g(x, y)\, d\mu(y)\right| \leqslant$$
$$\leqslant \int d|\lambda|(x) \int |g(x, y)|\, d|\mu|(y) =$$
$$= \langle |g|, |\lambda| \otimes |\mu|\rangle \leqslant \langle f, |\lambda| \otimes |\mu|\rangle.$$

Отсюда заключаем, что $\langle f, |\lambda \otimes \mu|\rangle \leqslant \langle f, |\lambda| \otimes |\mu|\rangle$, и окончательно,

$$|\lambda \otimes \mu| \leqslant |\lambda| \otimes |\mu|. \tag{8}$$

С другой стороны, пусть $u \in \mathscr{K}_+(X)$, $v \in \mathscr{K}_+(Y)$. Для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие $u_1 \in \mathscr{K}(X; \mathbf{C})$, $v_1 \in \mathscr{K}(Y; \mathbf{C})$, что $|u_1| \leqslant u$, $|v_1| \leqslant v$ и

$$|\langle u_1, \lambda\rangle| \geqslant \langle u, |\lambda|\rangle - \varepsilon, \quad |\langle v_1, \mu\rangle| \geqslant \langle v, |\mu|\rangle - \varepsilon$$

(§ 1, п. 6). Отсюда вытекает, что $|u_1 \otimes v_1| \leqslant u \otimes v$ и

$$\langle u \otimes v, |\lambda \otimes \mu|\rangle \geqslant |\langle u_1 \otimes v_1, \lambda \otimes \mu\rangle| =$$
$$= |\langle u_1, \lambda\rangle \langle v_1, \mu\rangle| \geqslant (\langle u, |\lambda|\rangle - \varepsilon)(\langle v, |\mu|\rangle - \varepsilon).$$

А поскольку ε произвольно, то из этого выводим, что

$$\langle u \otimes v, |\lambda \otimes \mu|\rangle \geqslant \langle u, |\lambda|\rangle \langle v, |\mu|\rangle = \langle u \otimes v, |\lambda| \otimes |\mu|\rangle.$$

Принимая во внимание (8), получаем:

$$\langle u \otimes v, |\lambda \otimes \mu|\rangle = \langle u \otimes v, |\lambda| \otimes |\mu|\rangle.$$

Всякая функция из $\mathscr{K}(X; \mathbf{C})$ (соотв. $\mathscr{K}(Y; \mathbf{C})$) является линейной комбинацией функций из $\mathscr{K}_+(X)$ (соотв. $\mathscr{K}_+(Y)$); поэтому

предыдущая формула верна также для $u \in \mathscr{K}(X; \mathbf{C})$ и $v \in \mathscr{K}(Y; \mathbf{C})$, и стало быть, предложение следует из того, что $\mathscr{K}(X; \mathbf{C}) \otimes_{\mathbf{C}} \mathscr{K}(Y; \mathbf{C})$ плотно в $\mathscr{K}(X \times Y; \mathbf{C})$.

Следствие. *Пусть* $\lambda \in \mathscr{M}(X; \mathbf{R})$, $\mu \in \mathscr{M}(Y; \mathbf{R})$. *Тогда*

$$(\lambda \otimes \mu)^+ = \lambda^+ \otimes \mu^+ + \lambda^- \otimes \mu^-,$$
$$(\lambda \otimes \mu)^- = \lambda^+ \otimes \mu^- + \lambda^- \otimes \mu^+. \tag{9}$$

В самом деле, согласно предложению 3,

$$(\lambda \otimes \mu)^+ = \frac{1}{2}(\lambda \otimes \mu + |\lambda| \otimes |\mu|) =$$
$$= \frac{1}{2}((\lambda^+ - \lambda^-) \otimes (\mu^+ - \mu^-) + (\lambda^+ + \lambda^-) \otimes (\mu^+ + \mu^-)) =$$
$$= \lambda^+ \otimes \mu^+ + \lambda^- \otimes \mu^-.$$

Точно такое же рассуждение проводится для $(\lambda \otimes \mu)^-$.

Предложение 4. *Пусть* $\lambda \in \mathscr{M}(X; \mathbf{C})$, $\mu \in \mathscr{M}(Y; \mathbf{C})$. *Тогда*

$$\| \lambda \otimes \mu \| = \| \lambda \| \cdot \| \mu \|, \tag{10}$$

если условиться ставить справа 0, *когда один из сомножителей равен* 0, *а другой равен* $+\infty$. *В частности, если* λ *и* μ *ограничены, то* $\lambda \otimes \mu$ *ограничена.*

В силу доказанного выше предложения 3 и следствия из предложения 10, § 1, п. 8, в доказательстве можно ограничиться случаем, когда λ и μ — положительные меры. Если $\lambda = 0$ или $\mu = 0$, то результат тривиален; итак, предположим, что $\lambda \neq 0$ и $\mu \neq 0$. Докажем сначала, что $\| \lambda \otimes \mu \| \leqslant \| \lambda \| \cdot \| \mu \|$. Можно предположить, что λ и μ ограничены. Для любого отображения $f \in \mathscr{K}_+(X \times Y)$ имеем

$$\langle f, \lambda \otimes \mu \rangle = \int d\lambda(x) \int f(x, y)\, d\mu(y)$$

и для любого $x \in X$

$$\int f(x, y)\, d\mu(y) \leqslant \| f \| \cdot \| \mu \|;$$

следовательно,

$$\langle f, \lambda \otimes \mu \rangle \leqslant \| f \| \cdot \| \lambda \| \cdot \| \mu \|,$$

что и доказывает наше утверждение. С другой стороны, пусть

$$\alpha < \| \lambda \|, \quad \beta < \| \mu \|$$

— два действительных числа, $\geqslant 0$. Существуют такие функции $g \in \mathscr{K}_+(X)$, $h \in \mathscr{K}_+(Y)$, что $\| g \| \leqslant 1$, $\| h \| \leqslant 1$, $\lambda(g) \geqslant \alpha$,

$\mu(h) \geqslant \beta$. Имеем $g \otimes h \in \mathscr{K}_+(X \times Y)$, $\| g \otimes h \| \leqslant 1$ и $\langle g \otimes h, \lambda \otimes \mu \rangle \geqslant \alpha\beta$; следовательно, $\| \lambda \otimes \mu \| \geqslant \alpha\beta$, и окончательно, $\| \lambda \otimes \mu \| \geqslant \| \lambda \| \cdot \| \mu \|$, чем и завершается доказательство.

3. *Непрерывность мер-произведений*

Предложение 5. *Для любой меры* $\lambda_0 \subset \mathscr{M}_0(X; \mathbf{C})$ *отображение* $\mu \mapsto \lambda_0 \otimes \mu$ *пространства* $\mathscr{M}(Y; \mathbf{C})$ *в* $\mathscr{M}(X \times Y; \mathbf{C})$ *широко непрерывно.*

В самом деле, для любой функции $f \in \mathscr{K}(X \times Y; \mathbf{C})$, как известно, функция $h(y) = \int f(x, y)\, d\lambda_0(x)$ принадлежит $\mathscr{K}(Y; \mathbf{C})$ (п. 1, лемма 2), и $\langle f, \lambda_0 \otimes \mu \rangle = \langle h, \mu \rangle$, откуда и следует предложение.

Предложение 6. *Если пространства* $\mathscr{M}(X; \mathbf{C})$, $\mathscr{M}(Y; \mathbf{C})$ *и* $\mathscr{M}(X \times Y; \mathbf{C})$ *наделены топологией строго компактной сходимости* (§ 1, п. 10), *то билинейное отображение* $(\lambda, \mu) \mapsto \lambda \otimes \mu$ *пространства* $\mathscr{M}(X; \mathbf{C}) \times \mathscr{M}(Y; \mathbf{C})$ *в* $\mathscr{M}(X \times Y; \mathbf{C})$ *гипонепрерывно относительно широко ограниченных подмножеств из* $\mathscr{M}(X; \mathbf{C})$ *и* $\mathscr{M}(Y; \mathbf{C})$ (Топ. вект. пр-ва, гл. III, § 4, п. 2).

Пусть $K \subset X$, $L \subset Y$ — компактные множества, A — компактное подмножество из $\mathscr{K}(X \times Y, K \times L; \mathbf{C})$ и B — замкнутое широко ограниченное подмножество из $\mathscr{M}(X; \mathbf{C})$; известно, что B широко компактно (§ 1, п. 9, предл. 15), а значит, и компактно в топологии строго компактной сходимости (§ 1, п. 10, предл. 17). С другой стороны, банахово пространство $\mathscr{K}(X \times Y, K \times L; \mathbf{C})$ изометрично $\mathscr{K}(X, K; \mathscr{K}(Y, L; \mathbf{C}))$ (п. 1, лемма 1); отображение φ пространства $\mathscr{K}(X, K; \mathscr{K}(Y, L; \mathbf{C})) \times \mathscr{M}(X; \mathbf{C})$ в $\mathscr{K}(Y, L; \mathbf{C})$, такое, что $\varphi(g, \lambda)$ есть функция h, определяемая равенством $h(y) = \int g(x, y)\, d\lambda(x)$, *раздельно непрерывно*, в силу предложений 8 и 9, § 3, п. 4. А поскольку пространство $\mathscr{K}(X, K; \mathscr{K}(Y, L; \mathbf{C}))$ бочечно, отсюда заключаем, что отображение φ *гипонепрерывно* относительно широко ограниченных подмножеств из $\mathscr{M}(X; \mathbf{C})$ (Топ. вект. пр-ва, гл. III, § 4, п. 2, предл. 6); стало быть, сужение этого отображения на $A \times B$ *непрерывно* (там же, предл. 4). Следовательно, образ C множества $A \times B$ при этом отображении является компактным подмножеством банахова

пространства $\mathscr{K}(Y, L; \mathbf{C})$. Но C есть не что иное, как множество функций $h(y) = \int f(x, y)\, d\lambda(x)$, получаемое, когда f пробегает A, а λ пробегает B; значит, в силу формулы (3), п. 1, условия $\lambda \in B$ и $\mu \in C^0$ влекут $\lambda \otimes \mu \in A^0$. В силу определения топологии строго компактной сходимости, это доказывает предложение (Топвект. пр-ва, гл. III, § 4, п. 2, определение 2).

Утверждение предложения 6 уже не будет справедливо, если заменить топологию строго компактной сходимости широкой топологией (упр. 2c)). Однако если множество B (соотв. C) есть широко ограниченное подмножество пространства $\mathscr{M}(X; \mathbf{C})$ (соотв. $\mathscr{M}(Y; \mathbf{C})$), то образ произведения $B \times C$ при отображении $(\lambda, \mu) \mapsto \lambda \otimes \mu$ широко ограничен в $\mathscr{M}(X \times Y; \mathbf{C})$ в силу предложения 6, и значит, сужение этого отображения на $B \times C$ широко непрерывно в силу предложения 4 и в силу предложения 17, § 1, п. 10 (ср. упр. 3).

4. *Произведение конечного числа мер*

Пусть X_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ — локально компактные пространства и $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$ — их произведение. Множество линейных комбинаций комплексных функций вида

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto f_1(x_1)\, f_2(x_2) \ldots f_n(x_n)$$

канонически отождествляется с тензорным произведением $\bigotimes_{i=1}^{n} \mathscr{K}(X_i; \mathbf{C})$, и из леммы 1, п. 1 индукцией по n получаем, что это тензорное произведение *плотно* в $\mathscr{K}(X; \mathbf{C})$.

Пусть теперь μ_i — мера на X_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$; на X существует, и притом единственная, такая мера ν, что для $f_i \in \mathscr{K}(X_i; \mathbf{C})$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$

$$\langle f_1 \otimes f_2 \otimes \ldots \otimes f_n, \nu \rangle = \prod_{i=1}^{n} \langle f_i, \mu_i \rangle. \tag{11}$$

В самом деле, если эта мера существует, то она, согласно изложенному выше, единственна. С другой стороны, пусть $\nu = \mu_1 \otimes \mu_2 \otimes \ldots \otimes \mu_n$ — мера на X, определенная индукцией по n:

$$\mu_1 \otimes \mu_2 \otimes \ldots \otimes \mu_n = (\mu_1 \otimes \mu_2 \otimes \ldots \otimes \mu_{n-1}) \otimes \mu_n.$$

Из п. 1, формулы (1) и этого определения (индукцией по n) получаем, что ν удовлетворяет (11); говорят, что это есть *мера — произведение* мер μ_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$, и обозначают ее $\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} \mu_i$. Соотношение (11) записывается также в виде

$$\langle f_1 \otimes f_2 \otimes \ldots \otimes f_n, \mu_1 \otimes \mu_2 \otimes \ldots \otimes \mu_n \rangle = \prod_{i=1}^{n} \langle f_i, \mu_i \rangle. \qquad (12)$$

Предложение 7 («ассоциативность произведения мер»). *Пусть* $(I_k)_{1 \leqslant k \leqslant r}$ — *разбиение интервала* $[1, n]$ *в* $\mathbf{N}$; *тогда*

$$\overset{r}{\underset{k=1}{\otimes}} \left(\overset{}{\underset{i \in I_k}{\otimes}} \mu_i \right) = \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} \mu_i. \qquad (13)$$

В самом деле, эти две меры, в силу (12), совпадают для любой функции из $\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} \mathscr{K}(X_i; \mathbf{C})$

Интеграл от функции $f \in \mathscr{K}(X; \mathbf{C})$ относительно меры-произведения обозначается

$$\int f \, d\mu_1 \, d\mu_2 \ldots d\mu_n,$$

или

$$\int \int \ldots \int f \, d\mu_1 \, d\mu_2 \ldots d\mu_n,$$

или

$$\int f \, (\mu_1 \otimes \ldots \otimes \mu_n),$$

или еще

$$\int \int \ldots \int f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \, d\mu_1(x_1) \, d\mu_2(x_2) \ldots d\mu_n(x_n),$$

или

$$\int \int \ldots \int f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \, \mu_1(x_1) \, \mu_2(x_2) \ldots \mu_n(x_n)$$

с n знаками $\int$; говорят, что это есть *кратный интеграл порядка* n или *n-кратный интеграл*. Согласно ассоциативности произведения мер и теореме о замене порядка интегрирования (п. 1, теорема 2) имеем для любой перестановки σ интервала $[1, n]$:

$$\int \int \ldots \int f \, d\mu_1 \, d\mu_2 \ldots d\mu_n =$$

$$= \int d\mu_{\sigma(1)} \int d\mu_{\sigma(2)} \ldots \int f \, d\mu_{\sigma(n)}. \qquad (14)$$

Обозначение интеграла и формула (14) распространяются очевидным образом на функции $f \in \mathscr{K}(X; E)$ со значениями в отделимом локально выпуклом пространстве, обладающие тем свойством, что $f(X)$ содержится в полном выпуклом подмножестве из E. Мы предоставляем читателю обобщить на произведение любого конечного числа мер результаты пп. 2 и 3, относящиеся к произведению двух мер.

В частности, *мерой Лебега* на $\mathbf{R}^n$ называется произведение n мер, идентичных мере Лебега на $\mathbf{R}$; интеграл от функции $f \in \mathscr{K}(\mathbf{R}^n; E)$, удовлетворяющий предыдущему условию, обозначается

$$\int\int \dots \int f(x_1, x_2, \dots, x_n)\, dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

и равен

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dx_2 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2, \dots, x_n)\, dx_n.$$

Мера Лебега на $\mathbf{R}^n$ *инвариантна относительно любого сдвига.*

5. *Проективные пределы мер*

Пусть X, Y — компактные пространства и $p\colon X \to Y$ — непрерывное отображение; тогда $f \mapsto f \circ p$ есть *непрерывное линейное отображение* пространства $\mathscr{C}(Y; \mathbf{C})$ в $\mathscr{C}(X; \mathbf{C})$, поскольку $\| f \circ p \| \leqslant \| f \|$ для любой функции $f \in \mathscr{C}(Y; \mathbf{C})$; будем обозначать это отображение через p'. Его *транспонированным* является отображение ${}^t p'\colon \mathscr{M}(X; \mathbf{C}) \to \mathscr{M}(Y; \mathbf{C})$, переводящее любую меру μ на X в меру ${}^t p'(\mu)$ на Y, удовлетворяющую условию

$$\langle {}^t p'(\mu), f \rangle = \langle \mu, f \circ p \rangle$$

для любой функции $f \in \mathscr{C}(Y; \mathbf{C})$. Заметим, что для любого $x \in X$ ${}^t p'(\varepsilon_x) = \varepsilon_{p(x)}$; на основании этого мы будем обозначать через $p_*(\mu)$ меру ${}^t p'(\mu)$, которая, стало быть, *продолжает* p, когда X (соотв. Y) канонически погружается в $\mathscr{M}(X; \mathbf{C})$ (соотв. $\mathscr{M}(Y; \mathbf{C})$) (§ 1, п. 9, предл. 13); для любой меры μ на X $p_*(\mu)$ представляет собой частный случай общего понятия *образа меры*, которое мы будем изучать в гл. V, § 6. Как мы видели, $\| p' \| \leqslant 1$, точно так же, $\| {}^t p' \| \leqslant 1$; следовательно,

$$\| p_*(\mu) \| \leqslant \| \mu \| \tag{15}$$

для любой меры $\mu \in \mathscr{M}(X; \mathbf{C})$.

Рассмотрим теперь предупорядоченное фильтрующееся множество I и *проективную систему* $(X_\alpha, p_{\alpha\beta})$ *компактных* пространств X_α (Общ. топ., гл. I (3-е изд.), § 4, п. 4), имеющую I в качестве множества индексов; известно, что пространство, являющееся *проективным пределом* $X = \varprojlim X_\alpha$, компактно (Общ. топ., гл. I (3-е изд.), § 9, п. 6, предл. 8); мы будем обозначать через p_α каноническое отображение X в X_α.

Ясно, что $(\mathscr{M}(X_\alpha; \mathbf{C}), (p_{\alpha\beta})_*)$ есть *проективная система* векторных пространств и что $((p_\alpha)_*)$ есть *проективная система* линейных отображений, что оправдывает следующее определение.

Определение 2. *Семейство* $(\mu_\alpha)_{\alpha\in I}$, *где* μ_α *для любого* $\alpha \in I$ *есть мера на* X_α, *называется проективной системой мер, если для любого* $\alpha \leqslant \beta$ *выполняется равенство* $\mu_\alpha = (p_{\alpha\beta})_*(\mu_\beta)$. *Говорят что мера* μ *на* $X = \varprojlim X_\alpha$ *есть проективный предел проективной системы* (μ_α), *если для любого* $\alpha \in I$ *выполняется* $\mu_\alpha = (p_\alpha)_*(\mu)$.

Предложение 8. (i) *Если проективная система* (μ_α) *мер на* X_α *имеет проективный предел, то этот предел — единственный.*

(ii) *Если проективная система* μ_α *имеет проективный предел, то семейство норм* $(\| \mu_\alpha \|)$ *ограничено.*

(iii) *Если* $p_{\alpha\beta}$ *сюръективны и семейство* $(\| \mu_\alpha \|)$ *ограничено, то проективная система мер* (μ_α) *имеет проективный предел.*

(iv) *Если* $p_{\alpha\beta}$ *сюръективны, то любая проективная система* (μ_α) *положительных мер имеет проективный предел* μ, *который является положительной мерой на* X, *и* $\| \mu \| = \| \mu_\alpha \|$.

(i) Мы докажем сначала следующую лемму.

Лемма 3. *Пусть* F — *множество функций* $f \in \mathscr{C}(X; \mathbf{C})$, *обладающих следующим свойством: существуют такое* $\alpha \in I$ *и такая функция* $f_\alpha \in \mathscr{C}(X_\alpha; \mathbf{C})$, *что* $f = f_\alpha \circ p_\alpha$. *Тогда* F *есть векторное подпространство, всюду плотное в* $\mathscr{C}(X; \mathbf{C})$.

Прежде всего отметим, что если $g = g_\beta \circ p_\beta$ и $h = h_\gamma \circ p_\gamma$, где $g_\beta \in \mathscr{C}(X_\beta; \mathbf{C})$ и $h_\gamma \in \mathscr{C}(X_\gamma; \mathbf{C})$, то существует такое $\alpha \in I$, что $\alpha \geqslant \beta$ и $\alpha \geqslant \gamma$, и значит, $p_\beta = p_{\beta\alpha} \circ p_\alpha$, $p_\gamma = p_{\gamma\alpha} \circ p_\alpha$, чем показано, что $g + h = (g_\beta \circ p_{\beta\alpha} + h_\gamma \circ p_{\gamma\alpha}) \circ p_\alpha$ принадлежит F; точно так же, ясно, что $gh \in F$; стало быть, F есть *под*-$\mathbf{C}$-*алгебра* $\mathscr{C}(X; \mathbf{C})$, содержащая константы и такая, что соотношение

$f \in F$ влечет $\bar{f} \in F$. Наконец, если $x \neq y$ — две точки из X, то существует такое $\alpha \in I$, что $p_\alpha(x) \neq p_\alpha(y)$, и значит, имеется такая функция $f_\alpha \in \mathscr{C}(X_\alpha; \mathbf{C})$, что $f_\alpha(p_\alpha(x)) \neq f_\alpha(p_\alpha(y))$. Таким образом, утверждение леммы следует из теоремы Вейерштрасса — Стоуна (Общ. топ., гл. X (2-е изд.), § 4, п. 4, предл.7).

Пусть теперь μ, μ' — такие две меры на X, что $(p_\alpha)_*(\mu) = (p_\alpha)_*(\mu')$ для любого $\alpha \in I$; это означает, что для любого $\alpha \in I$ и любой функции $f_\alpha \in \mathscr{C}(X_\alpha; \mathbf{C})$

$$\langle f_\alpha, (p_\alpha)_*(\mu)\rangle = \langle f_\alpha, (p_\alpha)_*(\mu')\rangle,$$

или, еще, $\langle f_\alpha \circ p_\alpha, \mu\rangle = \langle f_\alpha \circ p_\alpha, \mu'\rangle$; иными словами, μ и μ' совпадают на подпространстве F пространства $\mathscr{C}(X; \mathbf{C})$, которое всюду плотно в силу леммы 3, и значит, $\mu = \mu'$, что и доказывает (i).

(ii) Соотношение (15), примененное к p_α, показывает, что если μ — проективный предел проективной системы (μ_α), то для любого $\alpha \in I$ необходимо

$$\|\mu\| \geqslant \|\mu_\alpha\|. \tag{16}$$

(iii) Предположим, что $p_{\alpha\beta}$ сюръективны; мы знаем, что тогда то же самое верно и для p_α (Общ. топ., гл. I (3-е изд.), § 9, п. 6, предл. 8). Рассмотрим проективную систему мер (μ_α) и покажем прежде всего, что *на* F существует (в обозначениях леммы 3) такая линейная форма λ, что для любого $\alpha \in I$ и любого $f_\alpha \in \mathscr{C}(X_\alpha; \mathbf{C})$ справедливо равенство $\lambda(f_\alpha \circ p_\alpha) = \mu_\alpha(f_\alpha)$. В самом деле, пусть β, γ — индексы из I, а $f_\beta \in \mathscr{C}(X_\beta; \mathbf{C})$, $f_\gamma \in \mathscr{C}(X_\gamma; \mathbf{C})$ — такие функции, что $f_\beta \circ p_\beta = f_\gamma \circ p_\gamma$; тогда найдется такой индекс $\alpha \in I$, что $\alpha \geqslant \beta$ и $\alpha \geqslant \gamma$, и значит, $p_\beta = p_{\beta\alpha} \circ p_\alpha$, $p_\gamma = p_{\gamma\alpha} \circ p_\alpha$ и $(f_\beta \circ p_{\beta\alpha}) \circ p_\alpha = (f_\gamma \circ p_{\gamma\alpha}) \circ p_\alpha$; а поскольку p_α сюръективно, то это влечет равенство $f_\beta \circ p_{\beta\alpha} = f_\gamma \circ p_{\gamma\alpha}$, и стало быть,

$$\mu_\alpha(f_\beta \circ p_{\beta\alpha}) = \mu_\alpha(f_\gamma \circ p_{\gamma\alpha});$$

но, по определению, это соотношение записывается также в виде $\mu_\beta(f_\beta) = \mu_\gamma(f_\gamma)$, откуда и следует наше утверждение.

Предположим теперь, что существует такое конечное число $a > 0$, что $\|\mu_\alpha\| \leqslant a$ для любого $\alpha \in I$; тогда для любой функции

$f_\alpha \in \mathscr{C}(X_\alpha; \mathbf{C})$

$$|\lambda(f_\alpha \bullet p_\alpha)| = |\mu_\alpha(f_\alpha)| \leqslant a \|f_\alpha\| = a \|f_\alpha \circ p_\alpha\|,$$

поскольку p_α сюръективно. Тем самым показано, что линейная форма λ *непрерывна* на F, и из леммы 3 вытекает, что λ продолжается до такой *меры* μ на X, что $(p_\alpha)_*(\mu) = \mu_\alpha$ для любого $\alpha \in I$, чем и доказано (iii).

(iv) Для доказательства существования μ достаточно, в силу (iii), убедиться в том, что семейство норм $(\|\mu_\alpha\|)$ ограничено. Но $\|\mu_\alpha\| = \mu_\alpha(1)$, и для $\alpha \leqslant \beta$ соотношение $\mu_\alpha = (p_{\alpha\beta})_*(\mu_\beta)$ влечет равенство $\mu_\alpha(1) = \mu_\beta(1)$; а поскольку I — фильтрующееся множество, то полные массы всех мер μ_α равны, откуда и следует утверждение. Кроме того, подпространство F, очевидно, удовлетворяет свойству (P) предложения 9, § 1, п. 7, и значит, мера μ, являющаяся проективным пределом (μ_α), положительна. Наконец, соотношение $\mu_\alpha = (p_\alpha)_*(\mu)$ показывает, как и выше, что $\mu(1) = \mu_\alpha(1)$.

Пример. Пусть $(X_\lambda)_{\lambda \in L}$ — семейство компактных пространств; положим $X = \prod_{\lambda \in L} X_\lambda$ и для любого конечного подмножества J из L положим $X_J = \prod_{\lambda \in J} X_\lambda$; обозначим через pr_J: $X \to X_J$ и $\mathrm{pr}_{J,K}$: $X_K \to X_J$ (для $J \subset K$) канонические проекции. Известно, что $(X_J, \mathrm{pr}_{J,K})$ есть проективная система компактных пространств и что проективный предел системы непрерывных отображений (pr_J) есть *гомеоморфизм* пространства X на пространство — проективный предел $\varprojlim X_J$, позволяющий отождествить оба эти пространства (Общ. топ., гл. I (3-е изд.), § 4, п. 4 и Теория множеств, гл. III (2-е изд.), § 7, п. 2, замечание 3). Но поскольку проекции $\mathrm{pr}_{J,K}$ сюръективны, из предложения 8 следует, что множество $\mathscr{M}(X; \mathbf{C})$ (соотв. $\mathscr{M}_+(X)$) отождествляется с множеством таких проективных систем (μ_J), что семейство норм $(\|\mu_J\|)$ ограничено (соотв. таких, что все μ_J положительны и необходимо имеют одинаковую полную массу).

Рассмотрим, в частности, случай, когда для каждого $\lambda \in L$ берется мера μ_λ на X_λ и когда полагаем $\mu_J = \bigotimes_{\lambda \in J} \mu_\lambda$. Если

$J \subset K$ — два конечных подмножества из L, то для любой функции $f_J \in \mathscr{C}(X_J; \mathbf{C})$, в силу формулы (14), п. 4 имеем

$$\mu_K(f_J \circ \mathrm{pr}_{J,K}) = \mu_J(f_J) \cdot \prod_{\lambda \in K - J} \mu_\lambda(1). \tag{17}$$

Для того чтобы (μ_J) было проективной системой мер, необходимо и достаточно стало быть, чтобы либо $\mu_\lambda = 0$ для любого $\lambda \in L$, либо $\mu_\lambda(1) = 1$ для любого $\lambda \in L$.

6. *Бесконечные произведения мер*

Пусть $(X_\lambda)_{\lambda \in L}$ — семейство компактных пространств и пусть μ_λ — при любом $\lambda \in L$ — мера на X_λ. Сохраним обозначения примера п. 5, так что, в частности, $\mu_J = \bigotimes_{\lambda \in J} \mu_\lambda$ для любого конечного подмножества J из L.

Предложение 9. *Предположим, что все меры μ_λ положительны и что семейство $(\mu_\lambda(1))_{\lambda \in L}$ перемножаемо в $\mathbf{R}_+$* (при этом произведение может иметь значение 0). *Тогда на X существует, и притом единственная, такая мера μ, что для любого конечного подмножества J из L и любой функции $f_J \in \mathscr{C}(X_J; \mathbf{C})$*

$$\mu(f_J \circ \mathrm{pr}_J) = \mu_J(f_J) \prod_{\lambda \in L - J} \mu_\lambda(1). \tag{18}$$

Кроме того, мера μ положительна и ее полная масса задается формулой

$$\mu(1) = \prod_{\lambda \in L} \mu_\lambda(1). \tag{19}$$

Пусть F — векторное пространство, состоящее из функций на X вида $f_J \circ \mathrm{pr}_J$, где J пробегает фильтрующееся множество конечных подмножеств из L, а $f_J \in \mathscr{C}(X_J; \mathbf{C})$; говорят еще, что F есть пространство непрерывных функций на X, *зависящих лишь от конечного числа переменных*. Лемма 3 из п. 5 показывает, что F плотно в $\mathscr{C}(X; \mathbf{C})$, откуда следует единственность μ. Если для некоторого $\lambda \in L$ имеем $\mu_\lambda = 0$, то мера $\mu = 0$ является искомой, поскольку в правой части формулы (18) получаем $\mu_J(f_J) = 0$, если $\lambda \in J$, и $\prod_{\lambda \in L - J} \mu_\lambda(1) = 0$, если $\lambda \notin J$. Стало быть, можно предположить, что $\mu_\lambda \neq 0$ при всех $\lambda \in L$, а так как меры положительны, то это влечет $\mu_\lambda(1) \neq 0$ для любого $\lambda \in L$. Положим

теперь $\mu'_\lambda = \mu_\lambda/\mu_\lambda(1)$ для любого $\lambda \in L$, так что μ'_λ есть положительная мера на X_λ, для которой $\mu'_\lambda(1) = 1$. Тогда из предложения 8, п. 5 вытекает, что на X существует такая положительная мера μ' с полной массой 1, что $\mu'(f_J \circ \mathrm{pr}_J) = \mu'_J(f_J)$ для любого конечного подмножества J из L и любой функции $f_J \in \mathscr{C}(X_J; \mathbf{C})$. Положительная мера

$$\mu = \Big(\prod_{\lambda\in L} \mu_\lambda(1)\Big)\,\mu$$

и отвечает поставленному требованию, поскольку

$$\mu_J(f_J) = \mu'_J(f_J)\cdot\prod_{\lambda\in J}\mu_\lambda(1), \qquad \prod_{\lambda\in L}\mu_\lambda(1) = \prod_{\lambda\in J}\mu_\lambda(1)\cdot\prod_{\lambda\in L-J}\mu_\lambda(1).$$

Меру, определенную в предложении 9, называют *мерой — произведением* семейства положительных мер $(\mu_\lambda)_{\lambda\in L}$ и обозначают $\bigotimes_{\lambda\in L}\mu_\lambda$.

Следствие. *Предположим, что выполнены условия предложения* 9 *и пусть* $(L_\rho)_{\rho\in\mathbf{R}}$ *— разбиение* L. *Тогда каждое из семейств мер* $(\mu_\lambda)_{\lambda\in L_\rho}$ *имеет меру — произведение, семейство мер — произведений* $\big(\bigotimes_{\lambda\in L_\rho}\mu_\lambda\big)_{\rho\in\mathbf{R}}$ *имеет меру — произведение, и*

$$\bigotimes_{\rho\in\mathbf{R}}\Big(\bigotimes_{\lambda\in L_\rho}\mu_\lambda\Big) = \bigotimes_{\lambda\in L}\mu_\lambda. \tag{20}$$

Это сразу же следует из формул (18) и (19) и из ассоциативности произведения для перемножаемых семейств в $\mathbf{R}_+$ (Общая топ., гл. IV (3-е изд.), § 7, п. 5, замечание).

Упражнения

1) Пусть X, Y — локально компактные пространства.

a) Показать, что отображение $(\mu, \nu) \mapsto \mu \otimes \nu$ произведения $\mathscr{M}(X; \mathbf{C}) \times \mathscr{M}(Y; \mathbf{C})$ в $\mathscr{M}(X \times Y; \mathbf{C})$ непрерывно, если наделить $\mathscr{M}(X; \mathbf{C})$, $\mathscr{M}(Y; \mathbf{C})$ и $\mathscr{M}(X \times Y; \mathbf{C})$ квазисильной топологией (§ 1, упр. 8).

b) Показать, что отображение $(\mu, \nu) \mapsto \mu \otimes \nu$ произведения $\mathscr{M}_+(X) \times \mathscr{M}_+(Y)$ в $\mathscr{M}_+(X \times Y)$ непрерывно, если наделить $\mathscr{M}_+(X)$, $\mathscr{M}_+(Y)$ и $\mathscr{M}_+(X \times Y)$ широкой топологией.

°2) a) Пусть X — интервал $[0, 1]$ из $\mathbf{R}$; показать, что если $(a_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ — произвольная конечная последовательность попарно различных элементов из X, то функции $|x - a_k|$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ линейно независимы. Вывести отсюда, что непрерывная функция $|x - y|$,

определенная на $X \times X$, не представима в виде $\sum_{i=1}^{n} u_i(x)\, v_i(y)$, где u_i и v_i непрерывны.

b) Для любой $\mu \in \mathscr{M}(X; \mathbf{C})$ положим $f_\mu(y) = \int |x - y|\, d\mu(x)$. Показать, что линейное отображение $\mu \mapsto f_\mu$ пространства $\mathscr{M}(X; \mathbf{C})$ в $\mathscr{C}(X; \mathbf{C})$ инъективно, имеет в качестве образа всюду плотное подпространство L пространства $\mathscr{C}(X; \mathbf{C})$ и непрерывно, но не бинепрерывно в топологиях нормированного пространства в $\mathscr{M}(X; \mathbf{C})$ и L. (Заметить, что L содержит константы и кусочно линейные функции.)

c) Пусть u_i $(1 \leqslant i \leqslant m)$ — произвольные функции из $\mathscr{C}(X; \mathbf{C})$ и пусть V — векторное подпространство пространства $\mathscr{M}(X; \mathbf{C})$, ортогональное к u_i и имеющее, следовательно, коразмерность $\leqslant m$ в $\mathscr{M}(X; \mathbf{C})$. Показать, что если B — множество таких мер μ на X, что $\|\mu\| \leqslant 1$, то существуют такие меры $\mu \in B$ и $\nu \in V$, что $\int f_\mu(y)\, d\nu(y)$ сколь угодно велик (использовать b)). Вывести отсюда, что если наделить B, $\mathscr{M}(X; \mathbf{C})$ и $\mathscr{M}(X \times X; \mathbf{C})$ широкой топологией, то отображение $(\mu, \nu) \mapsto \mu \otimes \nu$ произведения $B \times \mathscr{M}(X; \mathbf{C})$ в $\mathscr{M}(X \times X; \mathbf{C})$ не является непрерывным.

°3) a) Пусть X, Y — локально компактные пространства, $K \subset X$, $L \subset Y$ — компактные множества, A — компактное подмножество пространства $\mathscr{K}(X \times Y, K \times L; \mathbf{C})$. Пусть для любого целого n окружение V_n равномерной структуры множества K таково, что для любой пары $(x', x'') \in V_n$, любого $y \in L$ и любой функции $f \in A$

$$|f(x', y) - f(x'', y)| \leqslant 1/n^2.$$

Пусть C_n — множество функций $y \mapsto n(f(x', y) - f(x'', y))$, где $(x', x'') \in V_n$ и $f \in A$; показать, что объединение C множеств C_n по всем $n \geqslant 1$ есть относительно компактное подмножество пространства $\mathscr{K}(Y, L; \mathbf{C})$.

b) Пусть B — объединение C и множества отображений $y \mapsto f(x, y)$ для $x \in K$ и $f \in A$, являющегося относительно компактным подмножеством из $\mathscr{K}(Y, L; \mathbf{C})$. Показать, что когда ν пробегает поляру B^0 множества B в $\mathscr{M}(Y; \mathbf{C})$, а f пробегает A, множество отображений

$$y \mapsto \int f(x, y)\, d\nu(y)$$

относительно компактно в $\mathscr{K}(X, K; \mathbf{C})$.

c) Вывести из b), что отображение $(\mu, \nu) \mapsto \mu \otimes \nu$ произведения $\mathscr{M}(X; C) \times \mathscr{M}(Y; \mathbf{C})$ в $\mathscr{M}(X \times Y; \mathbf{C})$ непрерывно, если наделить $\mathscr{M}(X; C)$, $\mathscr{M}(Y; \mathbf{C})$ и $\mathscr{M}(X \times Y; \mathbf{C})$ топологией строго компактной сходимости.

4) Пусть X — локально компактное пространство, Y — локально компактное паракомпактное пространство. Показать, что канониче-

ское отображение пространства $\mathscr{K}(X \times Y; \mathbf{C})$ в $\mathscr{K}(X; \mathscr{K}(Y; \mathbf{C}))$ есть изоморфизм топологических векторных пространств.

5) Пусть $(X_\lambda)_{\lambda \in L}$ — бесконечное семейство компактных пространств; пусть для каждого $\lambda \in L$ через a_λ обозначена точка из X_λ, а через μ_λ — положительная мера на X_λ с полной массой 1. Пусть $\nu(J)$ для любого конечного подмножества J из L есть мера на $X = \prod_{\lambda \in L} X_L$, представляющая собой произведение мер μ_λ для $\lambda \in J$ и мер ε_{a_λ} для $\lambda \in L - J$. Показать, что мера $\nu(J)$ широко стремится по фильтрующемуся множеству конечных подмножеств из L к $\mu = \bigotimes_{\lambda \in L} \mu_\lambda$, но не стремится сильно к μ.

°6) Показать, в обозначениях п. 6, что для того чтобы на X существовала такая мера $\mu \neq 0$, что для любого конечного подмножества J из L и любой функции $f_J \in \mathscr{C}(X_J; \mathbf{C})$

$$\mu(f_J \circ \mathrm{pr}_J) = \lim_{K \supset J} \mu_K(f_J \circ \mathrm{pr}_{J,K}) = \mu_J(f_J) \prod_{\lambda \in L - J} \mu_\lambda(1), \tag{1}$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие три условия:

1° $\mu_\lambda \neq 0$ для любого $\lambda \in L$.

2° Существует такое конечное подмножество J_0 из L, что семейство $(\mu_\lambda(1))_{\lambda \in L - J_0}$ перемножаемо в $\mathbf{C}^*$ (и значит, имеет произведение $\neq 0$).

3° Семейство $(\| \mu_\lambda \|)_{\lambda \in L}$ перемножаемо в $\mathbf{R}_+^*$ (и значит, имеет произведение $\neq 0$).

В каких случаях средняя часть формулы (1) обращается в 0 для любого конечного подмножества J из L и любой функции $f_J \in \mathscr{C}(X_J; \mathbf{C})$?

7) Сохраним обозначения упражнения 6; предположим, что выполнены условия этого упражнения. Показать, что для любой функции $f \in \mathscr{C}(X; \mathbf{C})$ справедливо равенство

$$\int f \, d\mu = \lim_J \int f(x_J, x_{L-J}) \, d\mu_J(x_J),$$

где предел берется по фильтрующемуся множеству конечных подмножеств из L, а через x_J обозначена проекция $\mathrm{pr}_J(x)$ для любого $x \in X$ и любого $J \subset L$; так же, для любого $x \in X$

$$f(x) = \lim_J \int f(x_J, x_{L-J}) \, d\mu_{L-J}(x_{L-J}),$$

когда все меры μ_λ ($\lambda \in L$) имеют полную массу 1 (при этом μ_K означает для любого подмножества K из L произведение подсемейства мер $(\mu_\lambda)_{\lambda \in K}$).

8) Показать, в обозначениях упражнения 6, что если произведение семейства (μ_λ) определено и $\neq 0$, то существует такое счетное подмножество K из L, что для любого $\lambda \in L - K$ мера μ_λ положительна и имеет полную массу 1 (использовать упр. 18 из § 1).

ГЛАВА IV

ПРОДОЛЖЕНИЕ МЕРЫ. ПРОСТРАНСТВА L^p

В этой главе X обозначает локально компактное пространство, а μ — меру на X; когда речь идет о некоторой функции (без уточнения множества, на котором она определена), то подразумевается, что функция определена на X.

Для любого множества A из X через φ_A будет обозначаться характеристическая функция множества A (равная 1 на A и 0 на $\complement A$).

§ 1. Верхний интеграл от положительной функции

1. Верхний интеграл от положительной полунепрерывной снизу функции

Пусть X — локально компактное пространство и μ — *положительная* мера на X; известно, что μ есть *возрастающая* функция на решетке $\mathscr{K}_+(X)$ (которую мы будем также обозначать $\mathscr{K}_+$).

Через $\mathscr{T}_+(X)$ (или просто $\mathscr{T}_+$) мы будем обозначать множество *положительных* числовых функций, *конечных или бесконечных*, *полунепрерывных снизу* на X. Напомним, что сумма произвольного семейства функций из $\mathscr{T}_+$ принадлежит $\mathscr{T}_+$; произведение функции из $\mathscr{T}_+$ на конечное число $\alpha > 0$ принадлежит $\mathscr{T}_+$; верхняя огибающая *произвольного* семейства функций из $\mathscr{T}_+$ и нижняя огибающая *конечного* семейства функций из $\mathscr{T}_+$ также принадлежат $\mathscr{T}_+$ (Общая топ., гл. IV, § 6, предл. 2 и теорема 4). Кроме того, нам понадобится следующая лемма:

Лемма 1. *Всякая функция $f \in \mathscr{T}_+$ есть верхняя огибающая множества (фильтрующегося по отношению $\leqslant$) функций $g \in \mathscr{K}_+$, удовлетворяющих условию $g \leqslant f$.*

В самом деле, по условию, для любого $x \in X$, для которого $f(x) > 0$, и любого конечного действительного числа a, $0 < a < f(x)$, существует такая компактная окрестность V точки x что $f(y) \geqslant a$ на V; с другой стороны, существует функция $g \in \mathscr{K}_+$ с носителем в V, равная a в точке x и $\leqslant a$ на V (Общая топ., гл. IX, § 1, предл. 5, теорема 2); следовательно, $0 \leqslant g \leqslant f$ и $g(x) \geqslant a$, что и доказывает лемму.

Определение 1. *Если на X задана положительная мера μ, то верхним интегралом от функции $f \in \mathscr{T}_+$* (относительно μ) *называется положительное число* (конечное или равное $+\infty$)

$$\mu^*(f) = \sup_{g \in \mathscr{K}_+,\ g \leqslant f} \mu(g).$$

Легко видеть, что для любой функции $f \in \mathscr{K}_+$ выполняется равенство $\mu^*(f) = \mu(f)$; иными словами, μ^* есть *продолжение* меры μ на $\mathscr{T}_+$.

Пример. Пусть X — *дискретное* пространство, μ — положительная мера на X; положим $\alpha(x) = \mu(\varphi_{(x)})$ для любого $x \in X$. Тогда всякая числовая функция f на X будет непрерывна; для такой функции $f \geqslant 0$ имеем $\mu^*(f) = \sum_{x \in X} \alpha(x) f(x)$, если условиться положить $\alpha(x) f(x) = 0$, когда $\alpha(x) = 0$, а $f(x) = +\infty$. В самом деле,

$$\sum_{x \in X} \alpha(x) f(x) = \sup_M \Big(\sum_{x \in M} \alpha(x) f(x) \Big),$$

где M пробегает множество конечных подмножеств из X. Если существует такое $x_0 \in X$, что $f(x_0) = +\infty$, а $\alpha(x_0) > 0$, то $\sum_{x \in M} \alpha(x) f(x) = +\infty$, как только $x_0 \in M$, а с другой стороны, для любого целого $n > 0$ имеем $f \geqslant n \cdot \varphi_{(x_0)}$, а значит, $\mu^*(f) \geqslant n\alpha(x_0)$, и стало быть, $\mu^*(f) = +\infty$. Если же, напротив, $\alpha(x) = 0$ во всех точках, где $f(x) = +\infty$, то функция g, равная f в точках $x \in M$, где $\alpha(x) > 0$, и 0 в остальных точках, принадлежит $\mathscr{K}_+$, и в силу сделанных соглашений, $\mu(g) = \sum_{x \in M} \alpha(x) f(x)$, что снова приводит к соотношению $\mu^*(f) = \sum_{x \in X} \alpha(x) f(x)$.

Предложение 1. *Для любого конечного действительного числа $\alpha > 0$ и любой функции $f \in \mathscr{T}_+$ справедливо равенство*

$$\mu^*(\alpha f) = \alpha \mu^*(f). \tag{1}$$

Предложение 2. *Функция* μ^* *возрастает на множестве* $\mathcal{J}_+$.

Доказательство этих предложений вытекает непосредственно из определения 1.

Теорема 1. *Пусть* H *— непустое множество функций из* $\mathcal{J}_+$, *фильтрующееся по отношению* $\leqslant$. *Для любой положительной меры* μ *на* X *справедлива формула*

$$\mu^*(\sup_{g\in H} g) = \sup_{g\in H} \mu^*(g) = \lim_{g\in H} \mu^*(g). \tag{2}$$

Положим $f = \sup_{g\in H} g$. Сначала мы докажем теорему для того частного случая, когда функции $g \in H$ и их верхняя огибающая f *принадлежат* $\mathcal{K}_+$. В этом случае из теоремы Дини (Общая топ., гл. X, § 5, теорема 1) следует, что фильтр сечений множества H *равномерно* сходится к f на любом компактном множестве из X и, в частности, на носителе K функции f. А поскольку $0 \leqslant g \leqslant f$ для любой функции $g \in H$, то носитель всякой функции из H содержится в K; но по определению μ непрерывна на векторном пространстве $\mathcal{K}(X, K; \mathbf{C})$ непрерывных функций с носителем в K в топологии равномерной сходимости; отсюда вытекает формула (2) для рассматриваемого случая.

Перейдем к общему случаю. Ясно, что $\mu^*(g) \leqslant \mu^*(f)$ для любой функции $g \in H$. В силу определения 1 все сводится к тому, чтобы показать, что для всякой функции $\psi \in \mathcal{K}_+$, $\psi \leqslant f$, выполняется неравенство $\mu(\psi) \leqslant \sup_{g\in H} \mu^*(g)$. Обозначим для любой функции $g \in H$ через Φ_g множество таких функций $\varphi \in \mathcal{K}_+$, что $\varphi \leqslant g$, а через Φ — объединение множеств Φ_g, когда g пробегает H; поскольку H — фильтрующееся множество, то таковым является и Φ, и $f = \sup_{\varphi\in\Phi} \varphi$. А так как $\psi \leqslant f$, то ψ есть верхняя огибающая множества функций $\inf(\psi, \varphi)$, когда φ пробегает Φ; а поскольку ψ и функции $\inf(\psi, \varphi)$ принадлежат $\mathcal{K}_+$, то первая часть доказательства показывает, что $\mu(\psi) = \sup_{\varphi\in\Phi} \mu(\inf(\psi, \varphi))$. Но каждая функция $\varphi \in \Phi$ принадлежит некоторому множеству Φ_g, и значит,

$$\mu(\inf(\psi, \varphi)) \leqslant \mu(\varphi) \leqslant \mu^*(g) \leqslant \sup_{g\in H} \mu^*(g),$$

откуда сразу же получаем, что $\mu(\psi) \leqslant \sup_{g \in H} \mu^*(g)$. Таким образом, мы доказали, что $\mu^*(f) \leqslant \sup_{g \in H} \mu^*(g)$; соотношение $\mu^*(f) = \lim_{g \in H} \mu^*(g)$ является теперь следствием теоремы о монотонном пределе (Общая топ., гл. IV, § 5, п. 2, теорема 2).

Теорема 2. *Если f_1 и f_2 — две функции из $\mathcal{J}_+$, то*

$$\mu^*(f_1 + f_2) = \mu^*(f_1) + \mu^*(f_2). \tag{3}$$

В самом деле, когда φ_1 (соотв. φ_2) пробегает множество таких функций из $\mathscr{K}_+$, что $\varphi_1 \leqslant f_1$ (соотв. $\varphi_2 \leqslant f_2$), то функции $\varphi_1 + \varphi_2$ образуют фильтрующееся (по $\leqslant$) множество, верхняя огибающая которого равна $f_1 + f_2$. Следовательно, в силу теоремы 1,

$$\mu^*(f_1 + f_2) = \sup \mu(\varphi_1 + \varphi_2) = \sup (\mu(\varphi_1) + \mu(\varphi_2)),$$

где (φ_1, φ_2) пробегает множество пар функций из $\mathscr{K}_+$, для которых $\varphi_1 \leqslant f_1$ и $\varphi_2 \leqslant f_2$; а так как

$$\sup (\mu(\varphi_1) + \mu(\varphi_2)) = \sup \mu(\varphi_1) + \sup \mu(\varphi_2)$$

(Общая топ., гл. IV, § 5, следствие 2 из предл. 12), то теорема доказана.

Предложение 3. *Для любого семейства $(f_\iota)_{\iota \in I}$ функций из $\mathcal{J}_+$*

$$\mu^*\left(\sum_{\iota \in I} f_\iota\right) = \sum_{\iota \in I} \mu^*(f_\iota). \tag{4}$$

В самом деле, для любого конечного подмножества J множества I из теоремы 2 (индукцией по числу элементов множества J) выводим, что $\mu^*\left(\sum_{\iota \in J} f_\iota\right) = \sum_{\iota \in J} \mu^*(f_\iota)$; когда J пробегает множество конечных подмножеств множества I, функции $g_J = \sum_{\iota \in J} f_\iota$ принадлежат $\mathcal{J}_+$ и образуют множество, фильтрующееся по отношению $\leqslant$ и имеющее в качестве верхней огибающей функцию $\sum_{\iota \in I} f_\iota$; следовательно, предложение вытекает из теоремы 1.

Предложение 4. *Пусть f — функция из $\mathcal{J}_+$. Отображение $\mu \mapsto \mu^*(f)$ множества $\mathscr{M}_+(X)$ положительных мер на X в расширенную прямую $\overline{\mathbf{R}}$ полунепрерывно снизу в широкой топологии в $\mathscr{M}_+(X)$* (гл. III, § 1, п. 9).

Действительно, это отображение по определению является верхней огибающей отображений $\mu \mapsto \mu(g)$, где g пробегает множество таких функций из $\mathscr{K}_+$, что $g \leqslant f$; а по определению широкой топологии отображения $\mu \mapsto \mu(g)$ непрерывны на $\mathscr{M}(X)$.

2. *Внешняя мера открытого множества*

Если задано *открытое* множество $G \subset X$, то его характеристическая функция φ_G *полунепрерывна снизу* на X (Общая топ., гл. IV, § 6, следствие из предл. 1). Следовательно, можно принять следующее определение:

Определение 2. *Если на X задана положительная мера μ, то внешней мерой любого открытого множества $G \subset X$ называется, и обозначается $\mu^*(G)$, верхний интеграл $\mu^*(\varphi_G)$.*

Таким образом, внешняя мера открытого множества G есть положительное число, либо конечное, либо равное $+\infty$. Справедливо равенство $\mu^*(\varnothing) = 0$. Кроме того, как показывает формула (8) из гл. III, § 1, п. 8, $\mu^*(X) = \| \mu \|$.

Предложение 5. *Внешняя мера открытого относительно компактного множества G конечна.*

Действительно, в этом случае найдется такая функция $f \in \mathscr{K}_+$, что $\varphi_G \leqslant f$ (гл. III, § 1, п. 2, лемма 1), откуда

$$\mu^*(G) = \mu^*(\varphi_G) \leqslant \mu^*(f) = \mu(f) < +\infty.$$

Открытое множество с конечной внешней мерой не всегда относительно компактно (упр. 3).

Предложение 6. *Если G_1 и G_2 — два открытых множества и $G_1 \subset G_2$, то $\mu^*(G_1) \leqslant \mu^*(G_2)$.*

Действительно, отношение $G_1 \subset G_2$ эквивалентно отношению $\varphi_{G_1} \leqslant \varphi_{G_2}$.

Предложение 7. *Пусть $\mathfrak{G}$ — множество открытых множеств из X, фильтрующееся по отношению $\subset$; тогда*

$$\mu^*\Big(\bigcup_{G \in \mathfrak{G}} G\Big) = \sup_{G \in \mathfrak{G}} \mu^*(G). \tag{5}$$

В самом деле, функции φ_G образуют фильтрующееся (по $\leqslant$) множество в $\mathscr{J}_+$, и их верхняя огибающая является характери-

стической функцией объединения множеств $G \in \mathfrak{G}$; таким образом, предложение является следствием из теоремы 1.

Предложение 8. *Пусть* $(G_\iota)_{\iota \in I}$ — *произвольное семейство открытых множеств; тогда*

$$\mu^*\left(\bigcup_{\iota \in I} G_\iota\right) \leqslant \sum_{\iota \in I} \mu^*(G_\iota). \tag{6}$$

Если при этом G_ι *не имеют попарно общих точек, то*

$$\mu^*\left(\bigcup_{\iota \in I} G_\iota\right) = \sum_{\iota \in I} \mu^*(G_\iota). \tag{7}$$

В самом деле, если $G = \bigcup_{\iota \in I} G_\iota$, то $\varphi_G = \sup_{\iota \in I} \varphi_{G_\iota} \leqslant \sum_{\iota \in I} \varphi_{G_\iota}$; а если G_ι не имеют попарно общих точек, то $\varphi_G = \sum_{\iota \in I} \varphi_{G_\iota}$; таким образом, предложение является следствием теоремы 1 и предложения 3.

Пример. Положим $X = \mathbf{R}$ и обозначим через μ меру Лебега на $\mathbf{R}$ (гл. III, § 2, п. 2); найдем внешнюю меру *открытого интервала* $G =]a, b[$ $(-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty)$. Допустим сначала, что a и b конечны. Тогда, согласно теореме о среднем, для любой функции f из $\mathscr{K}_+$, удовлетворяющей условию $f \leqslant \varphi_G$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \leqslant b - a,$$

откуда $\mu^*(G) \leqslant b - a$. С другой стороны, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая функция $f \in \mathscr{K}_+$, что $f \leqslant \varphi_G$ и $f(x) = 1$ для $a + \varepsilon \leqslant x \leqslant b - \varepsilon$; отсюда $\mu^*(G) \geqslant b - a - 2\varepsilon$; а так как ε произвольно, то $\mu^*(G) = b - a$; иными словами, внешняя мера интервала G равна его *длине*. Этот результат сразу же распространяется на случай, когда G — открытый неограниченный интервал, ибо тогда он содержит открытые ограниченные интервалы сколь угодно большой длины, и, значит, в этом случае $\mu^*(G) = +\infty$.

Возьмем теперь в качестве G произвольное открытое множество из $\mathbf{R}$; тогда G есть объединение счетного (конечного или бесконечного) множества открытых интервалов $]a_k, b_k[$ попарно без общих

точек (Общая топ., гл. IV, § 2, предл. 2); следовательно,

$$\mu^*(G) = \sum_k (b_k - a_k)$$

(предл. 8); иными словами:

Предложение 9. *Внешняя мера Лебега открытого множества из* $\mathbf{R}$ *равна сумме длин его связных компонент.*

Отметим, в частности, что если G — открытое множество из $\mathbf{R}$ и $\mu^*(G) = 0$, то G *пусто*.

3. Верхний интеграл от положительной функции

Для всякой (как конечной, так и бесконечной) числовой функции $f \geqslant 0$, определенной на X, существуют такие функции $h \in \mathcal{J}_+$, что $f \leqslant h$ (по крайней мере константа, равная $+\infty$).

Определение 3. *Пусть* μ — *положительная мера на* X; *для любой (конечной или нет) числовой функции* $f \geqslant 0$, *определенной на* X, *верхним интегралом от* f *(относительно* μ*) называется положительное (конечное или равное* $+\infty$*) число*

$$\mu^*(f) = \inf_{h \geqslant f,\ h \in \mathcal{J}_+} \mu^*(h).$$

Если $f \in \mathcal{J}_+$, то определенное таким путем число $\mu^*(f)$ равно верхнему интегралу, введенному в определении 1, поскольку μ^* возрастает на $\mathcal{J}_+$.

Наряду с обозначением $\mu^*(f)$ мы будем также использовать обозначения $\int^* f\,d\mu$, $\int^* f(x)\,d\mu(x)$, $\int^* f\mu$ и $\int^* f(x)\,\mu(x)$.

Пример. Если X — *дискретное* пространство, а μ — положительная мера на X, и если положить $\alpha(x) = \mu(\varphi_{(x)})$, то $\mu^*(f) = \sum_{x \in X} \alpha(x) f(x)$ для любой числовой функции $f \geqslant 0$ на X, поскольку такая функция непрерывна (п. 1, пример).

Предложение 10. *Если* f *и* g — *две положительные числовые функции, определенные на* X *и удовлетворяющие условию* $f \leqslant g$, *то* $\mu^*(f) \leqslant \mu^*(g)$.

Предложение 11. *Для любого конечного действительного числа* $\alpha > 0$ *и любой числовой функции* $f \geqslant 0$, *определенной на* X,

$$\mu^*(\alpha f) = \alpha \mu^*(f). \tag{8}$$

Предложение 12. *Если f_1 и f_2 — две положительные числовые функции, определенные на X, то*

$$\mu^*(f_1 + f_2) \leqslant \mu^*(f_1) + \mu^*(f_2). \tag{9}$$

В самом деле, для любой функции $h_1 \in \mathscr{J}_+$, для которой $f_1 \leqslant h_1$, и любой функции $h_2 \in \mathscr{J}_+$, для которой $f_2 \leqslant h_2$, в силу теоремы 2 имеем

$$\mu^*(f_1 + f_2) \leqslant \mu^*(h_1 + h_2) = \mu^*(h_1) + \mu^*(h_2),$$

откуда (Общая топ., гл. IV, § 5, п. 7, следствие 2 из предл. 12)

$$\mu^*(f_1+f_2) \leqslant \inf_{h_1 \geqslant f_1,\ h_1 \in \mathscr{J}_+} \mu^*(h_1) + \inf_{h_2 \geqslant f_2,\ h_2 \in \mathscr{J}_+} \mu^*(h_2),$$

что совпадает с неравенством (9).

Предложения 10, 11 и 12 выражают тот факт, что μ^* есть *возрастающая*, *положительная*, *однородная* и *выпуклая* функция на множестве положительных числовых функций, определенных на X (гл. I, п. 1). Отметим, что если f_1 и f_2 — две произвольные положительные функции, то левая и правая части в (9) могут не быть равными (§ 4, упр. 8d)); в § 5, п. 6 мы укажем условия, при которых будет иметь место равенство.

Теорема 3. *Для всякой возрастающей последовательности (f_n) положительных числовых функций, определенных на X, справедлива формула*

$$\mu^*(\sup_n f_n) = \sup_n \mu^*(f_n). \tag{10}$$

Поскольку каждая из функций f_n не превосходит $\sup_n f_n$, то все сводится к доказательству неравенства $\mu^*(\sup_n f_n) \leqslant \sup_n \mu^*(f_n)$, которое очевидно, когда правая часть равна $+\infty$, Если же правая часть конечна, то $\mu^*(f_n) < +\infty$ при любом n; мы покажем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такая *возрастающая* последовательность (g_n) функций из $\mathscr{J}_+$, что $f_n \leqslant g_n$ и $\mu^*(g_n) \leqslant \mu^*(f_n) + \varepsilon$. Если g есть верхняя огибающая последовательности (g_n), то $\mu^*(g) = \sup_n \mu^*(g_n)$ (п. 1, теорема 1), откуда $\mu^*(g) \leqslant \sup_n \mu^*(f_n) + \varepsilon$; а так как $\sup_n f_n \leqslant g$ и ε произвольно, то тем самым теорема будет доказана.

По условию существует такая функция $h_n \in \mathscr{J}_+$, что $f_n \leqslant h_n$ и $\mu^*(f_n) \leqslant \mu^*(h_n) \leqslant \mu^*(f_n) + \varepsilon/2^n$; покажем, что функции

$g_n = \sup(h_1, h_2, \ldots, h_n)$ удовлетворяют поставленному требованию. Они принадлежат $\mathcal{J}_+$, образуют возрастающую последовательность и $f_n \leqslant g_n$ для любых n; докажем, что

$$\mu^*(g_n) \leqslant \mu^*(f_n) + \varepsilon\left(1 - \frac{1}{2^n}\right).$$

Проведем индукцию по n; случай $n = 1$ тривиален. С другой стороны, $g_{n+1} = \sup(g_n, h_{n+1})$, $g_n \geqslant f_n$ и $h_{n+1} \geqslant f_{n+1} \geqslant f_n$, откуда $\inf(g_n, h_{n+1}) \geqslant f_n$; а так как

$$\inf(g_n, h_{n+1}) + \sup(g_n, h_{n+1}) = g_n + h_{n+1},$$

то из теоремы 2, п. 1 вытекает, что

$$\mu^*(g_{n+1}) = \mu^*(g_n) + \mu^*(h_{n+1}) - \mu^*(\inf(g_n, h_{n+1})) \leqslant$$
$$\leqslant \mu^*(g_n) + \mu^*(h_{n+1}) - \mu^*(f_n) \leqslant \mu^*(f_{n+1}) + \varepsilon\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} =$$
$$= \mu^*(f_{n+1}) + \varepsilon\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right).$$

Следствие. *Пусть* $\mathfrak{F}$ — *множество положительных числовых функций, фильрующееся по отношению* $\leqslant$ *и такое, что в* $\mathfrak{F}$ *существует конфинальное счетное подмножество* $\mathfrak{G}$ (Теория мн-в, гл. III, § 1, п. 7); *тогда*

$$\mu^*(\sup_{f \in \mathfrak{F}} f) = \sup_{f \in \mathfrak{F}} \mu^*(f). \tag{11}$$

В самом деле, существует возрастающая последовательность функций из $\mathfrak{G}$ с той же верхней огибающей, что и $\mathfrak{F}$: если (f_n) есть последовательность всех функций из $\mathfrak{G}$, произвольным образом упорядоченная, то через (f_{n_k}) обозначим ее подпоследовательность, определенную по индукции условиями $n_1 = 1$, $f_{n_{k+1}} \geqslant \geqslant \sup(f_{n_k}, f_k)$; ясно, что эта подпоследовательность обладает требуемыми свойствами.

Замечания. 1) Соотношение (11) не обязано выполняться если $\mathfrak{F}$ есть *несчетное* фильтрующееся множество положительных функций, не являющихся полунепрерывными снизу. Возьмем, к примеру, $X = \mathbf{R}$; обозначим через μ меру Лебега на $\mathbf{R}$ и рассмотрим фильтрующееся (по $\leqslant$) множество $\mathfrak{F}$ характеристических функций φ_M всех *конечных* подмножеств M из $\mathbf{R}$. Имеем $\mu^*(\varphi_M) = 0$ для любого конечного множества M, так как точка содержится в открытом интервале сколь угодно малой длины, и следовательно, характеристиче-

ская функция множества, сводящегося к точке, имеет верхний интеграл, равный нулю, что вытекает из определения 3 и предложения 9, п. 2. Но верхняя огибающая множества $\mathfrak{F}$ есть постоянная функция, равная 1, и $\mu^*(1) = +\infty$.

2) Заметим, что для *убывающей* последовательности положительных функций равенство $\mu^*(\inf_n f_n) = \inf_n \mu^*(f_n)$ может не выполняться, даже если $\mu^*(f_n) < +\infty$ при любом n (ср. § 4, упр. 8c)).

Предложение 13. *Для любой последовательности (f_n) положительных числовых функций, определенных на X, справедливо неравенство*

$$\mu^*\Big(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\Big) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(f_n) \tag{12}$$

Достаточно применить соотношение (10) к возрастающей последовательности функций $g_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$ и учесть, что согласно (9)

$$\mu^*(g_n) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \mu^*(f_k)$$

В § 5, п. 6 мы укажем условия, при которых в формуле (12) имеет место равенство.

Предложение 14 (лемма Фату). *Для любой последовательности (f_n) положительных числовых функций справедливо соотношение*

$$\mu^*(\varliminf_{n\to\infty} f_n) \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \mu^*(f_n). \tag{13}$$

Действительно, для любого целого n положим $g_n = \inf_{p\geqslant 0} f_{n+p}$; последовательность (g_n) возрастает, и $\varliminf_{n\to\infty} f_n = \sup_n g_n$; отсюда в силу (10) $\mu^*(\varliminf_{n\to\infty} f_n) = \sup_n \mu^*(g_n)$; но так как $g_n \leqslant f_{n+p}$ для $p \geqslant 0$, то $\mu^*(g_n) \leqslant \mu^*(f_{n+p})$, откуда $\mu^*(g_n) \leqslant \inf_{p\geqslant 0} \mu^*(f_{n+p})$, и окончательно, $\mu^*(\varliminf_{n\to\infty} f_n) \leqslant \sup_n (\inf_{p\geqslant 0} \mu^*(f_{n+p})) = \varliminf_{n\to\infty} \mu^*(f_n)$.

Следствие. *Пусть (f_n) — такая последовательность положительных числовых функций, что $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = +\infty$ для любого $x \in X$. Если мера μ отлична от нулевой, то $\lim_{n\to\infty} \mu^*(f_n) = +\infty$.*

Действительно, если f_0 — постоянная функция, равная $+\infty$, то f_0 является верхней огибающей всех функций из $\mathscr{K}_+$, а так как

$\mu \neq 0$, то $\mu^*(f_0) > 0$; но поскольку $f_0 = \alpha f_0$ для любого $\alpha > 0$, то $\mu^*(f_0) = +\infty$ (предл. 11). Неравенство (13) показывает теперь, что $\mu^*(f_n)$ стремится к $+\infty$ вместе с n.

Предложение 15. *Для любого скаляра $\alpha > 0$ и любой пары положительных мер μ, ν на X справедливы формулы*

$$(\alpha\mu)^* = \alpha\mu^*, \tag{14}$$

$$(\mu + \nu)^* = \mu^* + \nu^*. \tag{15}$$

Кроме того, соотношение $\mu \leqslant \nu$ влечет $\mu^* \leqslant \nu^*$.

Докажем равенство (15). Положим $\lambda = \mu + \nu$; тогда $\lambda(f) = \mu(f) + \nu(f)$ для $f \in \mathscr{K}_+$; для $f \in \mathscr{J}_+$ значение интеграла $\lambda^*(f)$ (соотв. $\mu^*(f)$, $\nu^*(f)$) есть предел интегралов $\lambda(g)$ (соотв. $\mu(g)$, $\nu(g)$), когда g пробегает фильтрующееся (по $\leqslant$) множество функций $g \in \mathscr{K}_+$, $g \leqslant f$; следовательно, $\lambda^*(f) = \mu^*(f) + \nu^*(f)$. Наконец, если f есть произвольная положительная функция, определенная на X, то $\lambda^*(f)$ (соотв. $\mu^*(f)$, $\nu^*(f)$) есть предел интегралов $\lambda^*(h)$ (соотв. $\mu^*(h)$, $\nu^*(h)$), когда h пробегает фильтрующееся (по $\geqslant$) множество функций $h \in \mathscr{J}_+$, $h \geqslant f$; таким образом, снова, переходя к пределу, получаем $\lambda^*(f) = \mu^*(f) + \nu^*(f)$, что и доказывает (15). Точно так же доказывается соотношение (14). И, наконец, если $\mu \leqslant \nu$, то можно написать $\nu = \mu + (\nu - \mu)$, где $\nu - \mu \geqslant 0$, и, значит, $\nu^* = \mu^* + (\nu - \mu)^*$, чем доказано, что $\mu^* \leqslant \nu^*$.

4. Внешняя мера произвольного множества

Определение 4. *Пусть μ — положительная мера на X; для любого подмножества A из X назовем внешней мерой A* (относительно меры μ) *и обозначим через $\mu^*(A)$ верхний интеграл $\mu^*(\varphi_A)$.*

Таким образом, внешняя мера множества есть положительное число, конечное или равное $+\infty$, совпадающее для открытых множеств с внешней мерой, введенной в определении 2, п. 2.

Предложение 16. *Если A и B — два подмножества из X и $A \subset B$, то $\mu^*(A) \leqslant \mu^*(B)$.*

Следствие. *Всякое относительно компактное множество из X имеет конечную внешнюю меру.*

В самом деле, такое множество содержится в некотором относительно компактном открытом множестве (Общ. топ., гл. I (3-е изд.), § 9, п. 7, предл. 10), внешняя мера которого конечна (п. 2, предл. 5).

Предложение 17. *Если* (A_n) *есть возрастающая последовательность подмножеств из* X, *то*

$$\mu^*(\bigcup_n A_n) = \sup_n \mu^*(A_n).$$

Предложение 18. *Для любой последовательности* (A_n) *подмножеств из* X *справедливо неравенство*

$$\mu^*(\bigcup_n A_n) \leqslant \sum_n \mu^*(A_n).$$

Эти предложения являются вариантами предложений 10 и 13 и теоремы 3, п. 3 применительно к характеристическим функциям множеств.

Предложение 19. *Для любого подмножества* $A \subset X$ $\mu^*(A)$ *есть нижняя грань внешних мер открытых множеств, содержащих* A.

Предложение очевидно, если $\mu^*(A) = +\infty$. В противном случае для любого ε, $0 < \varepsilon < 1$, существует такая функция $f \in \mathcal{J}_+$, что $\varphi_A \leqslant f$ и $\mu^*(A) \leqslant \mu^*(f) \leqslant \mu^*(A) + \varepsilon$. Пусть G есть множество тех $x \in X$, в которых $f(x) > 1 - \varepsilon$. Поскольку f полунепрерывна снизу, то G *открыто* (Общая топ., гл. IV, § 6, п. 2, предл. 1) и содержит A; с другой стороны, $f \geqslant (1 - \varepsilon)\,\varphi_G$, и поэтому $\mu^*(G) \leqslant \frac{1}{1-\varepsilon}\mu^*(f) \leqslant \frac{1}{1-\varepsilon}(\mu^*(A) + \varepsilon)$; а так как ε произвольно, то $\mu^*(G)$ сколь угодно мало отличается от $\mu^*(A)$, откуда и следует предложение.

Упражнения

1) Показать, что если f и g — две положительные числовые функции на X и μ — положительная мера на X, то

$$\mu^*(\sup(f, g)) + \mu^*(\inf(f, g)) \leqslant \mu^*(f) + \mu^*(g).$$

Вывести отсюда, что если A и B — произвольные множества из X, то $\mu^*(A \cup B) + \mu^*(A \cap B) \leqslant \mu^*(A) + \mu^*(B)$ (ср. § 4, упр. 8d)).

2) Показать, что, каково бы ни было $x \in X$, $\varepsilon_x^*(f) = f(x)$ для любой числовой функции $f \geqslant 0$ на X.

3) Привести пример открытого множества из $\mathbf{R}$, не являющегося относительно компактным и имеющего конечную внешнюю меру (относительно меры Лебега).

4) Пусть X — локально компактное пространство, α — такая положительная числовая конечная функция на X, что для любого компактного подмножества K из X сумма $\sum_{x\in K} \alpha(x)$ конечна; пусть μ — положительная мера на X, определенная при помощи масс $\alpha(x)$ (гл. III, § 1, п. 1, пример 1).

a) Показать, что для любой полунепрерывной снизу функции $f \geqslant 0$ на X $\mu^*(f) = \sum_{x\in X} \alpha(x) f(x)$, если условиться, что $\alpha(x) f(x) = 0$, когда $\alpha(x) = 0$ и $f(x) = +\infty$.

b) Пусть $f \geqslant 0$ — произвольная числовая функция на X. Показать, что если $\mu^*(f) < +\infty$, то $\mu^*(f) = \sum_{x\in X} \alpha(x) f(x)$ с тем же соглашением, что и в a). (Ср. упр. 5).

°5) Пусть W — подмножество плоскости $\mathbf{R}^2$, состоящее из прямой $D = \{0\} \times \mathbf{R}$ и из точек $(1/n, k/n^2)$, где n пробегает множество целых строго положительных чисел, а k — множество $\mathbf{Z}$ целых рациональных чисел.

a) Для любой точки $(0, y)$ прямой D и любого целого $n > 0$ обозначим через $T_n(y)$ множество таких точек (u, v) из X, что $u \leqslant 1/n$ и $|v - y| \leqslant u$. Показать, что если в качестве фундаментальной системы окрестностей каждой точки $(0, y)$ из D взять множества $T_n(y)$, $n > 0$, а в качестве фундаментальной системы окрестностей каждой из остальных точек множества X — единственное множество, сводящееся к этой точке, то в X будет определена топология $\mathscr{T}$, относительно которой X является локально компактным, но не паракомпактным пространством.

b) Пусть числовая функция α на X равна 0 на D и равна $1/n^3$ в каждой из точек $(1/n, k/n^2)$. Показать, что для любого компактного множества $K \subset X$ сумма $\sum_{x\in K} \alpha(x)$ конечна. Пусть μ — положительная мера на X, определенная при помощи масс $\alpha(x)$. Показать, что $\mu^*(D) = +\infty$, хотя $\alpha(x) = 0$ на D. (Показать, что если открытое относительно $\mathscr{T}$ множество U содержит D, то существуют такой интервал $a \leqslant y \leqslant b$ в D, не сводящийся к одной точке, такое множество B, всюду плотное (относительно обычной топологии в $\mathbf{R}$) на этом интервале и такое целое $n > 0$, что для любого $y \in B$ $T_n(y) \subset U$; использовать для этого теорему Бэра).

6) Пусть $f \geqslant 0$ — числовая функция на X.

a) Показать, что для того, чтобы отображение $\mu \mapsto \mu^*(f)$ пространства $\mathscr{M}_+(X)$ в $\overline{\mathbf{R}}$ было непрерывно в широкой топологии, необходимо (и достаточно), чтобы f была непрерывна и имела компактный носитель

(использовать упр. 2). Для того чтобы отображение $\mu \mapsto \mu^*(f)$ было полунепрерывно снизу в широкой топологии, необходимо (и достаточно, ср. предл. 4), чтобы f была полунепрерывна снизу.

b) Показать, что для того, чтобы отображение $\mu \mapsto \mu^*(f)$ пространства $\mathscr{M}_+(X)$ в $\overline{\mathbf{R}}$ было непрерывно в квазисильной топологии (гл. III, § 1, упр. 8), необходимо и достаточно, чтобы f была ограничена и имела компактный носитель (метод, аналогичный применяемому в a). Вывести отсюда, что для любой функции $f \geqslant 0$, обращающейся в нуль на дополнении счетного объединения компактных множеств, отображение $\mu \mapsto \mu^*(f)$ полунепрерывно снизу в квазисильной топологии (использовать теорему 3) (ср. упр. 7b)).

c) Показать, что для того чтобы отображение $\mu \mapsto \mu^*(f)$ пересечения $\mathscr{M}_+(X) \cap \mathscr{M}^1(X)$ в $\overline{\mathbf{R}}$ было непрерывно в ультрасильной топологии (гл. III, § 1, упр. 15), необходимо и достаточно, чтобы f была ограничена; для любой функции $f \geqslant 0$ на X отображение $\mu \mapsto \mu^*(f)$ полунепрерывно снизу в ультрасильной топологии.

d) Показать, что для того чтобы отображение $\mu \mapsto \mu^*(f)$ пересечения $\mathscr{M}_+(X) \cap \mathscr{M}^1(X)$ в $\overline{\mathbf{R}}$ было непрерывно в слабой топологии (гл. III, § 1, упр. 15), необходимо и достаточно, чтобы f была непрерывна на X и стремилась к 0 в бесконечно удаленной точке; для того чтобы $\mu \mapsto \mu^*(f)$ было полунепрерывно снизу в слабой топологии, необходимо и достаточно, чтобы f была полунепрерывна снизу.

7) a) Пусть (μ_n) — возрастающая последовательность положительных мер на локально компактном пространстве X; предположим, что эта последовательность мажорирована в $\mathscr{M}_+(X)$, и обозначим через μ ее верхнюю грань. Пусть функция $f \geqslant 0$ определена на X и обращается в нуль на дополнении к счетному объединению компактных множеств. Показать, что $\mu^*(f) = \sup_n \mu_n^*(f)$ (ср. упр. 6b)).

b) Пусть X и μ — локально компактное пространство и мера, определенные в упр. 5. Пусть α_n — числовая функция, равная α (обозначения упр. 5) во всякой точке $(1/m, k/m^2)$, такой, что $m \leqslant n$, и равная 0 в остальных точках из X; пусть μ_n — мера, определенная при помощи масс $\alpha_n(x)$. Показать, что μ есть верхняя грань последовательности (μ_n) в $\mathscr{M}_+(X)$ и что $\mu_n^*(D) = 0$ для любого n, но $\mu^*(D) = +\infty$.

8) a) Пусть (μ_n) — убывающая последовательность положительных мер на локально компактном пространстве X, и пусть μ — нижняя грань этой последовательности в $\mathscr{M}_+(X)$. Показать, что для любой функции $f \geqslant 0$, для которой, начиная с некоторого номера, $\mu_n^*(f) < +\infty$, имеет место соотношение $\mu^*(f) = \inf_n \mu_n^*(f)$ (в случае, когда $g \geqslant 0$ полунепрерывна снизу и такова, что $\mu^*(g) < +\infty$,

заметить, что существует такая последовательность (h_m) непрерывных положительный функций с компактным носителем, что $\sum_{m=1}^{\infty} h_m \leqslant g$ и что $\mu_n^*(g) = \sum_{m=1}^{\infty} \mu_n^*(h_m)$ для *любого* индекса n).

b) Пусть на дискретном пространстве $X = \mathbf{N}$ определена мера μ_n при помощи массы $+1$, расположенной в каждой точке $m \geqslant n$. Показать, что нижняя грань убывающей последовательности (μ_n) равна 0 в $\mathscr{M}_+(X)$, в то время как $\mu_n^*(X) = +\infty$ для любого n.

§ 2. Пренебрежимые функции и множества

1. Положительные пренебрежимые функции

Определение 1. *Если на локально компактном пространстве X задана мера μ, то говорят, что числовая (конечная или бесконечная) функция $f \geqslant 0$, определенная на X, пренебрежима относительно меры μ, если $|\mu|^*(f) = 0$.*

В этом случае говорят также, что f *μ-пренебрежима* или, если это не влечет путаницы, просто *пренебрежима*.

Предложение 1. *Если $f \geqslant 0$ — пренебрежимая функция, то всякая числовая функция g, удовлетворяющая условиям $0 \leqslant g \leqslant \alpha f$ ($\alpha > 0$ — скаляр), пренебрежима.*

Действительно, $0 \leqslant |\mu|^*(g) \leqslant \alpha\,|\mu|^*(f) = 0$.

Предложение 2. *Сумма и верхняя огибающая последовательности (f_n) положительных пренебрежимых функций пренебрежимы.*

Действительно,

$$|\mu|^*\left(\sum_n f_n\right) \leqslant \sum_n |\mu|^*(f_n) = 0$$

(§ 1, п. 3, предл. 13) и $\sup_n f_n \leqslant \sum_n f_n$.

Предложение 3. *Для того чтобы функция $f \geqslant 0$, полунепрерывная снизу на X, была пренебрежима, необходимо и достаточно, чтобы она обращалась в нуль на носителе меры μ.*

В самом деле, если $|\mu|^*(f) = 0$, то $|\mu|(g) = 0$ для любой функции $g \in \mathscr{K}_+$, $g \leqslant f$; отсюда следует (гл. III, § 2, п. 3, предл. 9),

что g обращается в нуль на носителе S меры μ; а поскольку f есть верхняя огибающая функций $g \in \mathscr{K}_+$, $g \leqslant f$ (§ 1, п. 1, лемма 1), то $f(x) = 0$ на S. Обратно, если $f(x) = 0$ на S, то $g(x) = 0$ на S для любой функции $g \in \mathscr{K}_+$, $g \leqslant f$, и значит (гл. III, § 3, п. 3, предл. 8), $|\mu|(g)=0$, что, по определению, влечет $|\mu|^*(f)=0$.

2. Пренебрежимые множества

Определение 2. *Если на локально компактном пространстве X задана мера μ, то говорят, что подмножество $A \subset X$ пренебрежимо относительно меры μ, если $|\mu|^*(A) = 0$.*

Говорят еще, что A *μ-пренебрежимо* или, если это не влечет путаницы, просто *пренебрежимо*. Это определение равносильно тому, что характеристическая функция φ_A пренебрежима.

Предложение 4. *Всякое подмножество пренебрежимого множества пренебрежимо; всякое счетное объединение пренебрежимых множеств пренебрежимо.*

Это следует непосредственно из предложений 1 и 2.

Пример. Пусть μ — мера Лебега на $\mathbf{R}$. Всякое сводящееся к точке множество $\{x_0\}$ пренебрежимо (ср. § 1, п. 3, замечание 1). Отсюда следует, что *всякое счетное множество из* $\mathbf{R}$ *пренебрежимо относительно меры Лебега*. Обратное утверждение неверно (§ 4, упр. 4b)).

Предложение 5. *Дополнение носителя S меры μ есть наибольшее открытое пренебрежимое множество в X.*

Действительно, в силу предложения 3, для того чтобы открытое множество G было пренебрежимо, необходимо и достаточно, чтобы $G \cap S = \varnothing$, т. е. $G \subset \complement S$.

3. Свойства, справедливые почти всюду

Пусть X — локально компактное пространство и μ — положительная мера на X. Если $P\{x\}$ есть некоторое свойство, то свойство «$P\{x\}$ *почти всюду* (*относительно* μ)», по определению, эквивалентно свойству «*множество тех* $x \in X$, *для которых не выполняется* $P\{x\}$, *μ-пренебрежимо*».

Теорема 1. *Для того чтобы числовая (конечная или бесконечная) функция $f \geqslant 0$, определенная на X, была пренебрежима, необходимо и достаточно, чтобы $f(x) = 0$ почти сюду.*

Условие *необходимо*. Действительно, предположим, что f пренебрежима, и пусть N — множество тех $x \in X$, в которых $f(x) \neq 0$; тогда $\varphi_N \leqslant \sup_n (nf)$, и значит, φ_N пренебрежима (п. 1, предл. 1 и 2).

Условие *достаточно*. В самом деле, допустим, что множество N точек, в которых $f(x) \neq 0$, пренебрежимо; тогда $f \leqslant \sup_n n\varphi_N$, и, следовательно, f пренебрежима (предл. 1 и 2).

Предложение 6. *Если f и g — две (конечные или нет) положительные функции, определенные на X и такие, что $f(x) = g(x)$ почти всюду, то $|\mu|^*(f) = |\mu|^*(g)$.*

В самом деле, пусть N — пренебрежимое множество тех точек $x \in X$, в которых $f(x) \neq g(x)$. Поскольку функции $\inf(f, g)$ и $\sup(f, g)$ равны между собой всюду, кроме точек множества N, то достаточно доказать предложение для случая $f \leqslant g$. Обозначим через h функцию, равную $+\infty$ в точках множества N и 0 на $\complement N$; тогда $f \leqslant g \leqslant f + h$, откуда

$$|\mu|^*(f) \leqslant |\mu|^*(g) \leqslant |\mu|^*(f + h) \leqslant$$

$$\leqslant |\mu|^*(f) + |\mu|^*(h) = |\mu|^*(f)$$

(ибо h пренебрежима), из чего и следует предложение.

Предложение 7. *Если функция $f \geqslant 0$ определена на X и такова, что $|\mu|^*(f) < +\infty$, то $f(x)$ конечна почти всюду.*

В самом деле, пусть N — множество тех точек $x \in X$, где $f(x) = +\infty$; для любого целого n имеем $n\varphi_N \leqslant f$, откуда

$$n\,|\mu|^*(\varphi_N) \leqslant |\mu|^*(f);$$

а так как n сколь угодно велико, то $|\mu|^*(N) = 0$.

Обратное утверждение неверно: даже когда X компактно, функция $f \geqslant 0$, определенная на X и конечная всюду, может иметь бесконечный верхний интеграл, как показывает пример, в котором $X = [0, 1]$, $f(x) = 1/x$ для $x > 0$ и $f(0) = 0$, а μ есть мера Лебега на X.

4. *Классы эквивалентных функций*

Пусть μ — мера на локально компактном пространстве X и F — некоторое множество. Два отображения f, g пространства X в F называются *эквивалентными относительно* μ (или *μ-эквивалентными*, а также, если это не влечет путаницы, просто *эквивалентными*), если $f(x) = g(x)$ *почти всюду* на X. Поскольку объединение двух пренебрежимых множеств пренебрежимо, то тем самым определено отношение эквивалентности в множестве F^X всех отображений пространства X в F. Когда мы будем говорить о *классе эквивалентности* такой функции f (без дальнейших уточнений), то будет подразумеваться, что речь идет о классе функций, равных f почти всюду; в этой и последующих главах мы будем обозначать этот класс $\tilde{f}$.

Предложение 8. *Пусть (F_n) — счетное (конечное или бесконечное) семейство множеств. Для любого индекса n обозначим через f_n, g_n два эквивалентных отображения пространства X в F; тогда найдется такое пренебрежимое множество H, что для любого $x \notin H$ равенство $f_n(x) = g_n(x)$ выполняется при любом n.*

Действительно, множество H_n тех $x \in X$, в которых $f_n(x) \neq g_n(x)$, пренебрежимо, а значит, пренебрежимо и их объединение H (п. 2, предл. 4), которое и обладает нужным свойством.

Следствие. *Если φ есть отображение $\prod_n F_n$ в множество G, то отображения $\varphi((f_n))$, $\varphi((g_n))$ пространства X в G эквивалентны.*

Обозначим теперь через $\varphi((\tilde{f}_n))$ класс эквивалентности любой функции $\varphi((f_n))$, когда f_n есть произвольная функция класса $\tilde{f}_n$.

В частности, если F есть *векторное пространство* над $\mathbf{R}$, то $\tilde{f} + \tilde{g}$ и $\alpha\tilde{f}$ определяются соответственно как классы эквивалентности для $f + g$ и αf (f и g — отображения X в F, α — скаляр); тем самым в множестве классов эквивалентности отображений пространства X в F установлена структура *векторного пространства*; при этом она является структурой *факторпространства* пространства F^X всех отображений f по подпространству отображений $\tilde{f} \in \tilde{0}$ (функций, обращающихся в нуль почти всюду), которые также называют *пренебрежимыми* функциями

(со значениями в F). Точно так же определяется произведение $\tilde{g}\tilde{f}$, где $\tilde{f}$ есть класс эквивалентности отображений пространства X в F, а $\tilde{g}$ — класс эквивалентности (конечных) числовых функций, определенных на X; таким образом, множество классов эквивалентности отображений пространства X в F наделено структурой *модуля* над множеством классов эквивалентности определенных на X конечных числовых функций (которое в свою очередь наделено структурой *кольца*). Если F есть *алгебра* над $\mathbf{R}$, то определена также структура *алгебры* в множестве классов эквивалентности отображений пространства X в F.

Пусть F — *метризуемое* топологическое пространство. Рассмотрим в F равномерную структуру, согласующуюся с его топологией и определенную при помощи *счетного* семейства отклонений ρ_n (Общая топ., гл. IX, §§ 1 и 2); для того чтобы два отображения f, g пространства X в F были эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы числовые функции $\rho_n(f, g)$ были *пренебрежимы*; действительно, это равносильно утверждению, что в X найдется такое пренебрежимое множество H, что для любого $x \neq H$ равенство $\rho_n(f(x), g(x)) = 0$ справедливо при любом n, т. е. $f(x) = g(x)$. В частности, если F есть метризуемое локально выпуклое пространство, а (q_n) — счетное семейство полунорм, определяющее топологию в F (Топ. вект. пр-ва, гл. II, § 5), то для того, чтобы два отображения f, g пространства X в F были эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы все числовые функции $q_n(f(x) - g(x))$ были пренебрежимы.

Предложение 9. *Пусть f и g — два непрерывных отображения пространства X в отделимое топологическое пространство F; для того чтобы f и g были эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы $f(x) = g(x)$ в каждой точке носителя меры μ.*

Действительно, множество тех $x \in X$, в которых $f(x) \neq g(x)$, открыто (Общая топ., гл. I (3-е изд.), § 8); для того чтобы оно было пренебрежимым, необходимо и достаточно, чтобы оно не имело общих точек с носителем меры μ (п. 2, предл. 5).

Отметим еще следующий результат:

Предложение 10. *Пусть F — такое отделимое локально выпуклое пространство над $\mathbf{R}$, что в сопряженном к нему простран-*

стве F' существует последовательность (a'_n), всюду плотная в слабой топологии $\sigma(F', F)$ (Топ, вект. пр-ва, гл. II (2-е изд.), § 6, п. 2). *Для того чтобы два отображения f, g пространства X в F были эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы при любом n числовые функции $\langle f(x), a'_n\rangle$ и $\langle g(x), a'_n\rangle$ были эквивалентны.*

Необходимость очевидна. Обратно, если это условие выполняется, то найдется такое пренебрежимое множество H, что для любого $x \notin H$ равенство $\langle f(x), a'_n\rangle = \langle g(x), a'_n\rangle$ выполняется при *любом* n; это означает, что слабо непрерывные на F' линейные формы $z' \mapsto \langle f(x), z'\rangle$ и $z' \mapsto \langle g(x), z'\rangle$ равны между собой в в каждой из точек a'_n и, стало быть, согласно предположению, совпадают, чем доказано, что $f(x) = g(x)$ для любого $x \notin H$.

Отметим, что условие предложения 10 применимо, в частности, к случаю, когда F есть метризуемое локально выпуклое пространство счетного типа (Топ. вект. пр-ва, гл. IV, § 2, п. 2, следствие из предл. 3).

5. *Функции, определенные почти всюду*

В соответствии с определением из п. 3, говорят, что отображение f множества A из X в множество F *определено почти всюду*, если дополнение множества A есть пренебрежимое множество. *Классом эквивалентности* отображения f называют, и обозначают через $\tilde{f}$, класс эквивалентности всякой функции, определенной на всем X и равной $f(x)$ в тех точках $x \in X$, в которых f определена; ясно, что этот класс зависит только от f. Говорят, что две функции f, g, определенные почти всюду, *эквивалентны*, если $\tilde{f} = \tilde{g}$: это означает, что множество точек, в которых обе функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и равны, имеет пренебрежимое дополнение.

Легко видеть, что предложение 8 из п. 4 и его следствие обобщаются на тот случай, когда в их формулировках предполагается лишь, что каждая из функций f_n, g_n определена почти всюду; тогда функции $\varphi((f_n))$ и $\varphi((g_n))$ тоже определены почти всюду; классом эквивалентности функции $\varphi((f_n))$ снова будет $\varphi((\tilde{f}_n))$.

Функция, определенная почти всюду и принимающая значения в векторном пространстве F, по-прежнему называется *пренебрежимой*, если она эквивалентна 0. Если f есть пренебрежимая

функция со значениями в F, а u — линейное отображение пространства F в векторное пространство G, то сложная функция $u \circ f$ (определенная почти всюду) пренебрежима; точно так же для всякой (конечной) числовой функции g, определенной почти всюду, функция gf (определенная почти всюду) пренебрежима.

Следует отметить, что в множестве функций, определенных почти всюду и принимающих значения в F, внутренний закон композиции $(f, g) \mapsto f+g$ *не является законом группы*, так как нейтральным элементом для этого закона является функция 0, но в то же время, если f определена не всюду, то не существует такой функции g, что $f+g=0$. Именно это служит причиной введения классов эквивалентности $\tilde{f}$, которые уже образуют векторное пространство.

Пусть (f_n) — последовательность отображений в *топологическое пространство* F, причем каждое из них определено почти всюду на X. Говорят, что последовательность (f_n) *сходится (просто) к f почти всюду на X*, если дополнение множества точек $x \in X$, в которых все функции $f_n(x)$ определены и последовательность $(f_n(x))$ имеет предел, равный $f(x)$, пренебрежимо. Ясно, что если для каждого n функция g_n (определенная почти всюду) эквивалентна f_n, то последовательность (g_n) сходится к f почти всюду.

Если F есть *топологическое векторное пространство*, то так же определяется *почти всюду сходящийся ряд*, общим членом которого служит функция f_n, определенная почти всюду на X и принимающая значения в F; суммой этого ряда является функция, определенная в тех точках, в которых определены и имеют предел частичные суммы $\sum_{k=1}^{n} f_k(x)$, и ее класс зависит лишь от классов $\tilde{f}_n$.

6. *Классы эквивалентности функций со значениями в* $\overline{\mathbf{R}}$

Согласуясь с определением из п. 3, говорят, что функция f, определенная почти всюду на X и принимающая значения в $\overline{\mathbf{R}}$, *конечна почти всюду*, если множество тех $x \in X$, в которых $f(x)$ определена и конечна, имеет пренебрежимое дополнение. Функция, конечная почти всюду, эквивалентна *всюду конечной* функции; значит, ее класс $\tilde{f}$ можно отождествить с классом *конечных* число-

вых функций, определенных на X (или почти всюду на X). В частности, определены сумма и произведение двух классов почти всюду конечных функций, и множество этих классов составляет *алгебру* над $\mathbf{R}$. Если (f_n) — последовательность функций со значениями в $\overline{\mathbf{R}}$, определенных и конечных почти всюду, то частичные суммы $\sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ определены почти всюду; если они почти для всех $x \in X$ имеют предел $f(x)$ в $\overline{\mathbf{R}}$, то говорят еще, что ряд с общим членом f_n сходится почти всюду и f есть сумма этого ряда (отметим, что f не обязательно конечна почти всюду).

Если f и g — две числовые функции, определенные и конечные почти всюду на X, то $\widetilde{f} + \widetilde{g}$ (соотв. $\widetilde{f}\widetilde{g}$) есть класс всякой функции, равной $f(x) + g(x)$ (соотв. $f(x)\,g(x)$) в тех точках $x \in X$, где это выражение имеет смысл. Отметим, что f и g могут быть обе *всюду определены* и в то же время $f(x)+g(x)$ (соотв. $f(x)\,g(x)$) будет определена не для всех x (Общая топ., гл. IV, § 4, п. 3); тогда, по определению, $f + g$ (соотв. fg) есть функция, равная $f(x)+g(x)$ (соотв. $f(x)\,g(x)$) в тех точках, где это выражение определено; таким образом, оно определено лишь почти всюду.

Пусть f и g — две (не обязательно конечные) числовые функции, определенные почти всюду на X и такие, что $f(x) \leqslant g(x)$ почти всюду; если f_1 эквивалентна f, а g_1 эквивалентна g, то очевидно, что и $f_1(x) \leqslant g_1(x)$ почти всюду. Следовательно, рассматриваемое отношение зависит лишь от классов функций f и g; для него используется запись $\widetilde{f} \leqslant \widetilde{g}$, и легко видеть, что это отношение есть *отношение порядка* в множестве классов эквивалентности функций со значениями в $\overline{\mathbf{R}}$. Если $(\widetilde{f}_n)$ есть (конечное или бесконечное) счетное семейство таких классов и если для любого n функции f_n и g_n определены почти всюду и принадлежат классу $\widetilde{f}_n$, то из предложения 8, п. 4 вытекает, что определенные почти всюду функции $\sup_n f_n$ и $\sup_n g_n$ эквивалентны; значит, их класс зависит лишь от классов $\widetilde{f}_n$, и легко видеть, что он есть *верхняя грань* $\sup_n \widetilde{f}_n$ классов $\widetilde{f}_n$ в множестве классов функций со значениями в $\overline{\mathbf{R}}$, упорядоченном только что указанным способом (следовательно, это множество является, в частности, *решеткой*). Точно так же

доказывается существование нижней грани $\inf_n \widetilde{f}_n$, и мы имеем $\inf_n \widetilde{f}_n = -\sup_n (-\widetilde{f}_n)$. Отсюда следует, что $\lim_{n\to\infty} . \sup f_n$, $\lim_{n\to\infty} . \sup g_n$ тоже эквивалентны и их класс, обозначаемый через $\lim_{n\to\infty} . \sup \widetilde{f}_n$, равен $\inf_n (\sup_{p\geqslant 0} \widetilde{f}_{n+p})$; точно так же определяется $\lim_{n\to\infty} . \inf \widetilde{f}_n$.

Конечная или бесконечная числовая функция f называется *пренебрежимой*, если она эквивалентна 0; это определение, согласно теореме 1, равносильно определению 1 для положительных определенных всюду функций. Для того чтобы f была пренебрежимой, необходимо и достаточно, чтобы этим свойством обладала $|f|$ (или чтобы обе функции f^+ и f^- были пренебрежимы).

§ 3. Пространства L^p

1. Неравенство Минковского

Пусть X — локально компактное пространство и μ — положительная мера на X. Функция $|\mu|^*(f)$, определенная на множестве *положительных* (конечных или бесконечных) числовых функций на X, *положительна*, *положительно однородна*, *выпукла* и *возрастает* (§ 1, п. 3, предл. 10, 11 и 12).

Предложение 1. *Для любого конечного действительного числа $p \geqslant 1$ и любой пары определенных на X (конечных или бесконечных) положительных функций f, g выполняется неравенство*

$$(|\mu|^*((f+g)^p))^{1/p} \leqslant (|\mu|^*(f^p))^{1/p} + (|\mu|^*(g^p))^{1/p} \qquad (1)$$

(*неравенство Минковского*).

В самом деле, неравенство (1) очевидно, если один из членов в правой части равен $+\infty$. Если же правая часть (1) конечна, то f и g *конечны почти всюду* (§ 2, п. 3, предл. 7). Если f_1 и g_1 — две конечные положительные функции, эквивалентные, соответственно, f и g, то f_1^p, g_1^p, $(f_1+g_1)^p$ эквивалентны, соответственно, f^p, g^p, $(f+g)^p$, а поскольку две эквивалентные положительные функции имеют один и тот же верхний интеграл (§ 2, п. 3, предл. 6), то все сводится к доказательству формулы (1), когда f и g — конечные всюду функции; но тогда неравенство является частным случаем общего неравенства Минковского, доказанного в гл. I, п. 2, предл. 3.

Мы будем также пользоваться следующим элементарным неравенством: если $p \geqslant 1$, то для любых чисел $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ справедливо неравенство

$$a^p + b^p \leqslant (a + b)^p. \tag{2}$$

Действительно, при $a = b = 0$, $a = \infty$ или $b = +\infty$ неравенство очевидно, а если $a + b > 0$ (a, b конечны), оно записывается в виде $\left(\frac{a}{a+b}\right)^p + \left(\frac{b}{a+b}\right)^p \leqslant 1$ и вытекает из того, что

$$\left(\frac{a}{a+b}\right)^p \leqslant \frac{a}{a+b}, \quad \left(\frac{b}{a+b}\right)^p \leqslant \frac{b}{a+b} \quad \text{и} \quad \frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b} = 1.$$

2. *Полунормы* N_p

В дальнейшем через F будет обозначаться *полное нормированное* векторное пространство (банахово пространство) над полем $\mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$; *норма* элемента $z \in F$ будет обозначаться через $|z|$. Если задано отображение f множества A в F, то $|f|$ будет означать отображение $x \mapsto |f(x)|$ множества A в $\mathbf{R}_+$ (следует отметить, что $|f|$ есть *числовая функция*, а не *число*).

Определение 1. *Пусть X — локально компактное пространство и μ — мера на X. Для любого отображения f пространства X в банахово пространство F и любого числа p, $1 \leqslant p < +\infty$, через $N_p(f, \mu)$ или просто $N_p(f)$ обозначается положительное число* $\left(\int^* |f|^p \, d\,|\mu|\right)^{1/p}$.

Отметим, что число $N_p(f)$ может оказаться равным $+\infty$.

Предложение 2. *Если f и g — два отображения пространства X в F и $\alpha \neq 0$ — произвольный скаляр, то для $1 \leqslant p < +\infty$*

$$N_p(\alpha f) = |\alpha| \, N_p(f), \tag{3}$$

$$N_p(f + g) \leqslant N_p(f) + N_p(g). \tag{4}$$

В самом деле, соотношение (3) сразу вытекает из определения 1 и из того факта, что $|\mu|^*$ положительно однородна; с другой стороны, поскольку $|f + g| \leqslant |f| + |g|$, то неравенство (4) следует из неравенства Минковского (1) и из того факта, что $|\mu|^*$ возрастает.

Мы распространим определение 1 на случай определенных на X *конечных или бесконечных* числовых функций, положив снова

$$N_p(f) = \left(\int^* |f|^p d|\mu|\right)^{1/p}$$

для такой функции f. Легко видеть, что соотношения (3) и (4) снова выполняются для этих функций, когда $f+g$ определена на X и $\alpha \neq 0$. Справедлива также

Теорема 1 (теорема о счетной выпуклости). *Пусть* (f_n) — *последовательность* (*конечных или бесконечных*) *положительных функций, определенных на* X. *Для* $1 \leqslant p < +\infty$ *имеет место неравенство*

$$N_p\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} N_p(f_n). \tag{5}$$

В самом деле, положим $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$; f есть верхняя огибающая возрастающей последовательности функций $g_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$; определение $N_p(f)$ и теорема 3 из § 1, п. 3 показывают, что $N_p(f) = \sup_n N_p(g_n)$. Но в силу предложения 2 $N_p(g_n) \leqslant \sum_{k=1}^{n} N_p(f_k)$, откуда следует неравенство (5).

Предложение 3. *Если* f *и* g — *два эквивалентных отображения пространства* X *в банахово пространство* F, *то* $N_p(f-g) = 0$ *для* $1 \leqslant p < +\infty$; *обратно, если* $N_p(f-g) = 0$ *для некоторого значения* $p \geqslant 1$, *то* f *и* g *эквивалентны.*

Предложение сразу вытекает из теоремы 1 § 2, п. 3.

Если f и g — два эквивалентных отображения пространства X в F, то $N_p(f) = N_p(g)$ для любого $p \geqslant 1$ (§ 2, п. 3, предл. 6); следовательно, $N_p(f)$ зависит лишь от класса $\tilde{f}$ функции f, и, по определению, полагают $N_p(\tilde{f}) = N_p(f)$. Так как классы отображений пространства X в F образуют векторное пространство (§ 2, п. 4), то соотношения (3) и (4) могут быть также записаны в виде

$$N_p(\alpha\tilde{f}) = |\alpha| N_p(\tilde{f}), \tag{6}$$

$$N_p(\tilde{f}+\tilde{g}) \leqslant N_p(\tilde{f}) + N_p(\tilde{g}). \tag{7}$$

Точно так же определяется $N_p(\tilde{f})$ для любого класса эквивалентных (конечных или бесконечных) числовых функций.

Следовательно, можно определить $N_p(f)$ для функции со значениями в F (соотв. в $\overline{\mathbf{R}}$), определенной почти всюду на X, положив $N_p(f) = N_p(\tilde{f})$; легко видеть, что в этом случае соотношения (3) и (4) снова верны (предполагается, что $\alpha \neq 0$ и $f + g$ определена почти всюду, если речь идет о конечных или бесконечных числовых функциях).

Если $0 < p < 1$, то полагают также $N_p(f) = \left(\int^* |f|^p d|\mu| \right)^{1/p}$, но неравенства (4) и (5) же не выполняются (ср. гл. I, упр. 5 и гл. IV, § 6, упр. 13).

3. Пространства $\mathscr{F}_F^p$

Пусть F — банахово пространство и $\mathscr{F}(X; F)$ (или просто $\mathscr{F}_F$) — векторное пространство всех отображений пространства X в F. Для $1 \leqslant p < +\infty$ обозначим через $\mathscr{F}^p(X, \mu; F)$ или $\mathscr{F}_F^p(X, \mu)$, или просто $\mathscr{F}_F^p(\mu)$, а также (если это не влечет никакой путаницы) $\mathscr{F}_F^p$ множество отображений f пространства X в F, для которых $N_p(f) < +\infty$ (вместо $\mathscr{F}_{\mathbf{R}}^p$ пишется $\mathscr{F}^p$). Ясно, что $\mathscr{F}_F^p(|\mu|) = \mathscr{F}_F^p(\mu)$. Из предложения 2, п. 2 сразу вытекает, что $\mathscr{F}_F^p$ есть *векторное подпространство* пространства $\mathscr{F}_F$ и что $N_p(f)$ есть *полунорма* на этом пространстве. Мы будем всюду (где не оговаривается противное) предполагать, что $\mathscr{F}_F^p$ наделено топологией, определяемой этой полунормой; будем говорить, что эта топология есть *топология сходимости в среднем порядка p* (для $p = 1$ ее называют просто *топологией сходимости в среднем*; для $p = 2$ говорят также, что это «топология сходимости в среднем квадратичном»). Будем говорить, что фильтр $\mathfrak{S}$ в $\mathscr{F}_F^p$, сходящийся к f в этой топологии (соотв. последовательность (f_n) элементов из $\mathscr{F}_F^p$), *сходится в среднем порядка p* к f; это означает, что $N_p(g - f)$ стремится к 0 по фильтру $\mathfrak{S}$ (соотв., что $N_p(f_n - f)$ стремится к 0 при неограниченном возрастании n).

Введенная терминология непосредственно распространяется на случай, когда функции f_n и функция f определены лишь почти всюду (или на функции со значениями в $\overline{\mathbf{R}}$, определенные и конечные почти всюду).

Отметим, что локально выпуклое пространство $\mathscr{F}_F^p$, вообще говоря, *не будет отделимым*; замыканием 0 в этом пространстве служит подпространство $\mathscr{N}_F$ *пренебрежимых* отображений пространства X в F (п. 1, предл. 3).

Замечание. Пусть F — банахово пространство *над полем* $\mathbf{C}$ комплексных чисел; тогда для всякой функции $f \in \mathscr{F}_F^p$ и любого комплексного числа α функция αf принадлежит $\mathscr{F}_F^p$ и $N_p(\alpha f) = |\alpha| N_p(f)$; иными словами, $\mathscr{F}_F^p$ является также векторным подпространством над $\mathbf{C}$ и $N_p(f)$ есть полунорма на этом комплексном векторном пространстве (см. Топ. вект. пр-ва, гл. II, § 6 (2-е изд.), § 1).

Предложение 4. *Пусть $\mathfrak{B}$ — базис фильтра в $\mathscr{F}_F^p$. Предположим, что существует такое компактное множество $K \subset X$, что для любого множества $M \in \mathfrak{B}$ носители всех отображений $f \in M$ содержатся в K. Если при выполнении этих условий $\mathfrak{B}$ равномерно сходится на X к f_0, то f_0 принадлежит $\mathscr{F}_F^p$ и $\mathfrak{B}$ сходится к f_0 в среднем порядка p.*

Это равносильно утверждению, что в множестве отображений $f \in \mathscr{F}_F^p$, носитель которых содержится в фиксированном компактном множестве, топология равномерной сходимости мажорирует топологию сходимости в среднем порядка p.

Действительно, пусть h — непрерывное отображение пространства X в $[0, 1]$ с компактным носителем, равное 1 на K (гл. III, § 1, п. 2, лемма 1). Для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $M \in \mathfrak{B}$, что для всякого отображения $f \in M$ неравенство $|f(x) - f_0(x)| \leqslant \varepsilon h(x)$ выполняется при всех $x \in X$. Из этого выводим, что $N_p(f - f_0) \leqslant \varepsilon N_p(h)$, откуда и следует предложение.

Предложение 5. *Локально выпуклое пространство $\mathscr{F}_F^p$ полно.*

Так как ассоциированное с $\mathscr{F}_F^p$ отделимое пространство нормировано, то достаточно доказать, что всякая *последовательность Коши* (f_n) в $\mathscr{F}_F^p$ имеет предел в топологии сходимости в среднем порядка p (Общая топ., гл. IX, § 2, п. 6, предл. 9). По условию для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое целое m_0, что из $m \geqslant m_0$, $n \geqslant$

$\geqslant m_0$ следует $N_p(f_n - f_m) \leqslant \varepsilon$. Значит, можно индукцией по k определить строго возрастающую последовательность (n_k) таких целых $n_k \geqslant 0$, что $N_p(f_{n_{k+1}} - f_{n_k}) \leqslant 2^{-k}$. Если мы покажем, что ряд с общим членом $g_k = f_{n_{k+1}} - f_{n_k}$ $(k \geqslant 1)$ *сходится в среднем порядка* p, то он будет иметь сумму $g \in \mathscr{F}_F^p$ и $f = g + f_{n_1}$ будет пределом последовательности (f_{n_k}) в $\mathscr{F}_F^p$; тогда f будет элементом прикосновения последовательности (f_n); а так как последняя есть последовательность Коши, то она будет иметь пределом f, и предложение 5 будет доказано (Общая топ., гл. II (3-е изд.), § 3, п. 2, следствие 2 из предл. 5).

Итак, предложение 5 является следствием следующего предложения:

Предложение 6. *Пусть* (f_n) — *такая последовательность функций из* $\mathscr{F}_F^p$, *что* $\sum_{n=1}^{\infty} N_p(f_n) < +\infty$. *Тогда ряд с общим членом* $f_n(x) \in F$ *абсолютно сходится почти всюду на* X. *Если в точках сходимости ряда положить* $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, *а в остальных точках положить* $f(x) = 0$, *то функция* f *будет принадлежать* $\mathscr{F}_F^p$ *и будет служить суммой ряда с общим членом* f_n (в топологии сходимости в среднем порядка p); *более точно, для любого* $n \geqslant 0$ *выполняется неравенство*

$$N_p\left(f - \sum_{k=1}^{n} f_k\right) \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} N_p(f_k). \tag{8}$$

В самом деле, рассмотрим положительную (конечную или бесконечную) функцию $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$. Согласно теореме о счетной выпуклости (теорема 1) имеем $N_p(g) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} N_p(f_n) < +\infty$; поэтому g почти всюду конечна (§ 2, п. 3, предл. 7), что означает, что ряд с общим членом $f_n(x)$ абсолютно сходится почти всюду. А поскольку F полно, то этот ряд сходится почти всюду, и для любого $x \in X$ имеем $|f(x)| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| = g(x)$, откуда

$N_p(f) \leqslant N_p(g) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} N_p(f_n) < +\infty$, чем доказано, что f принадлежит $\mathscr{F}_F^p$. С другой стороны, для любого целого n неравенство

$$|f(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)|$$

выполняется почти всюду, и значит, $N_p\left(f - \sum_{k=1}^{n} f_k\right) \leqslant$ $\leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} N_p(f_k)$. По условию ряд с общим членом $N_p(f_n)$ сходится; следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое целое n, что $\sum_{k=n+1}^{\infty} N_p(f_k) \leqslant \varepsilon$, и неравенство (8) показывает, что f есть сумма ряда с общим членом f_n в топологии сходимости в среднем порядка p.

Таким образом, предложения 5 и 6 полностью доказаны.

4. *Функции, интегрируемые в p-й степени*

Векторное пространство $\mathscr{K}(X; F)$ (которое мы в случае, если это не вызывает никаких недоразумений, будем обозначать просто $\mathscr{K}_F$), состоящее из непрерывных отображений с компактным носителем пространства X в F, очевидно, является подпространством каждого из векторных пространств $\mathscr{F}_F^p$.

Определение 2. *Если заданы локально компактное пространство X, мера μ на X и банахово пространство F, то через $\mathscr{L}_{F_s}^p(X, \mu)$ (или просто $\mathscr{L}_F^p(\mu)$, а также $\mathscr{L}_F^p$) обозначается замыкание в локально выпуклом пространстве $\mathscr{F}_F^p(X, \mu)$ векторного пространства $\mathscr{K}(X; F)$ непрерывных отображений с компактным носителем пространства X в F. Через $L_F^p(X, \mu)$ (или $L_F^p(\mu)$, L_F^p) обозначается отделимое (нормированное) пространство, ассоциированное с $\mathscr{L}_F^p(X, \mu)$. Говорят, что функции, принадлежащие $\mathscr{L}_F^p$, суть функции, интегрируемые в p-й степени* *).

Очевидно, что $\mathscr{L}_F^p(X, |\mu|) = \mathscr{L}_F^p(X, \mu)$ и $L_F^p(X, |\mu|) = L_F^p(X, \mu)$.

*) Оправданность этой терминологии станет видна в § 4, п. 2.

Мы будем вместо $\mathscr{L}^p_{\mathbf{R}}$ и $L^p_{\mathbf{R}}$ (или $\mathscr{L}^p_{\mathbf{C}}$ и $L^p_{\mathbf{C}}$), когда это не влечет путаницы, писать $\mathscr{L}^p$ и L^p. Если F есть *комплексное* банахово пространство, то $\mathscr{L}^p_F$ и L^p_F наделены структурой топологического векторного пространства над полем $\mathbf{C}$ (п. 3, замечание).

Ясно, что всякая функция из $\mathscr{F}^p_F$, эквивалентная некоторой функции из $\mathscr{L}^p_F$, принадлежит $\mathscr{L}^p_F$. Функция со значениями в F, *определенная почти всюду* на X, тоже называется *интегрируемой в p-й степени*, если она эквивалентна некоторой функции из $\mathscr{L}^p_F$; точно так же функция со значениями в $\overline{\mathbf{R}}$, определенная и конечная почти всюду на X, называется *интегрируемой в p-й степени*, если она эквивалентна некоторой функции из $\mathscr{L}^p$.

Таким образом, функции из $\mathscr{L}^p_F$ (соотв. из $\mathscr{L}^p$) являются интегрируемыми в p-й степени функциями, *определенными на всем X* (соотв. определенными и конечными на всем X). Большинство предложений, доказанных в этом и в следующем параграфе для функций из $\mathscr{L}^p_F$ (соотв. $\mathscr{L}^p$), распространяется сразу же на интегрируемые в p-й степени функции, определенные не всюду (соотв. определенные и конечные не всюду); формулировка и доказательство этих результатов чаще всего будет предоставлена читателю.

Замечания. 1) Как уже отмечалось (§ 2, п. 5), интегрируемые в p-й степени функции со значениями в F, вообще говоря, *не образуют векторного пространства*.

2) В общем случае пространство $\mathscr{F}^p_F$ отлично от подпространства $\mathscr{L}^p_F$ (§ 4, упр. 8).

Определение 2 сразу же позволяет сформулировать следующий критерий:

Предложение 7. *Для того чтобы функция f принадлежала $\mathscr{L}^p_F$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовала такая непрерывная функция g с компактным носителем, что* $N_p(f - g) \leqslant \varepsilon$.

Иными словами, функции из $\mathscr{L}^p_F$ являются пределами последовательностей непрерывных функций с компактным носителем *в топологии сходимости в среднем порядка p*.

Предложение 8. *Пусть f — (конечная или бесконечная) числовая функция, определенная почти всюду; если для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие две интегрируемые в p-й степени функции g, h, что $g \leqslant f \leqslant h$ почти всюду и что $N_p(h - g) \leqslant \varepsilon$, то f интегрируема в p-й степени.*

Действительно, f конечна почти всюду и

$$N_p(f - g) \leqslant N_p(h - g) \leqslant \varepsilon;$$

предложение 7 теперь показывает, что f интегрируема в p-й степени.

Так как по определению $\mathscr{L}^p_F$ есть замкнутое подпространство пространства $\mathscr{F}^p_F$ и так как последнее полно (п. 3, предл. 5), то получаем следующий результат (Общая топ., гл. II (3-е изд.), § 3, п. 4, предл. 8):

Теорема 2. *Пространство $\mathscr{L}^p_F$ полно; пространство L^p_F есть банахово пространство.*

Норма $N_p(\tilde{f})$ класса $\tilde{f}$ в пространстве L^p_F обозначается также $\|\tilde{f}\|_p$.

Теорему 2 можно уточнить следующим образом:

Теорема 3. *Пусть f_n — последовательность Коши в пространстве $\mathscr{L}^p_F$; тогда существует подпоследовательность (f_{n_k}) последовательности (f_n), обладающая следующими свойствами:*

1° *ряд с общим членом $N_p(f_{n_{k+1}} - f_{n_k})$ сходится;*

2° *ряд с общим членом $f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)$ абсолютно сходится почти всюду;*

3° *если f есть функция, определенная на X и равная почти всюду пределу последовательности $(f_{n_k}(x))$, то f принадлежит $\mathscr{L}^p_F$ и последовательность (f_n) сходится к f в среднем порядка p;*

4° *существует такая полунепрерывная снизу функция $g \geqslant 0$, что $N_p(g) < +\infty$ и для любого k выполняется неравенство $|f_{n_k}(x)| \leqslant g(x)$ при всех $x \in X$.*

Как и в доказательстве предложения 5 из п. 3, достаточно так определить по индукции последовательность (n_k), чтобы $N_p(f_{n_{k+1}} - f_{n_k}) \leqslant 2^{-k}$; тогда утверждения 2° и 3° будут следо-

вать из предложения 6 и из того факта, что $\mathscr{L}^p_F$ замкнуто в $\mathscr{F}^p_F$. С другой стороны, если $h(x)$ есть сумма ряда с общим членом $|f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)|$, то теорема 1 из п. 2 показывает, что $N_p(h) < +\infty$; стало быть, по определению меры $|\mu|^*$ существует такая полунепрерывная снизу функция $g \geqslant h + |f_{n_1}|$, что $N_p(g) < +\infty$, чем и завершается доказательство.

Следствие 1. *Если последовательность Коши (f_n) в пространстве $\mathscr{L}^p_F$ такова, что последовательность $(f_n(x))$ сходится почти всюду к $f(x)$, то f интегрируема в p-й степени и последовательность (f_n) сходится к f в среднем порядка p.*

В самом деле, найдется такая подпоследовательность (f_{n_k}) последовательности (f_n), что $(f_{n_k}(x))$ сходится почти всюду к $g(x)$, где g — функция из $\mathscr{L}^p_F$, к которой сходится в среднем порядка p последовательность (f_n). Тогда согласно сделанным предположениям $f(x) = g(x)$ почти всюду, откуда и получаем следствие.

Следствие 2. *Пусть $\mathscr{E}$ — всюду плотное множество в $\mathscr{L}^p_F$. Для всякой функции $f \in \mathscr{L}^p_F$ существует последовательность (g_n) функций из $\mathscr{E}$, обладающая следующими свойствами:*

1° *последовательность (g_n) сходится к f в среднем порядка p;*

2° *для почти всех $x \in X$ последовательность $(g_n(x))$ сходится к $f(x)$.*

В самом деле, поскольку пространство L^p_F метризуемо, то в $\mathscr{L}^p_F$ существует последовательность Коши (f_n), состоящая из функций из $\mathscr{E}$ и сходящаяся к f в среднем порядка p (Общая топ., гл. IX, § 2, п. 6, предл. 8); достаточно применить к этой последовательности теорему 3.

Следствие 2 применимо, в частности, к случаю, когда в качестве $\mathscr{E}$ берется пространство $\mathscr{K}_F$ непрерывных функций с компактным носителем.

Замечания. 1) Последовательность Коши (f_n) в $\mathscr{L}^p_F$ может быть такой, что последовательность $(f(x))$ не сходится *ни в одной точке из* X (упр. 1).

2) Если f принадлежит $\mathscr{L}^p_F$, то не всегда может найтись такая последовательность (f_n) непрерывных функций с компактным носителем, чтобы последовательность $(f_n(x))$ сходилась *всюду* на X к функции, равной $f(x)$ почти всюду (§ 4, упр. 4c)).

5. Свойства функций, интегрируемых в p-й степени

Теорема 4. *Пусть F и G — два банаховых пространства и u — непрерывное линейное отображение пространства F в G. Тогда для любой функции $f \in \mathscr{L}^p_F$ сложная функция $u \circ f$ принадлежит $\mathscr{L}^p_G$.*

В самом деле, если $f \in \mathscr{L}^p_F$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая функция $g \in \mathscr{K}_F$, что $N_p(f-g) \leqslant \varepsilon$; а так как $|u \circ f - u \circ g| \leqslant \|u\| \cdot |f-g|$, то $N_p(u \circ f - u \circ g) \leqslant \|u\| \cdot N_p(f-g) \leqslant \varepsilon \|u\|$; поскольку же $u \circ g$ непрерывна и имеет компактный носитель, то теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть a' — произвольная непрерывная линейная форма на F; если $f \in \mathscr{L}^p_F$, то числовая функция $x \mapsto \langle f(x), a' \rangle$* (обозначаемая через $\langle f, a' \rangle$) *принадлежит $\mathscr{L}^p$.*

Следствие 2. *Если заданы n точек a_k из F $(1 \leqslant k \leqslant n)$ и n числовых функций f_k $(1 \leqslant k \leqslant n)$, принадлежащих $\mathscr{L}^p$, то функция $f = \sum_{k=1}^{n} a_k f_k$ принадлежит $\mathscr{L}^p_F$.*

Это следует из того, что отображение $t \mapsto at$ $\mathbf{R}$ в F непрерывно.

Предложение 9. *Пусть F — n-мерное векторное пространство над $\mathbf{R}$, и пусть $(e_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ — базис в F. Для того чтобы функция $f = \sum_{k=1}^{n} e_k f_k$ принадлежала $\mathscr{L}^p_F$, необходимо и достаточно, чтобы каждая из числовых функций f_k принадлежала $\mathscr{L}^p$.*

Это непосредственно вытекает из следствий 1 и 2 теоремы 4.

Предложение 10. *В пространстве $\mathscr{L}^p_F$ векторное подпространство, состоящее из (конечных) линейных комбинаций $\sum_k a_k f_k$, где $a_k \in F$, а f_k — непрерывные числовые функции с компактным носителем, всюду плотно* (в топологии сходимости в среднем порядка p).

В самом деле, множество $\mathscr{K}_F$ непрерывных отображений с компактным носителем пространства X в F, по определению, всюду плотно в $\mathscr{L}^p_F$. С другой стороны, всякая функция $g \in \mathscr{K}_F$ может быть равномерно приближена функциями вида $\sum_k a_k f_k$, где f_k непрерывны и имеют носитель, содержащийся в некоторой *фиксированной* компактной окрестности носителя функции g (гл. III, § 1, п. 2, лемма 2); отсюда вытекает (п. 3, предл. 4), что g является в $\mathscr{L}^p_F$ элементом прикосновения для множества сумм $\sum_k a_k f_k$, откуда и следует предложение.

Предложение 11. *Если функция f принадлежит $\mathscr{L}^p_F$, то функция $|f|$ принадлежит $\mathscr{L}^p$, и отображение $f \mapsto |f|$ пространства $\mathscr{L}^p_F$ в $\mathscr{L}^p$ равномерно непрерывно* (в топологии сходимости в среднем порядка p).

В самом деле, для любого $\varepsilon > 0$ существует такая непрерывная функция g с компактным носителем, что $N_p(f - g) \leqslant \varepsilon$; а поскольку $||f| - |g|| \leqslant |f - g|$, то $N_p(|f| - |g|) \leqslant \varepsilon$, откуда $|f| \in \mathscr{L}^p$. С другой стороны, если f_1, f_2 — две функции из $\mathscr{L}^p_F$, то $N_p(|f_1| - |f_2|) \leqslant N_p(f_1 - f_2)$, и тем самым доказано, что отображение $f \mapsto |f|$ равномерно непрерывно.

Предложение 12. *Для того чтобы числовая функция f принадлежала $\mathscr{L}^p$, необходимо и достаточно, чтобы каждая из функций f^+ и f^- принадлежала $\mathscr{L}^p$.*

Условие достаточно, ибо $f = f^+ - f^-$; оно необходимо, поскольку если $f \in \mathscr{L}^p$, то $|f| \in \mathscr{L}^p$ (предл. 11).

Следствие. *Верхняя* (соотв. *нижняя*) *огибающая конечного семейства функций из $\mathscr{L}^p$ принадлежит $\mathscr{L}^p$.*

6. Фильтрующиеся множества в L^p и возрастающие последовательности в $\mathscr{L}^p$

Выше (§ 2, п. 6) мы определили отношение порядка $\tilde{f} \leqslant \tilde{g}$ в множестве $\tilde{\mathscr{F}}$ классов эквивалентности числовых функций, определенных и конечных почти всюду на X; наделенное этим отношением и своей структурой векторного пространства, мно-

жество $\widetilde{\mathscr{F}}$ становится *пространством Рисса*. Следствие из предложения 12, п. 5 показывает, что если $\widetilde{f}$ и $\widetilde{g}$ — два элемента подпространства L^p пространства $\widetilde{\mathscr{F}}$, то верхняя грань $\sup(\widetilde{f}, \widetilde{g})$ для $\widetilde{f}$ и $\widetilde{g}$ в $\widetilde{\mathscr{F}}$, которая является классом эквивалентности для любой из функций $\sup(f, g)$, где $f \in \widetilde{f}$, $g \in \widetilde{g}$, принадлежит L^p; это доказывает, в частности, что L^p, наделенное отношением порядка, индуцированным отношением порядка в $\widetilde{\mathscr{F}}$, есть *пространство Рисса*.

Предложение 13. *В пространстве Рисса L^p, наделенном топологией, определенной посредством нормы $\|\widetilde{f}\|_p$, отображение $\widetilde{f} \mapsto |\widetilde{f}|$ равномерно непрерывно, а множество элементов $\widetilde{f} \geqslant 0$ замкнуто.*

Первая часть предложения сразу же вытекает из предложения 11, п. 5; поскольку множество элементов $\widetilde{f} \geqslant 0$ является также множеством тех $\widetilde{f}$, для которых $|\widetilde{f}| = \widetilde{f}$, то оно замкнуто, ибо отображение $\widetilde{f} \mapsto |\widetilde{f}|$ непрерывно и L^p отделимо.

Таким образом, в L^p топология, определенная посредством нормы $\|\widetilde{f}\|_p$, *согласуется* со структурой упорядоченного векторного пространства в L^p (Топ. вект. пр-ва, гл. II (2-е изд.), § 2, п. 7).

Предложение 14. *Пусть H — некоторое подмножество пространства Рисса L^p, состоящее из положительных классов и фильтрующееся по отношению $\leqslant$. Для того чтобы H имело в L^p верхнюю грань, необходимо и достаточно, чтобы $\sup\limits_{\widetilde{f} \in H} \|\widetilde{f}\|_p < +\infty$*

Тогда верхняя грань множества H в L^p есть предел (в банаховом пространстве L^p) *фильтра сечений множества H.*

Необходимость очевидна, ибо $\widetilde{f} \mapsto \|\widetilde{f}\|_p$ является возрастающей функцией на множестве положительных элементов из L^p. Для доказательства достаточности прежде всего заметим, что сформулированное условие, на основании теоремы о монотонном пределе, влечет, что образ множества H при отображении $\widetilde{f} \mapsto \|\widetilde{f}\|_p$ имеет предел в $\mathbf{R}$; следовательно, образ фильтра сечений $\mathfrak{F}$ множества H при этом отображении будет базисом фильтра Коши в $\mathbf{R}$. Доказа-

тельство будет закончено, если мы покажем, что $\mathfrak{F}$ является *базисом фильтра Коши* в L^p; в самом деле, в этом случае $\mathfrak{F}$ будет сходиться в L^p, поскольку L^p полно (п. 4, предл. 7), и тогда предложение будет следовать из предложения 18 (Топ. вект. пр-ва, гл. II (2-е изд.), § 2, п. 7).

Для доказательства того, что $\mathfrak{F}$ есть базис фильтра Коши, мы воспользуемся следующей леммой:

Лемма. *Если f и g — такие две функции из $\mathscr{L}^p$, что $0 \leqslant f \leqslant g$, то*

$$(N_p(g-f))^p \leqslant (N_p(g))^p - (N_p(f))^p. \tag{9}$$

В самом деле, если f и g — непрерывные функции с компактным носителем, то соотношение (9) записывается в виде

$$\int (g-f)^p \, d\,|\mu| \leqslant \int g^p d\,|\mu| - \int f^p \, d\,|\mu|$$

и является в этом случае следствием элементарного неравенства $(g-f)^p \leqslant g^p - f^p$ (п. 1, формула (2)). Для того чтобы перейти к общему случаю, достаточно заметить, что обе части в неравенстве (9) являются непрерывными на $\mathscr{L}^p \times \mathscr{L}^p$ функциями и что вследствие непрерывности отображения $g \mapsto |g|$ в $\mathscr{L}^p$ (предл. 11) всякая функция $f \geqslant 0$ из $\mathscr{L}^p$ есть предел (относительно сходимости в среднем порядка p) последовательности положительных непрерывных функций с компактным носителем.

Далее, для любого $\varepsilon > 0$, по условию, найдется такой элемент $\tilde{f} \in H$, что для любого $\tilde{g} \geqslant \tilde{f}$, принадлежащего H, выполняется неравенство $(\|\tilde{g}\|_p)^p - (\|\tilde{f}\|_p)^p \leqslant \varepsilon$; в силу доказанной леммы отсюда вытекает, что $(\|\tilde{g} - \tilde{f}\|_p)^p \leqslant \varepsilon$; следовательно, если $\tilde{g}_1 \geqslant \tilde{f}$ и $\tilde{g}_2 \geqslant \tilde{f}$ — два элемента из H, то $\|\tilde{g}_1 - \tilde{g}_2\|_p \leqslant 2\varepsilon^{1/p}$, чем показано, что $\mathfrak{F}$ есть базис фильтра Коши в L^p, и тем самым завершено доказательство предложения 14.

Следствие 1. *Если $\tilde{g}$ есть верхняя грань множества H в L^p, то*

$$\|\tilde{g}\|_p = \lim_{\tilde{f} \in H} \|\tilde{f}\|_p = \sup_{\tilde{f} \in H} \|\tilde{f}\|_p. \tag{10}$$

Это следует из непрерывности нормы $\|\tilde{f}\|_p$ в L^p и из теоремы о монотонном пределе.

Следствие 2. *Пространство Рисса L^p вполне решеточно.*

Действительно, всякое фильтрующееся (по отношению $\leqslant$) множество H в L^p, состоящее из положительных классов и мажорированное в L^p, имеет верхнюю грань, так как если $\widetilde{h}$ есть мажоранта множества H в L^p, то $\| \widetilde{f} \|_p \leqslant \| \widetilde{h} \|_p$ при любых $\widetilde{f} \in H$, и применимо предложение 14. Этим следствие доказано (гл. II, § 1, п. 3, предл. 1).

Утверждения предложения 14 перестают выполняться, если формулировать их для *функций* из $\mathscr{L}^p$, а не для их *классов*. Более точно, если M есть множество из $\mathscr{L}^p$, состоящее из положительных функций, фильтрующееся по отношению $\leqslant$ и такое, что $\sup_{f \in M} N_p(f) < +\infty$, то *класс верхней огибающей g множества M может не совпадать с верхней гранью в L^p классов функций $f \in M$*; в частности, g может не быть интегрируемой в p-й степени, и, даже если $g \in \mathscr{L}^p$, $N_p(g)$ может быть отлично от $\sup_{f \in M} N_p(f)$ (ср. § 1, п. 3, замечание 1 после теоремы 3).

Однако все же имеет место следующая теорема:

Теорема 5. *Пусть (f_n) — возрастающая последовательность положительных функций из $\mathscr{L}^p$. Для того чтобы верхняя огибающая f этой последовательности была интегрируема в p-й степени, необходимо и достаточно, чтобы $\sup_n N_p(f_n) < +\infty$. Тогда последовательность (f_n) сходится в среднем порядка p к функции f и*

$$N_p(f) = \sup_n N_p(f_n) = \lim_{n \to \infty} N_p(f_n). \tag{11}$$

Поскольку необходимость условия очевидна, то все сводится к доказательству его достаточности. Но при выполнении условия теоремы предложение 14 показывает, что последовательность $(\widetilde{f}_n)$ есть последовательность Коши в L^p, и, значит, последовательность (f_n) есть последовательность Коши в $\mathscr{L}^p$; а так как $f_n(x)$ стремится к $f(x)$ при любом $x \in X$, то f интегрируема в p-й степени и служит пределом последовательности (f_n) в топологии сходимости в среднем порядка p (п. 4, следствие 1 из теоремы 3). Следовательно, $N_p(f_n) \to N_p(f)$, поскольку N_p есть непрерывная функция на $\mathscr{L}^p$.

Следствие 1. *Пусть (f_n) — убывающая последовательность положительных функций из $\mathscr{L}^p$; нижняя огибающая f этой последо-*

вательности принадлежит $\mathscr{L}^p$, *последовательность* (f_n) *сходится в среднем порядка* p *к* f, *и*

$$N_p(f) = \lim_{n\to\infty} N_p(f_n) = \inf_n N_p(f_n).$$

Первые два утверждения вытекают из теоремы 5, примененной к возрастающей мажорированной последовательности функций $g_n = f_1 - f_n$; остальное очевидно.

Следствие 2. *Пусть* (f_n) — *последовательность функций из* $\mathscr{L}^p$. *Для того чтобы верхняя огибающая* f *последовательности* (f_n) *была интегрируема в* p-*й степени, необходимо и достаточно, чтобы существовала такая функция* $g \geqslant 0$, *что* $\int^* g^p\, d\,|\mu| < +\infty$ *и* $f_n \leqslant g$ *при любом* n.

Необходимость очевидна, если положить $g = f^+$. Предположим теперь, что условие выполнено, и положим $g_n = \sup_{k\leqslant n} f_k$; последовательность (g_n) возрастает и состоит из функций, интегрируемых в p-й степени (п. 5, следствие из предл. 12). Возрастающая последовательность положительных функций $h_n = g_n + g_1^-$ удовлетворяет условиям теоремы 5, так как $N_p(h_n) \leqslant N_p(g + g_1^-) < +\infty$; следовательно, ее верхняя огибающая $\sup_n h_n$ интегрируема в p-й степени, и то же самое справедливо для $f = \sup_n h_n - g_1^-$.

Следствие 3. *Пусть* A — *некоторое счетное множество*, $\mathfrak{F}$ — *фильтр в* A, *имеющий счетный базис, и* $(f_\alpha)_{\alpha\in A}$ — *некоторое семейство положительных функций из* $\mathscr{L}^p$. *Предположим, что существует такая функция* $g \geqslant 0$, *что* $N_p(g) < +\infty$ *и* $f_\alpha \leqslant g$ *при любом* $\alpha \in A$; *тогда функция* $\operatorname{lim.sup}_{\mathfrak{F}} f_\alpha$ *интегрируема в* p-*й степени и*

$$\operatorname{lim.sup}_{\mathfrak{F}} N_p(f_\alpha) \leqslant N_p(\operatorname{lim.sup}_{\mathfrak{F}} f_\alpha). \tag{12}$$

В самом деле, пусть (A_n) — убывающий базис фильтра $\mathfrak{F}$, и пусть $g_n = \sup_{\alpha\in A_n} f_\alpha$; так как A_n счетно, то из следствия 2 вытекает, что g_n интегрируема в p-й степени; с другой стороны, $N_p(g_n) \geqslant \sup_{\alpha\in A_n} N_p(f_\alpha)$. Ясно, что $\operatorname{lim.sup}_{\mathfrak{F}} f_\alpha$ будет нижней оги-

бающей убывающей последовательности (g_n); значит, в силу следствия 1 функция $\lim.\sup_{\mathfrak{F}} f_\alpha$ интегрируема в p-й степени и

$$N_p(\lim.\sup_{\mathfrak{F}} f_\alpha) = N_p(\inf_n g_n) = \lim_{n\to\infty} N_p(g_n) \geqslant \lim_{n\to\infty} (\sup_{\alpha\in A_n} N_p(f_\alpha)) = \lim.\sup_{\mathfrak{F}} N_p(f_\alpha).$$

7. *Теорема Лебега*

Теорема 6 (Лебег). *Пусть F — банахово пространство, а (f_n) — последовательность функций из $\mathscr{L}^p_F$, удовлетворяющая условиям:* 1° *последовательность $(f_n(x))$ сходится почти всюду к пределу $f(x) \in F$;* 2° *существует такая числовая функция $g \geqslant 0$, что $\int^* g^p d|\mu| < +\infty$ и $|f_n(x)| \leqslant g(x)$ почти всюду на X при любом целом n. Тогда функция f (определенная почти всюду) интегрируема в p-й степени и последовательность (f_n) сходится к f в среднем порядка p.*

Рассмотрим «двойную» последовательность $g_{mn} = |f_m - f_n|$ числовых функций, принадлежащих $\mathscr{L}^p$ (п. 5, предл. 11); по условию $\lim_{m\to\infty,\, n\to\infty} g_{mn}(x) = 0$ почти всюду, и, с другой стороны, $|g_{mn}(x)| \leqslant 2g(x)$ почти всюду; применив к этой двойной последовательности следствие 3 из теоремы 5, п. 6, получаем, что $\lim.\sup_{m\to\infty,\, n\to\infty} N_p(f_m - f_n) \leqslant N_p(0) = 0$; а поскольку $N_p(f_m - f_n) \geqslant 0$, то это влечет $\lim_{m\to\infty,\, n\to\infty} N_p(f_m - f_n) = 0$; иначе говоря, последовательность (f_n) есть *последовательность Коши в* $\mathscr{L}^p_F$. Теорема вытекает теперь из следствия 1 теоремы 3, п. 4.

Следствие. *Пусть A — множество индексов с фильтром $\mathfrak{F}$, имеющим счетный базис. Если $(f_\alpha)_{\alpha\in A}$ есть семейство функций из $\mathscr{L}^p_F$, сходящееся просто (в смысле простой сходимости) по фильтру $\mathfrak{F}$ почти всюду к функции f, и если при этом существует такая числовая функция $g \geqslant 0$, что $\int^* g^p d|\mu| < +\infty$ и $|f_\alpha(x)| \leqslant g(x)$ почти всюду на X при любом $\alpha \in A$, то функция f интегрируема в p-й степени и f_α стремится к f в среднем порядка p по фильтру $\mathfrak{F}$.*

В самом деле, пусть (A_n) — убывающий счетный базис фильтра $\mathfrak{F}$ и α_n — произвольный элемент из A_n; последовательность (f_{α_n}) сходится просто к f почти всюду на X, и значит, согласно теореме 6, f интегрируема в p-й степени и $\lim_{n\to\infty} N_p(f - f_{\alpha_n}) = 0$. А поскольку фильтр $\mathfrak{F}$ является пересечением элементарных фильтров, ассоциированных со всеми последовательностями (α_n) (Общая топ., гл. I, § 5, предл. 10, (3-е изд.), § 6, п. 8, предл. 11)), то $\lim_{\mathfrak{F}} N_p(f - f_\alpha)$ существует и равен 0 — общему пределу всех последовательностей $(N_p(f - f_{\alpha_n}))$.

Замечания. 1) Теорема 6 не будет верна, если условие $|f_n| \leqslant g$ (с $N_p(g) < +\infty$) заменить более слабым условием: $\sup_n N_p(f_n) < +\infty$. Предположим, например, что μ есть мера Лебега на $\mathbf{R}$; определим непрерывные функции f_n следующим образом: $f_n(x) = 0$ для $x \leqslant 0$ и $x \geqslant 2/n$, $f_n(1/n) = n$; f_n линейна на интервалах $[0, 1/n]$ и $[1/n, 2/n]$. Тогда $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ при любом $x \in \mathbf{R}$, но $N_1(f_n) = 1$ при всех n (ср. § 5, упр. 12).

2) Следствие из теоремы 6 не сохраняется, если не предполагать, что фильтр $\mathfrak{F}$ имеет счетный базис (ср. § 1, п. 3, замечание 1 после теоремы 3).

8. *Соотношения между пространствами* $\mathscr{L}^p_F (1 \leqslant p < +\infty)$

Для любого числа $\alpha > 0$ отображение $z \mapsto |z|^{\alpha-1} \cdot z$ определено и непрерывно на дополнении 0 в F; кроме того, поскольку $\| |z|^{\alpha-1} \cdot z \| = \|z\|^\alpha$, то эта функция стремится к 0 вместе с z, и значит, ее можно продолжить по непрерывности в точку 0, придав ей в этой точке значение 0, даже если $\alpha < 1$.

Теорема 7. *Пусть p и q — два действительных числа, $1 \leqslant p < +\infty$, $1 \leqslant q < +\infty$. Если функция f принадлежит $\mathscr{L}^p_F$, то функция $|f|^{(p/q)-1} \cdot f$ принадлежит $\mathscr{L}^q_F$, и обратно.*

По условию найдется последовательность (f_n) таких непрерывных функций с компактным носителем, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} N_p(f_n) < +\infty \quad \text{и} \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

почти всюду (п. 4, теорема 3). Положим

$$g_n = |f_1+f_2+\ldots+f_n|^{(p/q)-1}(f_1+f_2+\ldots+f_n);$$

функция g_n непрерывна и имеет компактный носитель; с другой стороны, $|g_n|^q = |f_1+f_2+\ldots+f_n|^p \leqslant (\sum_{n=1}^{\infty}|f_n|)^p = h^q$, где числовая функция $h \geqslant 0$ (конечная или бесконечная) на основании теоремы о счетной выпуклости удовлетворяет неравенству

$$(N_q(h))^q = (N_p(\sum_{n=1}^{\infty}|f_n|))^p \leqslant (\sum_{n=1}^{\infty}N_p(f_n))^p < +\infty.$$

Но $g_n(x)$ стремится почти всюду к $g(x) = |f(x)|^{(p/q)-1}f(x)$, и значит, теорема Лебега показывает, что $g \in \mathscr{L}^q_F$. Обратное утверждение получается сразу, ибо $f = |g|^{(p/q)-1}\cdot g$.

Можно показать, что отображение $f \longmapsto |f|^{(p/q)-1}\cdot f$ есть гомеоморфизм пространства $\mathscr{L}^p_F$ на $\mathscr{L}^q_F$ (§ 6, упр. 10).

Следствие 1. *Для того чтобы функция f принадлежала $\mathscr{L}^p_F$, необходимо и достаточно, чтобы функция $|f|^{p-1}\cdot f$ принадлежала $\mathscr{L}^1_F$.*

Следствие 2. *Для того чтобы положительная числовая функция f принадлежала $\mathscr{L}^p$, необходимо и достаточно, чтобы функция f^p принадлежала $\mathscr{L}^1$.*

Отметим, что если числовая функция f произвольного знака такова, что $|f|^p$ принадлежит $\mathscr{L}^1$, то f не обязана принадлежать $\mathscr{L}^p$ (ср. § 4, упр. 8).

Упражнения

1) Пусть μ — мера Лебега на интервале $X = [0, 1[$ из $\mathbf{R}$. Пусть для любого целого $n = 2^h + k$ ($h \geqslant 0$, $0 \leqslant k < 2^h$) через f_n обозначена функция, равная 1 на интервале $[k/2^h, (k+1)/2^h[$ и 0 в остальных точках интервала X. Показать, что последовательность (f_n) сходится в среднем порядка p к 0 при любом $p > 0$, но последовательность $(f_n(x))$ не сходится ни при каком $x \in X$.

2) Показать, что любая числовая функция f, принадлежащая $\mathscr{L}^p(X; \mathbf{R})$, почти всюду равна разности $g_1 - g_2$ двух полунепрерывных снизу положительных функций, принадлежащих $\mathscr{L}^p(X; \mathbf{R})$ (заметить, что $f(x)$ почти всюду равна сумме абсолютно сходящегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, где f_n непрерывны и имеют компактный носитель).

3) Пусть X — локально компактное пространство, $\alpha \geqslant 0$ — такая конечная числовая функция на X, что для любого компактного подмножества $K \subset X$ $\sum_{x \in K} \alpha(x) < +\infty$. Пусть μ — мера на X, определенная при помощи масс $\alpha(x)$. Показать, что относительно этой меры $\mathscr{L}^p_F = \mathscr{L}^p_F$ для любого конечного $p \geqslant 1$ и любого банахова пространства F.

§ 4. Интегрируемые функции и множества

1. Продолжение интеграла

Из определения пространства $\mathscr{L}^p_F$ вытекает, что подпространство $\mathscr{K}_F$ непрерывных функций с компактным носителем *всюду плотно* в $\mathscr{L}^p_F$ (§ 3, п. 4, опр. 2). Следовательно, всякая непрерывная (в топологии сходимости в среднем порядка p) линейная функция, определенная на $\mathscr{K}_F$ и принимающая свои значения в *отделимом и полном* топологическом векторном пространстве G, может быть единственным образом *продолжена по непрерывности* до непрерывной линейной функции, определенной на $\mathscr{L}^p_F$ и принимающей значения в G (Общая топ., гл. II (3-е изд.), § 3, п. 6, теорема 2 и гл. III, § 3, предл. 3).

Но для всякой непрерывной функции f с компактным носителем, принимающей значения в банаховом пространстве F, был определен (гл. III, § 3, п. 1) *интеграл* $\mu(f) = \int f \, d\mu$ относительно μ, являющийся элементом пространства F, и было доказано (гл. III, § 3, п. 2, предл. 5) неравенство

$$\left| \int f \, d\mu \right| \leqslant \int |f| \, d\,|\mu| = N_1(f). \tag{1}$$

Это неравенство показывает, что отображение $f \mapsto \int f \, d\mu$ есть линейное отображение пространства $\mathscr{K}_F$ в F, непрерывное в топологии сходимости в среднем на $\mathscr{K}_F$. Стало быть, можно продолжить его по непрерывности на все пространство $\mathscr{L}^1_F$ и принять следующее определение:

Определение 1. *Функции, принадлежащие* $\mathscr{L}^1_F(X, \mu)$, *называются интегрируемыми относительно меры* μ (или еще μ-*интегрируемыми*). *Интеграл* (*относительно* μ) *от интегрируемой*

функции f есть, по определению, значение для f продолжения по непрерывности на $\mathscr{L}^1_F$ линейного отображения $g \mapsto \int g\,d\mu$ пространства $\mathscr{K}_F$ в F; его обозначают также $\mu(f)$, $\int f\,d\mu$, $\int f(x)\,d\mu(x)$, $\int f\mu$, $\int f(x)\,\mu(x)$.

Пример. Пусть X — *дискретное* пространство, μ — мера на X и пусть $\alpha(x) = \mu(\varphi(x))$ для любого $x \in X$. Тогда функции из $\mathscr{F}^1_F$ будут *интегрируемы*, или, иначе, $\mathscr{L}^1_F = \mathscr{F}^1_F$; кроме того, для любой функции $f \in \mathscr{L}^1_F$ имеем

$$\int f\,d\mu = \sum_{x\in X} \alpha(x) f(x).$$

В самом деле, пусть $f \in \mathscr{F}^1_F$; тогда $|\mu|^*(|f|) = \sum_{x\in X} |\alpha(x)|\cdot|f(x)| < +\infty$ (§ 1, п. 3, пример); для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое конечное подмножество $M \subset X$, что $\sum_{x\in X-M} |\alpha(x)|\cdot|f(x)| \leqslant \varepsilon$. Функция g, равная f в точках $x \in M$, в которых f конечна, и 0 в остальных точках, принадлежит $\mathscr{K}(X; F)$ и, в силу принятых соглашений, $|\mu|^*(|f-g|) \leqslant \sum_{x\in X-M} |\alpha(x)|\cdot|f(x)| \leqslant \varepsilon$, чем доказано, что $f \in \mathscr{L}^1_F$. С другой стороны,

$$\Big|\mu(g) - \sum_{x\in X} \alpha(x) f(x)\Big| \leqslant \sum_{x\in X-M} |\alpha(x)|\cdot|f(x)| \leqslant \varepsilon,$$

откуда и следует второе утверждение.

Иными словами, μ-интегрируемыми функциями f являются те функции, для которых семейство $(\alpha(x) f(x))_{x\in X}$ абсолютно суммируемо (Общая топ., гл. IX, § 3, п. 6), и интеграл $\int f\,d\mu$ представляет собой сумму этого семейства.

Так как функция $\mu(f)$, по определению, непрерывна на $\mathscr{L}^1_F$ и принимает свои значения в отделимом пространстве, то $\mu(f) = 0$ для всякой функции из $\mathscr{L}^1_F$, являющейся элементом прикосновения 0 в $\mathscr{L}^1_F$, то есть *пренебрежимой*; если две интегрируемые функции f и g *эквивалентны*, то $\mu(f) = \mu(g)$. Иными словами, значение $\mu(f)$ зависит лишь от класса $\tilde{f}$ интегрируемой функции f; это значение обозначается также $\mu(\tilde{f})$, а функция $\tilde{f} \mapsto \mu(\tilde{f})$ является непрерывным линейным отображением пространства L^1_F в F.

Если функция f со значениями в F, определенная почти всюду на X, эквивалентна интегрируемой функции, то f тоже называют *интегрируемой* и полагают $\int f\,d\mu = \mu(\tilde{f})$; точно так же определяются интегрируемая функция со значениями в $\overline{\mathbf{R}}$, определенная и конечная почти всюду, и ее интеграл.

2. *Свойства интеграла*

Предложение 1. *Для всякой* μ*-интегрируемой положительной числовой функции* f *справедлива формула*

$$\int f\,d\,|\,\mu\,| = \int^{*} f\,d\,|\,\mu\,| = N_1(f) \geqslant 0. \tag{2}$$

В самом деле, $\int f\,d\,|\,\mu\,|$ и $N_1(f)$ непрерывны на $\mathscr{L}^1$ и равны между собой для любой непрерывной функции $f \geqslant 0$ с компактным носителем; с другой стороны, всякая функция $f \geqslant 0$ из $\mathscr{L}^1$ есть предел (в смысле сходимости в среднем) последовательности непрерывных положительных функций с компактным носителем (§ 3, п. 5, предл. 11), откуда и следует предложение.

Следствие 1. *Для любой интегрируемой функции* $f \in \mathscr{L}^1_F$ *функция* $|f|$ *интегрируема и*

$$\int |f|\,d\,|\,\mu\,| = \int^{*} |f|\,d\,|\,\mu\,| = N_1(f). \tag{3}$$

Предложение 1 и его следствие 1 будут часто использоваться нами для замены $\int^{*} f\,d\,|\,\mu\,|$ или $N_1(f)$ на $\int f\,d\,|\,\mu\,|$ в случае интегрируемой положительной функции. Например, для того чтобы две интегрируемые функции f и g были *эквивалентны*, необходимо и достаточно, чтобы

$$\int |f-g|\,d\,|\,\mu\,| = 0.$$

Напомним, что для того, чтобы функция f принадлежала $\mathscr{L}^p_F$, необходимо и достаточно, чтобы функция $|f|^{p-1}\cdot f$ принадлежала $\mathscr{L}^1_F$ (§ 3, п. 8, следствие I из теоремы 7), то есть была интегрируема; это объясняет терминологию «функция, интегрируемая в p-й степени». Кроме того:

Следствие 2. *Для любой функции $f \in \mathscr{L}_F^p$ числовая функция $|f|^p$ интегрируема и*

$$N_p(f) = \left(\int |f|^p \, d\,|\mu|\right)^{1/p}. \tag{4}$$

Это сразу же следует из того, что $|f|$ принадлежит $\mathscr{L}^p$ (§ 3, п. 5, предл. 11), и из формулы (2).

Предложение 2. *Для любой интегрируемой функции f справедливо неравенство*

$$\left|\int f\,d\mu\right| \leqslant \int |f| \, d\,|\mu|. \tag{5}$$

Это тотчас вытекает из неравенства (1), если перейти в нем к пределу, учитывая формулу (3) и непрерывность функции $N_1(f)$ на $\mathscr{L}_F^1$.

Теорема 1. *Пусть F и G — два банаховых пространства, а u — непрерывное линейное отображение пространства F в G. Тогда для всякой интегрируемой функции f со значениями в F функция $u \circ f$ интегрируема и*

$$\int u(f(x))\, d\mu(x) = u\left(\int f(x)\, d\mu(x)\right). \tag{6}$$

Уже известно (§ 3, п. 5, теорема 4), что $u \circ f$ интегрируема; соотношение (6), будучи справедливым для $f \in \mathscr{K}_F$, распространяется, по принципу продолжения тождеств, на любую интегрируемую функцию f: действительно, отображение $f \mapsto u \circ f$ непрерывно в топологии сходимости в среднем, что следует из неравенства $N_1(u \circ f) \leqslant \|u\| \cdot N_1(f)$.

Следствие 1. *Пусть a' — произвольная непрерывная линейная форма на F. Если f есть интегрируемая функция со значениями в F, то числовая функция $\langle f, a' \rangle$ интегрируема и*

$$\int \langle f(x), a' \rangle \, d\mu(x) = \left\langle \int f(x)\, d\mu(x),\ a' \right\rangle. \tag{7}$$

В главе VI, § 1, упр. 7, 11 и 12 мы покажем, что могут существовать такие функции f со значениями в бесконечномерном банаховом пространстве, что функция $\langle f, a' \rangle$ интегрируема для любой непрерывной линейной формы a' на F без того, чтобы f была интегрируемой.

Следствие 2. *Если* a_k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ — *векторы из* F, *а* f_k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ — *интегрируемые числовые функции, то функция* $f = \sum_{k=1}^{n} a_k f_k$ *интегрируема и*

$$\int \left(\sum_{k=1}^{n} a_k f_k \right) d\mu = \sum_{k=1}^{n} a_k \int f_k \, d\mu. \tag{8}$$

3. *Предельный переход в интегралах*

Предложение 3. *Пусть* $\mathfrak{B}$ — *базис фильтра в* $\mathscr{L}_F^1$. *Предположим, что существует такое компактное множество* $K \subset X$, *что для любого множества* $M \in \mathfrak{B}$ *носители всех функций* $f \in M$ *содержатся в* K. *Если при этих условиях* $\mathfrak{B}$ *равномерно сходится на* X *к* f_0, *то функция* f_0 *интегрируема и*

$$\int f_0 \, d\mu = \lim_{\mathfrak{B}} \int f \, d\mu. \tag{9}$$

В самом деле, $\mathfrak{B}$ сходится к f_0 в среднем (§ 3, п. 3, предл. 4).

Предложение 4. *Пусть* (f_n) — *возрастающая* (соотв. *убывающая*) *последовательность интегрируемых числовых функций. Для того чтобы верхняя* (соотв. *нижняя*) *огибающая* f *этой последовательности была интегрируема, необходимо и достаточно, чтобы* $\sup_n \int f_n \, d\,|\mu| < +\infty$ (соотв. $\inf_n \int f_n \, d\,|\mu| > -\infty$), *и тогда*

$$\int f \, d\mu = \lim_{n \to \infty} \int f_n \, d\mu. \tag{10}$$

Ограничимся рассмотрением возрастающей последовательности. Последовательность функций $g_n = f_n + f_1^-$ является возрастающей и состоит из интегрируемых положительных функций; а так как ее верхняя огибающая равна $g = f + f_1^-$, предложение вытекает из теоремы 5 § 3; п. 6.

Теорема 2. *Пусть* A — *множество индексов с фильтром* $\mathfrak{F}$ *со счетным базисом. Пусть* $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$ — *семейство интегрируемых функций, сходящихся просто по фильтру* $\mathfrak{F}$ *почти всюду к функции* f; *если существует такая числовая функция* $g \geqslant 0$, *что* $\int^* g \, d\,|\mu| < +\infty$ *и* $|f_\alpha(x)| \leqslant g(x)$ *почти всюду на* X *при любом* $\alpha \in A$,

то функция f интегрируема и

$$\int f\,d\mu = \lim_{\mathfrak{F}} \int f_\alpha\,d\mu. \tag{11}$$

Теорема следует из теоремы Лебега (§ 3, п. 7, следствие из теоремы 6), поскольку в сформулированных выше условиях f_α сходится к f в среднем по фильтру $\mathfrak{F}$.

Следствие 1. *Пусть Ω — топологическое пространство, t_0 — точка из Ω, обладающая счетной фундаментальной системой окрестностей, а f — отображение произведения $X \times \Omega$ в F, обладающее следующими свойствами:*

a) *для любого $t \in \Omega$ функция $x \mapsto f(x, t)$ интегрируема;*

b) *для любого $x \in X$ функция $t \mapsto f(x, t)$ непрерывна в t_0;*

c) *существует такая окрестность U точки t_0 и такая определенная на X числовая функция $g \geqslant 0$, что $\int^* g\,d\,|\,\mu\,| < +\infty$ и $|f(x, t)| \leqslant g(x)$ для $x \in X$ и $t \in U$.*

При этих условиях отображение $t \mapsto \int f(x, t)\,d\mu\,(x)$ пространства Ω в F непрерывно в точке t_0.

Следствие 2. *Пусть (f_n) — такая последовательность интегрируемых функций, что ряд с общим членом $f_n(x)$ сходится почти всюду; если существует функция $g \geqslant 0$, для которой $\int^* g\,d\,|\,\mu\,| < +\infty$ и при любом целом n неравенство $\left|\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\right| \leqslant g(x)$ выполняется почти всюду, то сумма $f(x)$ (определенная почти всюду) ряда с общим членом $f_n(x)$ интегрируема и*

$$\int f\,d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n\,d\mu \tag{12}$$

(«почленное интегрирование ряда»).

4. Характеризация интегрируемых числовых функций

Предложение 5. *Для того чтобы (конечная или бесконечная) числовая функция $f \geqslant 0$, полунепрерывная снизу на E, была интегрируема, необходимо и достаточно, чтобы $\int^* f\,d\,|\,\mu\,| < +\infty$.*

Все сводится к доказательству достаточности условия. Определение $|\mu|^*(f)$ (§ 1, п. 1, опр. 1) показывает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая непрерывная функция $g \geqslant 0$ с компактным носителем, что $g \leqslant f$ и $|\mu|^*(f) \leqslant |\mu|(g) + \varepsilon$. Но функция $f - g$ полунепрерывна снизу и положительна, а значит (§ 1, п. 1, теорема 2), $|\mu|^*(f) = |\mu|(g) + |\mu|^*(f - g)$, или, иначе, $N_1(f - g) = |\mu|^*(f - g) = |\mu|^*(f) - |\mu|(g) \leqslant \varepsilon$, чем и доказана интегрируемость функции f (§ 3, п. 3, предл. 7).

Следствие 1. *Для того чтобы конечная числовая функция $f \geqslant 0$, полунепрерывная сверху на X, была интегрируема, необходимо и достаточно, чтобы* $\int^* f\,d|\mu| < +\infty$.

В самом деле, если $|\mu|^*(f) < +\infty$, то найдется такая полунепрерывная снизу функция h, что $f \leqslant h$ и $|\mu|^*(h) < +\infty$; функция $h - f$ определена всюду и полунепрерывна снизу, и $|\mu|^*(h - f) \leqslant |\mu|^*(h) < +\infty$; следовательно, $h - f$ интегрируема, а так как $f(x) = h(x) - (h(x) - f(x))$ почти всюду, то f интегрируема.

Следствие 2. *Пусть H — непустое множество полунепрерывных снизу* (соответственно *сверху*) *интегрируемых числовых функций, фильтрующееся по отношению* $\leqslant$ (соотв. $\geqslant$); *если*

$$\sup_{f \in H} \int f\,d|\mu| < +\infty$$

(соотв. $\inf_{f \in H} \int f\,d|\mu| > -\infty$), *то верхняя* (соотв. *нижняя*) *огибающая g множества H интегрируема и*

$$\int g\,d\mu = \lim_{f \in H} \int f\,d\mu,$$

а также $\int g\,d|\mu| = \sup_{f \in H} \int f\,d|\mu|$ $\left(\text{соотв. } \int g\,d|\mu| = \inf_{f \in H} \int f\,d|\mu|\right)$.

Можно ограничиться случаем полунепрерывных снизу функций; тогда функции f^+ (соотв. f^-) при f, пробегающем H, образуют множество положительных полунепрерывных снизу (соотв. сверху) функций, фильтрующееся по отношению $\leqslant$ (соотв. $\geqslant$); верхняя (соотв. нижняя) огибающая функций f^+ (соотв. f^-) для $f \in H$

равна g^+ (соотв. g^-). С другой стороны, можно заменить H одним из его сечений (которое конфинально ему), состоящим из тех $f \in H$, которые $\geqslant f_0$ для некоторой функции $f_0 \in H$; тогда $\int f^+ d|\mu| \leqslant \leqslant \int f d|\mu| + \int f_0^- d|\mu|$; таким образом, достаточно доказать два утверждения следствия, когда H состоит из *положительных* функций. Если H фильтруется по отношению $\leqslant$ и состоит из функций $\geqslant 0$, полунепрерывных снизу, то, как мы знаем (§ 1, п. 1, теорема 1),

$$|\mu|^*(g) = \sup_{f \in H} |\mu|^*(f) = \sup_{f \in H} \int f d|\mu| < +\infty,$$

и значит, g, которая полунепрерывна снизу, интегрируема в силу предложения 5; имеем $\int g d|\mu| = \lim_{f \in H} \int f d|\mu|$, а поскольку $f \leqslant g$, то $\lim_{f \in H} N_1(g - f) = 0$, чем показано, что f сходится в среднем к g по H и доказано также следствие в этом случае. Если же H фильтруется по отношению $\geqslant$ и состоит из полунепрерывных сверху интегрируемых функций, удовлетворяющих условию $0 \leqslant \leqslant f \leqslant f_1$, где $f_1 \in H$, то найдется такая полунепрерывная снизу интегрируемая функция h, что $f_1 \leqslant h$; можно написать $f = h - f'$, где $f'(x) = h(x) - f(x)$, когда $f(x) < +\infty$, и $f'(x) = 0$ в противном случае. Ясно, что функции f' образуют фильтрующееся по отношению $\leqslant$ множество положительных полунепрерывных снизу интегрируемых функций, причем

$$\int f' d|\mu| \leqslant \int h d|\mu| < +\infty;$$

к ним применимо доказанное выше; если g' есть верхняя огибающая функций f', то h и g' конечны почти всюду, и значит, $h - g'$ определена почти всюду и равна почти всюду g; отсюда сразу же выводим заключения следствия для данного случая.

Следствие 3. *Пусть f — ограниченная числовая функция, полунепрерывная сверху на X и имеющая компактный носитель. Тогда отображение $\mu \mapsto \int f d\mu$ полунепрерывно сверху на $\mathscr{M}_+(X)$ в широкой топологии.*

Если h — функция из $\mathscr{K}_+(X)$, удовлетворяющая условию $|f| \leqslant h$ (гл. III, § 1, п. 2, лемма 1), то $0 \leqslant f + h \leqslant 2h$, а поскольку $f + h$ — полунепрерывная сверху, то из следствия 1 вытекает, что f μ-интегрируема относительно любой меры μ на X. Кроме того, $\mu(f) = \mu(h) - \mu(h - f)$ и $h - f$ есть положительная полунепрерывная снизу функция. Так как отображение $\mu \mapsto \mu(h - f)$ полунепрерывно снизу на $\mathscr{M}_+(X)$ в широкой топологии (§ 1, п. 1, предл. 4), то этим следствие доказано.

Теорема 3. *Для того чтобы числовая функция $f \geqslant 0$ была интегрируема, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовали такая полунепрерывная сверху функция $g \geqslant 0$ с конечными значениями, имеющая компактный носитель, и такая полунепрерывная снизу интегрируемая функция h, что $g \leqslant f \leqslant h$ и $\int (h - g)\, d\,|\mu| \leqslant \varepsilon$.*

Достаточность условия вытекает из общего критерия интегрируемости (§ 3, п. 4, предл. 8), предложения 5 и его следствия 1. Докажем *необходимость*. Если $f \geqslant 0$ интегрируема, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая непрерывная функция $u \geqslant 0$ с компактным носителем, что $N_1(f - u) \leqslant \varepsilon/4$. Отсюда, в силу определения N_1, вытекает существование такой полунепрерывной снизу функции $v \geqslant 0$, что $\mu^*(v) \leqslant \varepsilon/2$ и $|f - u| \leqslant v$. Следовательно, $-v(x) \leqslant f(x) - u(x) \leqslant v(x)$ для всех $x \in X$. А так как $u(x)$ конечна всюду, то отсюда $(u(x) - v(x))^+ \leqslant f(x) \leqslant u(x) + v(x)$ для всех $x \in X$. Функции $g = (u - v)^+$ и $h = u + v$ отвечают нашим требованиям.

Следствие. *Для всякой интегрируемой числовой функции f* (соотв. *интегрируемой $\geqslant 0$*) *существуют такая возрастающая последовательность (g_n) полунепрерывных сверху интегрируемых функций* (соотв. *принимающих конечные значения, имеющих компактный носитель и интегрируемых*) *и такая убывающая последовательность (h_n) полунепрерывных снизу интегрируемых функций, что*:

1° $g_n(x) \leqslant f(x) \leqslant h_n(x)$ *для всех $x \in X$ и всех целых n*;

2° $f(x)$ *равна почти всюду нижней огибающей h последовательности (h_n) и верхней огибающей g последовательности (g_n)*;

3° $\int f\,d\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \int g_n\,d\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \int h_n\,d\mu$.

Предположим сначала, что $f \geqslant 0$. Согласно теореме 3, для любого n существуют такая полунепрерывная снизу интегрируемая функция v_n и такая полунепрерывная сверху конечная функция u_n с компактным носителем, что $u_n \leqslant f \leqslant v_n$ и $\int (v_n - u_n)\,d\,|\,\mu\,| \leqslant 1/n$; если $g_n = \sup(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ и $h_n = \inf(v_1, v_2, \ldots, v_n)$, то последовательности (g_n) и (h_n) будут искомыми. Действительно, поскольку $g \leqslant f$, то, в силу предложения 4, п. 3 g интегрируема, а так как

$$\int (f - g_n)\,d\,|\,\mu\,| \leqslant \int (v_n - u_n)\,d\,|\,\mu\,| \leqslant \frac{1}{n},$$

то

$$\int (f - g)\,d\,|\,\mu\,| = \lim_{n\to\infty} \int (f - g_n)\,d\,|\,\mu\,| = 0$$

(п. 3, предл. 4), чем доказана эквивалентность функций f и g. Точно так же рассуждаем для последовательности (h_n).

Если f не положительна, то можно применить предыдущее рассуждение к f^+ и f^-, и стало быть, будут получены две возрастающие последовательности (g'_n), (g''_n) полунепрерывных сверху интегрируемых функций и две убывающие последовательности (h'_n), (h''_n) полунепрерывных снизу интегрируемых функций, причем:

1) $g'_n \leqslant f^+ \leqslant h'_n$, $g''_n \leqslant -f^- \leqslant h''_n$;

2) f^+ (соотв. $-f^-$) равна почти всюду верхней огибающей функций g'_n и нижней огибающей функций h'_n (соотв. верхней огибающей функций g''_n и нижней огибающей функций h''_n);

3) $\int f^+\,d\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \int g'_n\,d\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \int h'_n\,d\mu$,

$$-\int f^-\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int g''_n\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int h''_n\,d\mu.$$

Кроме того, можно предположить, что g'_n и h''_n конечны всюду; тогда ясно, что последовательности $g_n = g'_n + g''_n$ и $h_n = h'_n + h''_n$ и являются искомыми.

Пример. Для любой положительной меры μ на $\mathbf{R}$ всякая *ступенчатая* функция с компактным носителем μ-интегрируема; действительно, характеристическая функция открытого (соотв. замкну-

того) интервала полунепрерывна снизу (соотв. сверху), а всякая ступенчатая функция является линейной комбинацией таких характеристических функций. Отсюда выводим, что если f — *линейчатая* на $\mathbf{R}$ функция с компактным носителем (Функции действ. перем., гл. II, § 1, п. 3), то f интегрируема, ибо служит равномерным пределом последовательности ступенчатых функций g_n с носителем, содержащимся в некотором фиксированном компактном множестве (п. 3, предл. 3); при этом $\int f\,d\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \int g_n\,d\mu$.

В частности, если в качестве μ взять меру Лебега, то легко видеть, что для всякой линейчатой функции f с компактным носителем интеграл $\int f\,d\mu$ равен интегралу $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$, определенному в «Функциях действ. перем.», гл. II, § 2, п. 1.

З а м е ч а н и я. 1) Пусть f — линейчатая функция на $\mathbf{R}$, интегрируемая относительно меры Лебега μ; тогда $|f|$ тоже интегрируема (п. 2, следствие 1 из предл. 1), и если положить $I_n = [-n, n]$, то $|f|$ будет верхней огибающей возрастающей последовательности линейчатых функций $|f|\varphi_{I_n}$, и, значит, на основании теоремы 2 п. 3, $\int |f|\,d\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{-n}^{n} |f(x)|\,dx$. Стало быть, интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ абсолютно сходится (Функции действ. перем., гл. II, § 2, п. 3). Кроме того, в силу теоремы 2, п. 3 $\int f\,d\mu = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$. Обратно, предположим, что $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ абсолютно сходится; снова, на основании теоремы 2, п. 3 имеем равенство $\int f\,d\mu = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$. Отметим, что если интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится, но не абсолютно, то f *не будет интегрируемой* относительно меры Лебега.

2) Применив предложение 3, п. 3 к мере Лебега и к линейчатым функциям, мы снова получим теорему о предельном переходе для интегралов от линейчатых функций на компактном интервале (Функции действ. перем., гл. II, § 3, п. 1, предл. 1); для *последовательностей* (или фильтров со счетным базисом) линейчатых функций это предложение значительно улучшается теоремой 2, п. 3, поскольку она

заменяет для равномерно ограниченных на компактном интервале линейчатых функций *равномерную* сходимость на *простую* (ср. § 5, п. 4, теорема 2). Однако что касается предельного перехода для *абсолютно сходящихся* интегралов линейчатых функций на некомпактном интервале, то мы замечаем, что условия теоремы 2, п. 3 предполагают рассматриваемые интегралы *равномерно сходящимися* (в смысле определения, данного в «Функциях действ. перем.», гл. II, § 3, п. 2) и, следовательно, улучшают сформулированные в Книге IV (там же) условия сходимости лишь в том, что относится к сходимости функций f_α на любом компактном интервале. Наконец, условия перехода к пределу, указанные для сходящихся, но *не абсолютно сходящихся* интегралов от линейчатых функций, остаются вне пределов применимости теории, изложенной в этой главе.

5. *Интегрируемые множества*

Определение 2. *Говорят, что подмножество A локально компактного пространства X интегрируемо относительно положительной меры μ на X* (или еще *μ-интегрируемо*), *если интегрируема характеристическая функция φ_A множества A. Конечное число $\mu(A) = \int \varphi_A d\mu$ называется мерой множества A.*

Для всякого интегрируемого множества A выполняется равенство $|\mu|(A) = |\mu|^*(A)$ (предл. 1); для того чтобы множество было *пренебрежимо*, необходимо и достаточно, чтобы оно имело *меру нуль относительно* $|\mu|$.

Предложение 6. *Объединение конечной совокупности $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ интегрируемых множеств интегрируемо и*

$$|\mu|\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} |\mu|(A_i). \tag{13}$$

Если при этом A_i не имеют попарно общих точек, то

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i). \tag{14}$$

В самом деле, если $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, то $\varphi_A = \sup \varphi_{A_i}$, и значит (§ 3, п. 5, следствие из предл. 12), если A_i интегрируемы, то интегрируемо и A; соотношение (13) представляет собой частный случай аналогичного соотношения для внешних мер (§ 1, предл. 18), если принять во внимание соотношение $|\mu|(A) = |\mu|^*(A)$;

наконец, если A_i не имеют попарно общих точек, то $\varphi_A = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{A_i}$, откуда и следует (14).

Предложение 7. 1° *Если A и B — два интегрируемых множества и $B \subset A$, то множество $C = A - B$ интегрируемо и*

$$\mu(C) = \mu(A) - \mu(B). \tag{15}$$

2° *Пересечение счетного семейства интегрируемых множеств интегрируемо.*

Первая часть следует из того, что $\varphi_C = \varphi_A - \varphi_B$. Далее, если (A_n) есть последовательность интегрируемых множеств и A — их пересечение, то $\varphi_A = \inf_n \varphi_{A_n}$, и значит, A интегрируемо (п. 3, предл. 4).

Следствие. *Если (A_n) — убывающая последовательность интегрируемых множеств, то* $\mu(\bigcap_n A_n) = \lim_n \mu(A_n)$.

Действительно, если $A = \bigcap_n A_n$, то φ_A есть нижняя огибающая убывающей последовательности (φ_{A_n}) (п. 3, предл. 4).

Предложение 8. *Пусть (A_n) — возрастающая последовательность интегрируемых множеств; для того чтобы объединение $A = \bigcup_n A_n$ было интегрируемо, необходимо и достаточно, чтобы* $\sup_n |\mu|(A_n) < +\infty$; *тогда*

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n). \tag{16}$$

В самом деле, φ_{A_n} образуют возрастающую последовательность интегрируемых функций и $\varphi_A = \sup \varphi_{A_n}$; следовательно, предложение вытекает из предложения 4, п. 3.

Следствие. *Пусть (A_n) — последовательность интегрируемых множеств и* $\sum_{n=1}^{\infty} |\mu|(A_n) < +\infty$; *тогда объединение $A = \bigcup_n A_n$ интегрируемо и*

$$|\mu|(\bigcup_n A_n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |\mu|(A_n). \tag{17}$$

Действительно, $\varphi_A = \sup_n \varphi_{A_n}$ и

$$|\mu|^*(A) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |\mu|^*(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} |\mu|(A_n) < +\infty$$

(1, п. 4, предл. 18); значит, A интегрируемо (§ 3, п. 6, следствие 2 из теоремы 5), а поскольку $|\mu|(A) = |\mu|^*(A)$, то имеем (17).

Предложение 9. *Пусть* (A_n) — *последовательность интегрируемых множеств, не имеющих попарно общих точек, и* $\sum_{n=1}^{\infty} |\mu|(A_n) < +\infty$; *тогда*

$$\mu(\bigcup_n A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n). \tag{18}$$

Действительно, если $A = \bigcup_n A_n$, то $\varphi_A = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{A_n}$, и предложение вытекает из (17) и из следствия 2 теоремы 2, п. 3.

Свойство (18) выражают также, говоря, что мера μ *вполне аддитивна* на множестве интегрируемых подмножеств из X.

6. *Критерии интегрируемости множества*

Предложение 10. *Для того чтобы открытое* (соотв. *замкнутое*) *в пространстве* X *множество* A *было интегрируемо, необходимо и достаточно, чтобы* $|\mu|^*(A) < +\infty$.

Поскольку в этом случае функция φ_A полунепрерывна снизу (соотв. сверху), то предложение сразу же вытекает из предложения 5, п. 4 и его следствия 1.

Следствие 1. *Всякое компактное множество интегрируемо; всякое открытое относительно компактное множество интегрируемо.*

Следствие 2. *Для любой положительной меры* μ *на* X *отображение* $A \mapsto \mu^*(A)$ *есть емкость на* X (ср. Общая топ., гл. IX (2-е изд.), § 6, п. 9, пример).

Пример. Для меры Лебега μ на $\mathbf{R}$ из предложения 10 вытекает, что всякий открытый ограниченный интервал $]a, b[$ интегрируем и имеет меру $b - a$ (§ 1, п. 2, предл. 9). А поскольку всякое

множество, сводящееся к точке, пренебрежимо относительно меры Лебега, то из этого следует, что *все* интервалы с концами a и b имеют одну и ту же меру $b - a$.

Предложение 11. *Пусть* $\mathfrak{G}$ *— фильтрующееся по отношению* $\subset$ *множество интегрируемых открытых множеств из* X*; для того чтобы множество* $A = \bigcup_{G \in \mathfrak{G}} G$ *было интегрируемо, необходимо и достаточно, чтобы* $\sup_{G \in \mathfrak{G}} |\mu|(G) < +\infty$, *и тогда* $\mu(A) = \lim_{\mathfrak{G}} \mu(G)$ *и* $|\mu|(A) = \sup_{G \in \mathfrak{G}} |\mu|(G)$.

В самом деле, известно (§ 1, п. 2, предл. 7), что $|\mu|^*(A) = \sup_{G \in \mathfrak{G}} |\mu|(G)$; таким образом, предложение вытекает из предложения 10.

Следствие. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *— фильтрующееся по отношению* $\supset$ *множество интегрируемых замкнутых множеств из* X*; тогда замкнутое множество* $B = \bigcap_{H \in \mathfrak{F}} H$ *интегрируемо и*

$$\mu(B) = \lim_{\mathfrak{F}} \mu(H), \qquad |\mu|(B) = \inf_{H \in \mathfrak{F}} |\mu|(H).$$

В самом деле, пусть H_0 — множество из $\mathfrak{F}$; поскольку H_0 интегрируемо, то оно содержится в некотором интегрируемом открытом множестве U (§ 1, п. 4, предл. 19); открытые множества $U \cap \mathbf{C}H$, образующие фильтрующееся по отношению $\subset$ множество, содержатся в U, и их объединение равно $U \cap \mathbf{C}B$; стало быть, достаточно применить предложение 11.

Теорема 4. *Для того чтобы множество* A *было интегрируемо, необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\varepsilon > 0$ *существовали такое интегрируемое открытое множество* G *и такое компактное множество* K*, что* $K \subset A \subset G$ *и что*

$$|\mu|(G - K) = |\mu|(G) - |\mu|(K) \leqslant \varepsilon.$$

a) Условие *достаточно*, ибо оно означает, что $\varphi_K \leqslant \varphi_A \leqslant \varphi_G$ и $\int (\varphi_G - \varphi_K)\, d|\mu| \leqslant \varepsilon$; а поскольку φ_G и φ_K интегрируемы, то интегрируема и φ_A (§ 3, п. 4, предл. 8).

b) Условие *необходимо*. Если A интегрируемо, то существует такое открытое множество $G \supset A$, что $|\mu|^*(G)$ отличается сколь

угодно мало от $|\mu|^*(A) = |\mu|(A)$ (§ 1, п. 4, предл. 19); значит, все сводится к доказательству того, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое компактное множество $K \subset A$, что $|\mu|(A) - |\mu|(K) \leqslant \varepsilon$. Так как φ_A интегрируема, то существует полунепрерывная сверху функция $f \geqslant 0$, имеющая компактный носитель S и такая, что $f \leqslant \varphi_A$ и $\int (\varphi_A - f)\, d|\mu| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ (теорема 3, п. 4). Пусть $\delta > 0$ — произвольное число и пусть K — множество точек $x \in E$, в которых $f(x) \geqslant \delta$; K замкнуто и содержится в S и, следовательно, *компактно*, а поскольку $S \subset A$, то $K \subset A$. Множество $B = A - K$ интегрируемо и $f \leqslant \varphi_K + \delta\varphi_B$, откуда

$$\int f\, d|\mu| \leqslant |\mu|(K) + \delta \cdot |\mu|(B) \leqslant |\mu|(K) + \delta \cdot |\mu|(A),$$

и окончательно:

$$|\mu|(A) \leqslant \int f\, d|\mu| + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant |\mu|(K) + \delta \cdot |\mu|(A) + \frac{\varepsilon}{2},$$

что и завершает доказательство, так как δ произвольно.

Следствие 1. *Для того чтобы множество A было интегрируемо, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало такое компактное множество $K \subset A$, что $|\mu|^*(A - K) \leqslant \varepsilon$. Тогда мера $|\mu|(A)$ есть верхняя грань множества мер $|\mu|(K)$ компактных множеств $K \subset A$.*

Условие необходимо, ибо если G и K удовлетворяют условиям теоремы 4, то

$$|\mu|^*(A - K) \leqslant |\mu|^*(G - K) \leqslant \varepsilon.$$

Условие достаточно, ибо оно выражает, что φ_A является, в топологии сходимости в среднем, элементом прикосновения множества интегрируемых функций φ_K (K — произвольное компактное подмножество из A).

Следствие 2. *Для всякого интегрируемого множества A существует:*

1° *множество $A_1 \supset A$, являющееся пересечением счетного множества интегрируемых открытых множеств и такое, что множество $A_1 - A$ пренебрежимо;*

2° *множество $A_2 \subset A$, являющееся объединением счетного множества компактных множеств, попарно не имеющих общих точек, и такое, что множество $A - A_2$ пренебрежимо.*

1° Для любого целого n существует такое интегрируемое открытое множество G_n, что $|\mu|(G_n) - |\mu|(A) \leqslant 1/n$; если за A_1 принять пересечение множеств G_n, то $|\mu|(A_1) = |\mu|(A)$ (п. 5, следствие из предл. 7), и значит, множество $A_1 - A$ пренебрежимо.

2° Определим по индукции компактные множества K_n следующим образом: $K_1 \subset A$ и $|\mu|(A - K_1) \leqslant 1$;

$$K_n \subset A - (\bigcup_{i=1}^{n-1} K_i),$$

$$|\mu|(A \cap \complement(\bigcup_{i=1}^{n-1} K_i) \cap \complement K_n) \leqslant \frac{1}{n}$$

для $n \geqslant 1$ (теорема 1); если за A_2 принять объединение множеств K_n, то $|\mu|(A_2) = |\mu|(A)$ (п. 5, предл. 8), и значит, множество $A - A_2$ пренебрежимо.

Следствие 3. *Всякое множество конечной внешней меры содержится в объединении пренебрежимого множества и счетного семейства компактных множеств, не имеющих попарно общих точек и имеющих конечную сумму мер.*

Достаточно применить следствие 2 к интегрируемому открытому множеству, содержащему заданное множество.

Следствие 4. *Для всякого открытого в X множества U $|\mu|^*(U)$ есть верхняя грань мер $|\mu|(K)$ компактных множеств $K \subset U$.*

Это сразу вытекает из теоремы 4, если $|\mu|^*(U) < +\infty$. Если же $|\mu|^*(U) = +\infty$, то, по условию, для любого целого n существует такая функция $f \in \mathscr{K}_+$, что $f \leqslant \varphi_U$ и $|\mu|(f) \geqslant n$. Если K есть компактный носитель функции f, то $f \leqslant \varphi_K \leqslant \varphi_U$, откуда $|\mu|(K) \geqslant n$, чем и доказано следствие.

Отметим, что $|\mu|^*(U)$ является также верхней гранью мер $|\mu|(G)$ таких относительно компактных открытых множеств, что $\overline{G} \subset U$. Действительно, если K — компактное множество, содержащееся в U, то для любого $x \in K$ существует такая относительно компактная открытая окрестность V точки x, что $\overline{V} \subset U$. Покрыв K конечным числом этих окрестностей, мы получим, что их объединение G есть такое относительно компактное открытое множество, что $\overline{G} \subset U$ и $K \subset G$, откуда $\mu(K) \leqslant |\mu|(G) \leqslant |\mu|^*(U)$.

7. Характеризация ограниченных мер

Предложение 12. *Для того чтобы мера* μ *на локально компактном пространстве* X *была ограничена* (гл. III, § 1, п. 8), *необходимо и достаточно, чтобы* X *было интегрируемым множеством относительно* μ (или, что сводится к тому же, чтобы *всякая постоянная функция была интегрируема*); *тогда*

$$\| \mu \| = | \mu | (X) = \int d \, | \mu |.$$

Действительно, мы показали (§ 1, п. 2), что $| \mu |^* (X) = \| \mu \|$; таким образом, предложение следует из предложения 10, п. 6.

Когда речь идет об ограниченной мере μ, то говорят еще, что $\mu (X)$ есть *полная масса меры* μ.

Из теоремы 4, п. 5 вытекает, что если μ есть ограниченная мера, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое компактное множество K, что $| \mu | (\mathbf{C}K) \leqslant \varepsilon$.

Предложение 13. *Пусть* μ — *ограниченная мера на* X. *Пусть* $\mathfrak{B}$ — *базис фильтра в* $\mathscr{L}^p_F$, *обладающий следующими свойствами:*

1° *существует такое множество* $M \in \mathfrak{B}$, *что функции* $f \in M$ *равномерно ограничены на* X;

2° $\mathfrak{B}$ *сходится равномерно на любом компактном множестве из* X *к функции* f_0.

При этих условиях f_0 *принадлежит* $\mathscr{L}^p_F$, *а* $\mathfrak{B}$ *сходится к* f_0 *в среднем порядка* p.

Прежде всего заметим, что если $| f (x) | \leqslant a$ для любого $x \in X$ и любой функции $f \in M$, то для всех $x \in X$ будет также выполняться неравенство $| f_0 (x) | \leqslant a$. Далее, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое компактное множество K, что $| \mu | (\mathbf{C}K) \leqslant \varepsilon^p$, и такое множество $N \in \mathfrak{B}$, что для всякой функции $f \in N$ неравенство $| f (x) - f_0 (x) | \leqslant \varepsilon \, (| \mu | (K))^{-1/p}$ справедливо при любых $x \in K$. Поскольку, очевидно,

$$f - f_0 = (f - f_0) \, \varphi_K + (f - f_0) \, \varphi_{\mathbf{C}K},$$

то из вышеизложенного следует, что если $f \in M \cap N$, то $N_p ((f - f_0) \, \varphi_K) \leqslant \varepsilon$ и $N_p ((f - f_0) \, \varphi_{\mathbf{C}K}) \leqslant 2a\varepsilon$, откуда $N_p (f - f_0) \leqslant (2a + 1) \, \varepsilon$, что и доказывает предложение.

Следствие. *Для любой меры* μ, *ограниченной на* X, *всякое непрерывное ограниченное отображение* f *пространства* X *в* F *принадлежит каждому из* $\mathscr{L}^p_F$ $(1 \leqslant p < +\infty)$.

В самом деле, для любого компактного множества K из X обозначим через M_K множество отображений пространства X в F вида hf, где h есть непрерывное отображение X в $[0, 1]$, равное 1 на K и имеющее компактный носитель. Ясно, что множества M_K образуют в $\mathscr{L}^p_F$ базис фильтра $\mathfrak{B}$ такой, что принадлежащие M_K функции равномерно ограничены и что $\mathfrak{B}$ равномерно сходится к f на любом компактном множестве из X, откуда и получается следствие.

В частности, функция f интегрируема и ее интеграл $\int f\,d\mu$ является пределом по фильтру $\mathfrak{B}$ интегралов $\int hf\,d\mu$.

Следствие из предложения 13 мы снова получим в § 5, п. 6 с помощью общего критерия интегрируемости.

Для любой функции $f \in \mathscr{C}^b(X; F)$ в обозначениях главы III, § 1, п. 2 имеем неравенство $|f| \leqslant \|f\| \cdot 1$, откуда согласно формулам (3) и (4) из п. 2 получаем

$$N_p(f) \leqslant \|f\| \cdot N_p(1) = \|f\| \cdot \|\mu\|^{1/p}. \tag{19}$$

В частности, при $p = 1$ формула (5) из п. 2 дает

$$\left|\int f\,d\mu\right| \leqslant \|f\| \cdot \|\mu\|, \tag{20}$$

и следовательно, отображение $f \mapsto \int f\,d\mu$ *непрерывно* на банаховом пространстве $\mathscr{C}^b(X; F)$; стало быть, его сужение на замыкание $\mathscr{C}^0(X; F)$ множества $\mathscr{K}(X; F)$ в $\mathscr{C}^b(X; F)$, являющееся пространством непрерывных функций, стремящихся к 0 на бесконечности (гл. III, § 1, п. 2, предл. 3), есть *продолжение по непрерывности* интеграла на $\mathscr{C}^0(X; F)$.

8. *Интегрирование относительно меры с компактным носителем*

Пусть μ — мера на X, имеющая *компактный* носитель $S = \mathrm{supp}(\mu)$; открытое множество $X - S$ *пренебрежимо* (§ 2, п. 5 предл. 2). Следовательно, для любой функции f со значениями в векторном пространстве F или в $\overline{\mathbf{R}}$ функции f и $f\varphi_S$ *эквивалентны*

(§ 2, п. 4); значит, для того чтобы f была μ-интегрируема (когда F — банахово пространство), необходимо и достаточно, чтобы этим свойством обладала функция $f\varphi_S$, и тогда (п. 1)

$$\int f\,d\mu = \int f\varphi_S\,d\mu. \tag{21}$$

Если, кроме того, f *ограничена на* S, то из (20) следует, что

$$\left|\int f\,d\mu\right| \leqslant \|\mu\| \cdot \sup_{x\in S} |f(x)|. \tag{22}$$

В частности, если f *непрерывна на* X, то f μ-интегрируема, поскольку $fh \in \mathscr{K}(X; F)$ для любой функции $h \in \mathscr{K}(X; \mathbf{R})$, равной 1 на S (гл. III, § 1, п. 2, лемма 1). Более точно:

Предложение 14. *Пусть X — локально компактное пространство и F — банахово пространство, не сводящееся к 0; пусть пространство $\mathscr{C}(X; F)$ всех непрерывных отображений X в F наделено топологией компактной сходимости. Для того чтобы мера μ на X обладала тем свойством, что линейное отображение $f \mapsto \int f\,d\mu$ $\mathscr{K}(X; F)$ в F продолжается до непрерывного линейного отображения $\mathscr{C}(X; F)$ в F, необходимо и достаточно, чтобы* $\operatorname{supp}(\mu)$ *был компактен; такое продолжение единственно и совпадает с интегралом, определенным в* п. 1.

В самом деле, мы уже видели, что если μ имеет компактный носитель, то интеграл $\int f\,d\mu$ определен для любой функции $f \in \mathscr{C}(X; F)$, и что отображение $f \mapsto \int f\,d\mu$ пространства $\mathscr{C}(X; F)$ в F непрерывно в топологии компактной сходимости. Обратно, предположим, что $f \mapsto \int f\,d\mu$ непрерывно *на* $\mathscr{K}(X; F)$ в топологии компактной сходимости. Тогда найдутся такое компактное множество $K \subset X$ и такое число $a > 0$, что $|\mu(f)| \leqslant a \times \sup_{x\in K} |f(x)|$ для любой функции $f \in \mathscr{K}(X; F)$; в частности, если носитель функции $g \in \mathscr{K}(X; F)$ не пересекается с K, то $\mu(g) = 0$. Взяв $g = ha$, где $a \neq 0$ — вектор из F и $h \in \mathscr{K}(X; \mathbf{C})$, видим, что $\mu(h) = 0$ для любой функции $h \in \mathscr{K}(X; \mathbf{C})$, носитель которой не пересекается с K, и тем самым доказано, что $\operatorname{supp}(\mu) \subset K$. Наконец, единственность продолжения следует из того, что

$\mathscr{K}(X; F)$ *плотно* в $\mathscr{C}(X; F)$ относительно топологии компактной сходимости (гл. III, § 1, п. 2, предл. 4).

Предложение 14 позволяет отождествить меру с компактным носителем на X и ее непрерывное продолжение на $\mathscr{C}(X; \mathbf{C})$. Таким образом, множество мер с компактным носителем на X отождествляется с пространством $\mathscr{C}'(X; \mathbf{C})$, *сопряженным* к отделимому локально выпуклому пространству $\mathscr{C}(X; \mathbf{C})$. Напомним, что $\mathscr{C}(X; \mathbf{C})$ *полно* (Общая топ., гл. X (2-е изд.), § 1, п. 6, следствие 3 из теоремы 2), но не обязательно бочечно (упр. 17). Однако если X *счетно в бесконечности*, и значит, является объединением возрастающей последовательности компактных множеств K_n, удовлетворяющих условию $K_n \subset \overset{\circ}{K}_{n+1}$, то топология в $\mathscr{C}(X; \mathbf{C})$ может быть определена счетным семейством полунорм $p_n(f) = \sup_{x \in K_n} |f(x)|$, и стало быть, $\mathscr{C}(X; \mathbf{C})$ является в данном случае *пространством Фреше*. Следовательно, в этом случае для любого покрытия $\mathfrak{S}$ пространства $\mathscr{C}(X; \mathbf{C})$ ограниченными множествами пространство $\mathscr{C}'(X; \mathbf{C})$ будет *квазиполно* в $\mathfrak{S}$-топологии (Топ. вект. пр-ва, гл. III, § 3, п. 7, следствие 2 из теоремы 4).

Мы будем рассматривать в $\mathscr{C}'(X; \mathbf{C})$, главным образом, топологию *компактной сходимости* (топологию равномерной сходимости на компактных множествах из $\mathscr{C}(X; \mathbf{C})$). Напомним, что относительно компактные множества H из $\mathscr{C}(X; \mathbf{C})$ характеризуются следующими свойствами (Общая топ., гл. X (2-е изд.), § 2, п. 5, следствие 3 из теоремы 2):

1° H равностепенно непрерывно;

2° для любого $x \in X$ множество $H(x)$ элементов $f(x)$, где f пробегает H, ограничено в $\mathbf{C}$.

Предложение 15. *Пусть X есть локально компактное пространство и пусть для любого $x \in X$ через ε_x обозначена мера Дирака в точке x. Отображение $x \mapsto \varepsilon_x$ пространства X в $\mathscr{C}'(X; \mathbf{C})$ непрерывно в топологии компактной сходимости в $\mathscr{C}'(X; \mathbf{C})$.*

Рассмотрим окрестность точки ε_{x_0} в $\mathscr{C}'(X; \mathbf{C})$ относительно этой топологии; можно предположить, что она определяется следующим образом: берется некоторое число $\delta > 0$ и некоторое компактное множество H из $\mathscr{C}(X; \mathbf{C})$ и рассматриваются множества таких мер μ на X, что $|\mu(f) - \varepsilon_{x_0}(f)| \leqslant \delta$ для любой функции

$f \in H$. Поскольку H равностепенно непрерывно, то в X найдется такая окрестность U точки x_0, что отношение $f \in H$ влечет $| f(x) - f(x_0) | \leqslant \delta$ для любого $x \in U$, что записывается также в виде $| \varepsilon_x(f) - \varepsilon_{x_0}(f) | \leqslant \delta$, и предложение доказано.

Предложение 16. *Пусть K — компактное подмножество из X и L — векторное пространство мер μ на X с носителем в K. Топологии, индуцируемые в L топологией $\mathscr{T}$ компактной сходимости в $\mathscr{C}'(X; \mathbf{C})$ и топологией $\mathscr{T}'$ строго компактной сходимости в $\mathscr{M}(X; \mathbf{C})$ (гл. III, § 1, п. 10), совпадают.*

Ясно, что в L топология, индуцируемая топологией $\mathscr{T}$, мажорирует топологию, индуцируемую $\mathscr{T}'$. Обратно, пусть H — компактное подмножество из $\mathscr{C}(X; \mathbf{C})$ и h — функция из $\mathscr{K}(X; \mathbf{C})$, равная 1 на K. Очевидно, что множество H' функций fh, где f пробегает H, строго компактно в $\mathscr{K}(X; \mathbf{C})$ и для любой меры $\mu \in L$ имеем $\mu(f) = \mu(fh)$ для всякой функции $f \in H$, откуда и получаем утверждение.

Следствие 1. *Для любого компактного подмножества K из X и любого числа $a > 0$ множество B мер μ на X, таких, что $\operatorname{supp}(\mu) \subset K$ и $\| \mu \| \leqslant a$, есть равностепенно непрерывное множество из $\mathscr{C}^0(X; \mathbf{C})$, компактное в топологии $\mathscr{T}$ компактной сходимости.*

В самом деле, пусть H — подмножество из $\mathscr{C}(X; \mathbf{C})$, состоящее из равномерно ограниченных на K функций; согласно (22), найдется такое число $c > 0$, что $| \mu(f) | \leqslant c \cdot \| \mu \| \leqslant ac$ для любой функции $f \in H$ и любой меры $\mu \in B$; следовательно, $B \subset acH^0$ в пространстве $\mathscr{C}'(X; \mathbf{C})$, сопряженном к $\mathscr{C}(X; \mathbf{C})$, чем доказана равностепенная непрерывность множества B; компактность B относительно $\mathscr{T}$ вытекает из того, что в B топология $\mathscr{T}$ и широкая топология индуцируют одну и ту же топологию (предл. 16 и гл. III, § 1, п. 10, предл. 17), и из того, что B широко компактно (гл. III, § 1, п. 9, следствие 2 из предл. 15 и § 2, п. 2, предл. 6).

Следствие 2. *Всякая мера с компактным носителем* (соотв. *положительная мера с компактным носителем*) μ *есть точка прикосновения в $\mathscr{C}'(X; \mathbf{C})$, относительно топологии $\mathscr{T}$ компактной сходимости, множества мер* (соотв. *положительных*

мер), носители которых конечны и содержатся в supp (μ) *и норма которых равна* $\| \mu \|$.

В самом деле, во множестве B мер ν, удовлетворяющих условиям

$$\text{supp}\,(\nu) \subset \text{supp}\,(\mu) \quad \text{и} \quad \| \nu \| \leqslant \| \mu \|,$$

топология, индуцируемая широкой топологией, совпадает с топологией, индуцируемой топологией $\mathscr{T}$, и значит, следствие вытекает из главы III, § 2, п. 4, следствий 2 и 3 из теоремы 1.

9. *Алгебры и аддитивные функции множества*

Определение 3. *Говорят, что непустое множество* Φ *подмножеств множества* A *составляет алгебру, если существует такая алгебра* $\mathscr{A}$ (*над* $\mathbf{R}$), *состоящая из конечных числовых функций, определенных на* A, *что отношения* $M \in \Phi$ *и* $\varphi_M \in \mathscr{A}$ *эквивалентны.*

Пример. Если μ есть мера на локально компактном пространстве X, то линейные комбинации с действительными коэффициентами характеристических функций интегрируемых множеств образуют алгебру A, так как для двух интегрируемых множеств M и N функция $\varphi_M \varphi_N = \varphi_{M \cap N}$ интегрируема (п. 5, предл. 7); из определений 2 и 3 вытекает поэтому, что множество интегрируемых подмножеств из X составляет алгебру.

Предложение 17. *Для того чтобы непустое множество* Φ *подмножеств множества* A *составляло алгебру, необходимо и достаточно, чтобы оно удовлетворяло следующему условию:*

(CL) *Для любой пары множеств* M *и* N *из* Φ *множества* $M \cup N$ *и* $M \cap \complement N$ *принадлежат* Φ.

Необходимость следует из соотношений

$$\varphi_{M \cup N} = \varphi_M + \varphi_N - \varphi_M \varphi_N,$$
$$\varphi_{M \cap \complement N} = \varphi_M - \varphi_M \varphi_N.$$

Для доказательства *достаточности* прежде всего заметим, что указанное условие влечет тот факт, что для любых двух множеств M и N из Φ множество $M \cap N$ принадлежит Φ, поскольку $M \cap N = M \cap \complement(M \cap \complement N)$. Обозначим через $\mathscr{E}(\Phi)$ множество линейных комбинаций с действительными коэффициентами характеристических функций множеств из Φ. Так как $\varphi_M \varphi_N = \varphi_{M \cap N}$, то $\mathscr{E}(\Phi)$ составляет алгебру. Остается показать, что если M —

такое подмножество из A, что $\varphi_M = \sum_i c_i \varphi_{M_i}$, где $M_i \in \Phi$, то $M \in \Phi$. Это будет вытекать из следующей леммы:

Лемма 1. *Пусть* Φ — *непустое множество подмножеств из* A, *удовлетворяющее аксиоме* (CL). *Если имеется какое-либо конечное семейство* $(M_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ *множеств из* Φ, *то найдется такое конечное семейство* $(N_j)_{1 \leqslant j \leqslant m}$ *множеств из* Φ *попарно без общих точек, что каждое из множеств* M_i *является объединением некоторого числа множеств* N_j.

В самом деле, рассмотрим $2^n - 1$ множеств вида $\bigcap_{i=1}^{n} P_i$, где $P_i = M_i$ для некоторых индексов i и $P_i = \complement M_i$ для остальных индексов, причем хотя бы одно из множеств P_i равно M_i. Пусть $(N_j)_{1 \leqslant j \leqslant m}$ — упорядоченная некоторым способом последовательность этих множеств; они не имеют попарно общих точек и принадлежат Φ; с другой стороны, всякое множество M_k является объединением множеств $N_j = \bigcap_{i=1}^{n} P_i$, соответствующих тем семействам (P_i), для которых $P_k = M_k$, что и доказывает лемму.

Теперь мы можем всякую функцию вида $\sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_{M_i}$, где $M_i \in \Phi$, записать в форме $\sum_{j=1}^{m} d_j \varphi_{N_j}$, где N_j принадлежат Φ и не имеют попарно общих точек; если $\varphi_M = \sum_{j=1}^{m} d_j \varphi_{N_j}$, то для каждого индекса j непременно будет выполняться либо равенство $d_j = 0$, либо $d_j = 1$, и значит, M есть объединение некоторого числа множеств N_j, а следовательно, принадлежит Φ.

Всякая алгебра Φ подмножеств из A содержит пустое подмножество $\varnothing$ множества A; действительно, существует хотя бы одно подмножество $M \in \Phi$, а значит, множество $M - M = \varnothing$ принадлежит Φ. Отметим, что множество подмножеств из A, сводящееся к единственному подмножеству $\varnothing$, есть алгебра.

Определение 4. *Если имеются алгебра* Φ *подмножеств некоторого множества* A *и банахово пространство* F, *то функцией, размещенной на множествах из* Φ (*или* Φ-*размещенной функцией*),

со значениями в F, называется всякая функция вида $\sum_i a_i \varphi_{M_i}$, где a_i принадлежат F, а M_i принадлежат Ф.

Легко видеть, что множество $\mathscr{E}_F(\Phi)$ Ф-размещенных функций со значениями в F есть векторное пространство над $\mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$. Мы только что показали в предложении 17, что множество $\mathscr{E}(\Phi)$ конечных Ф-размещенных числовых функций составляет *алгебру* над $\mathbf{R}$; оно образует также векторное подпространство пространства $\mathbf{R}^A$, порожденное характеристическими функциями множеств из Ф.

Всякая функция из $\mathscr{E}_F(\Phi)$ может быть записана в силу леммы 1 в виде $f = \sum_j c_j \varphi_{N_j}$, где множества $N_j \in \Phi$ не имеют попарно общих точек; отсюда следует, что $|f| = \sum_j |c_j| \varphi_{N_j}$ принадлежит $\mathscr{E}(\Phi)$. В частности, $\mathscr{E}(\Phi)$ есть *пространство Рисса*, так как верхняя огибающая двух функций из $\mathscr{E}(\Phi)$ принадлежит $\mathscr{E}(\Phi)$.

Замечание. Нетрудно заметить, что определение 4 равносильно следующему: Ф-размещенная функция со значениями в F есть функция f, принимающая лишь конечное число значений и такая, что для любого $a \neq 0$ из F множество $f^{-1}(a)$ принадлежит Ф.

Определение 5. *Говорят, что конечная числовая функция λ, определенная на алгебре* Ф *подмножеств множества A, аддитивна, если для любых двух множеств M и N из* Ф *без общих точек выполняется равенство* $\lambda(M \cup N) = \lambda(M) + \lambda(N)$.

Из этого определения, в частности, вытекает, что $\lambda(\varnothing) = 0$.

Предложение 18. *Пусть λ — аддитивная функция множества, определенная на алгебре* Ф. *Существует, и притом только одна, такая линейная форма* (обозначаемая снова через λ) *на векторном пространстве $\mathscr{E}(\Phi)$ конечных* Ф*-размещенных числовых функций, что $\lambda(\varphi_M) = \lambda(M)$ для любого множества $M \in \Phi$; при этом, если $\lambda(M) \geqslant 0$ для любого $M \in \Phi$, то λ есть положительная линейная форма на $\mathscr{E}(\Phi)$.*

Единственность линейной формы λ очевидна, ибо характеристические функции множеств из Ф порождают векторное пространство $\mathscr{E}(\Phi)$. Для доказательства *существования* формы λ

достаточно показать, что соотношение $\sum_i c_i \varphi_{M_i} = 0$, где M_i — непустые множества из Ф, влечет $\sum_i c_i \lambda(M_i) = 0$. Но, согласно лемме 1, существует такое конечное семейство (N_j) непустых множеств из Ф попарно без общих точек, что для каждого индекса i выполняется равенство $\varphi_{M_i} = \sum_j a_{ij} \varphi_{N_j}$, где либо $a_{ij} = 0$, либо $a_{ij} = 1$. Следовательно, соотношение $\sum_i c_i \varphi_{M_i} = 0$, которое записывается в виде $\sum_j \left(\sum_i c_i a_{ij}\right) \varphi_{N_j} = 0$, влечет $\sum_i c_i a_{ij} = 0$ для любого индекса j. Тогда, в силу определения 5, выполняются равенства

$$\sum_i c_i \lambda(M_i) = \sum_j \left(\sum_i c_i a_{ij}\right) \lambda(N_j) = 0,$$

доказывающие существование формы λ. Наконец, предположим, что $\lambda(M) \geqslant 0$ при любом $M \in \Phi$; для всякой функции $f \in \mathscr{E}(\Phi)$ можно написать $f = \sum_i c_i \varphi_{M_i}$, где $M_i \in \Phi$ не имеют попарно общих точек; следовательно, если $f \geqslant 0$, то $c_i \geqslant 0$ для любого индекс i, для которого M_i не пусто, откуда $\lambda(f) = \sum_i c_i \lambda(M_i) \geqslant 0$.

10. *Приближение непрерывных функций размещенными функциями*

Предложение 19. *Пусть X — локально компактное пространство, и пусть Φ — алгебра подмножеств из X, содержащая множество компактных подмножеств из X. Для любого непрерывного отображения f пространства X в банахово пространство F* (соотв. *любой конечной непрерывной функции $f \geqslant 0$ на X*) *с компактным носителем K существует последовательность (g_n) функций из $\mathscr{E}_F(\Phi)$, носитель которых содержится в K* (соотв. *такая последовательность (g_n) функций из $\mathscr{E}(\Phi)$, что $0 \leqslant g_n \leqslant f$ при любом n*), *равномерно сходящаяся к f* (соотв. *f*).

В самом деле, поскольку функция f равномерно непрерывна на K, то K можно покрыть конечным числом таких компактных множеств M_i $(1 \leqslant i \leqslant m)$, что колебание функции f на каждом из M_i не превосходит $1/n$. А так как M_i и K принадлежат Ф,

то существует разбиение K на такие множества $N_j \in \Phi$, что каждое из множеств $M_i \cap K$ является объединением некоторого числа множеств N_j (п. 9, лемма 1). Пусть a_j — элемент из F, для которого $|f(x) - a_j| \leqslant 1/n$ на N_j. Если положить $g_n = \sum_j a_j \varphi_{N_j}$, то $|f - g_n| \leqslant 1/n$, откуда следует предложение для этого случая. Точно так же рассуждаем для непрерывной числовой функции f, полагая $a_j = \inf_{x \in N_j} f(x)$ и $g_n = \sum a_j \varphi_{N_j}$.

Следствие 1. *Пусть* μ *— положительная мера на* X; *пространство* $\mathscr{E}_F(\Phi)$ *всюду плотно в каждом из пространств* $\mathscr{L}_F^p$ $(1 \leqslant p < +\infty)$.

В самом деле, из предложения 19 и критерия сходимости в среднем для равномерных пределов функций с компактным носителем (§ 3, п. 3, предл. 4) вытекает, что $\mathscr{E}_F(\Phi)$ плотно в замыкании пространства $\mathscr{K}_F$ непрерывных функций с компактным носителем в топологии сходимости в среднем порядка p; отсюда и получаем следствие.

Следствие 2. *Для любого замкнутого подмножества* S *из* X *всякая функция* $f \in \mathscr{K}(X, S; \mathbf{C})$ *есть равномерный предел линейных комбинаций* $\sum_i \lambda_i \varphi_{K_i}$, *где* λ_i *принадлежат* $\mathbf{C}$ *и где* K_i *— компактные подмножества из* S.

В самом деле, множество $\mathscr{A}$ рассматриваемых линейных комбинаций образует $\mathbf{C}$-алгебру. Пусть Φ — множество таких подмножеств M из X, что $\varphi_M \in \mathscr{A}$; Φ есть, таким образом, *алгебра*, все элементы которой являются подмножествами из S, содержащими компактные подмножества из S, и мы имеем $\mathscr{E}_C(\Phi) \subset \mathscr{A}$. Стало быть, достаточно применить предложение 19 к локально компактному пространству S и алгебре Φ.

Следствие 3. *Если* μ *и* ν *— такие две меры на* X, *что* $\mu(K) = \nu(K)$ *для любого компактного подмножества* K *из* X, *то* $\mu = \nu$.

В самом деле, из следствия 2 и определения меры вытекает, что для любого компактного подмножества S из X меры μ и ν принимают одинаковые значения на $\mathscr{K}(X, S; \mathbf{C})$.

11. Продолжение меры, определенной на семействе множеств

Пусть Φ — непустое множество подмножеств локально компактного пространства X, и пусть на Φ задана конечная положительная числовая функция $M \mapsto \alpha(M)$. Мы ставим себе задачу отыскать условия, при которых существует такая (положительная) мера μ на X, чтобы множества из Φ были μ-*интегрируемы* и чтобы $\mu(M) = \alpha(M)$ для любого $M \in \Phi$. Мы ограничимся рассмотрением случая, когда Φ удовлетворяет следующим условиям:

(PC_I) *Объединение и пересечение двух множеств из* Φ *принадлежат* Φ.

(PC_{II}) *Для любой пары, состоящей из компактного множества* K *и открытого множества* U *в* X *и такой, что* $K \subset U$, *существует такое множество* $M \in \Phi$, *что* $K \subset M \subset U$.

Отметим, что в условии (PC_{II}) содержится предположение $\varnothing \in \Phi$, ибо можно принять $K = U = \varnothing$. Однако множество Φ может и не быть алгеброй: например, множество компактных подмножеств из X удовлетворяет условиям (PC_I) и (PC_{II}), но, вообще говоря, не является алгеброй, так как если M и N компактны, то этого, вообще, нельзя сказать о множестве $M \cap \complement N$.

Кроме того, мы предположим, что определенная на Φ функция α удовлетворяет следующим условиям (очевидно, необходимым для того, чтобы задача имела решение):

(PM_I) *Отношение* $M \subset N$ *влечет* $\alpha(M) \leqslant \alpha(N)$.

(PM_{II}) *Каковы бы ни были* M *и* N *из* Φ, $\alpha(M \cup N) \leqslant \alpha(M) + \alpha(N)$.

(PM_{III}) *Отношение* $M \cap N = \varnothing$ *влечет* $\alpha(M \cup N) = \alpha(M) + \alpha(N)$.

Приняв в условии (PM_{III}) $N = \varnothing$, получаем, что $\alpha(\varnothing) = 0$; тогда условие (PM_I) показывает, что $\alpha(M) \geqslant 0$ для любого $M \in \Phi$.

ТЕОРЕМА 5. *Пусть* Φ *—множество подмножеств локально компактного пространства* X, *удовлетворяющее условиям* (PC_I) *и* (PC_{II}), *и пусть* α *— определенная на* Φ *конечная числовая функция, удовлетворяющая условиям* (PM_I), (PM_{II}) *и* (PM_{III}). *Для того чтобы существовала такая положительная мера* μ *на* X, *что множества из* Φ μ-*интегрируемы и* $\mu(M) = \alpha(M)$ *при любом* $M \in \Phi$, *необходимо и достаточно, чтобы функция* α *удовлетворяла еще одному условию*:

(PM_{IV}) *Для любого* $\varepsilon > 0$ *и любого* $M \in \Phi$ *найдется такое компактное множество* $K \subset M$ *и такое открытое множество* $U \supset M$, *что для всякого множества* $N \in \Phi$, *удовлетворяющего отношению* $K \subset N \subset U$, *выполняется неравенство* $|\alpha(N) - \alpha(M)| \leqslant \varepsilon$.

При этом, если условие (PM_{IV}) *выполнено, то мера* μ *единственна; для любого компактного множества* K *имеем* $\mu(K) = \inf_{M \in \Phi,\ M \supset K} \alpha(M)$, *а для любого открытого множества* U *имеем* $\mu^*(U) = \sup_{M \in \Phi,\ M \subset U} \alpha(M)$.

Отметим, что условие (PM_{IV}) эквивалентно одновременному выполнению следующих двух условий:

(PM'_{IV}) *Для любого* $\varepsilon > 0$ *и любого* $M \in \Phi$ *найдется такое открытое множество* $U \supset M$, *что для всякого* $N \in \Phi$, *содержащегося в* U, *выполняется неравенство* $\alpha(N) \leqslant \alpha(M) + \varepsilon$.

(PM''_{IV}) *Для любого* $\varepsilon > 0$ *и любого* $M \in \Phi$ *найдется такое компактное множество* $K \subset M$, *что для всякого* $N \in \Phi$, *содержащего* K, *выполняется неравенство* $\alpha(N) \geqslant \alpha(M) - \varepsilon$.

В самом деле, легко видеть, что условия (PM'_{IV}) и (PM''_{IV}) влекут (PM_{IV}). Обратно, покажем, например, что (PM_{IV}) влечет (PM'_{IV}). Пусть K — компактное, а U — открытое множество, для которых $K \subset M \subset U$ и $|\alpha(P) - \alpha(M)| \leqslant \varepsilon$ при всяком $P \in \Phi$, удовлетворяющем условию $K \subset P \subset U$. Тогда, если $N \in \Phi$ и $N \subset U$, то $M \cup N$ принадлежит Φ и $K \subset (M \cup N) \subset U$, откуда $\alpha(M \cup N) \leqslant \alpha(M) + \varepsilon$ и тем более $\alpha(N) \leqslant \alpha(M) + \varepsilon$.

Если множество Φ, удовлетворяющее условиям (PC_I) и (PC_{II}), состоит из *компактных* множеств, то условие (PM''_{IV}) выполняется само собой, и тогда (PM_{IV}) эквивалентно (PM'_{IV}).

Необходимость условия (PM_{IV}) сразу же вытекает из теоремы 4, п. 6 о «приближении» интегрируемого множества компактным множеством и открытым множеством. Доказательство других утверждений теоремы мы проведем в несколько этапов.

1° *Определение топологии в* $\mathfrak{P}(X)$.

Для любой пары (K, U), состоящей из компактного множества K и открытого множества U в X, через $I(K, U)$ обозначим множество таких $M \subset X$, что $K \subset M \subset U$; для того чтобы $I(K, U)$ было не пусто, необходимо и достаточно, чтобы $K \subset U$. Если (K', U') есть другая пара, состоящая из компактного множества K' и открытого множества U', то

$$I(K, U) \cap I(K', U') = I(K \cup K', U \cap U').$$

Пусть $\mathcal{T}$ — топология в $\mathfrak{P}(X)$, порожденная множеством подмножеств $I(K, U)$, когда K пробегает множество компактных подмножеств из X, а U — открытых в X множеств; в силу вышеизложенного множества $I(K, U)$ образуют *базис* топологии $\mathcal{T}$ (Общая топ., гл. I, § 2 (3-е изд.), § 1, п. 3).

Отметим, что определение топологии $\mathcal{T}$ таково, что в $\mathfrak{P}(X)$ множество компактных подмножеств из X *всюду плотно*. Условие (PC_{II}) выражает, что Φ *плотно* в $\mathfrak{P}(X)$, а условие (PM_{IV}) — что функция α *непрерывна* на Φ в топологии, индуцированной топологией $\mathcal{T}$. Наконец, теорема 4 выражает тот факт, что функция $M \longmapsto \mu(M)$ *непрерывна* на алгебре μ-интегрируемых множеств в топологии, индуцированной топологией $\mathcal{T}$.

2° *Единственность меры* μ.

Обозначим через $\overline{\Phi}$ множество таких подмножеств $M \subset X$, что $\alpha(N)$ стремится к конечному пределу, когда N стремится к M (в топологии $\mathcal{T}$), оставаясь в Φ; тогда α можно единственным образом продолжить до *непрерывного* отображения $\overline{\alpha}$ множества $\overline{\Phi}$ в $\mathbf{R}$ (Общая топ., гл. I (3-е изд.), § 8, п. 5, теорема 1). Если искомая мера μ существует, то, согласно сделанным выше замечаниям, алгебра Ψ μ-интегрируемых множеств содержится в $\overline{\Phi}$ и $\mu(M) = \alpha(M)$ для любого $M \in \Psi$; это соотношение справедливо, в частности, для любого компактного подмножества M из X, чем и доказана единственность меры μ (следствие 2 из предл. 19).

3° *Продолжение функции* α *на компактные множества.*

Теперь мы, не делая предположения о существовании меры μ, изучим множество $\overline{\Phi}$ и продолжение $\overline{\alpha}$ функции α на $\overline{\Phi}$. Прежде всего покажем, что любое компактное множество K принадлежит $\overline{\Phi}$ и что $\overline{\alpha}(K) = \inf_{P \in \Phi,\ P \supset K} \alpha(P)$. Положим $a = \inf_{P \in \Phi,\ P \supset K} \alpha(P)$; для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое множество $M \in \Phi$, что $K \subset M$ и $\alpha(M) \leqslant a + \varepsilon$. Согласно $(\mathrm{PM}'_{\mathrm{IV}})$ существует такое открытое множество $U \supset M$, что для всякого $N \in \Phi$, содержащегося в U, выполняются неравенства $\alpha(N) \leqslant \alpha(M) + \varepsilon \leqslant a + 2\varepsilon$; значит, для любого $N \in \Phi$, удовлетворяющего условию $K \subset N \subset U$, имеем $a \leqslant \alpha(N) \leqslant a + 2\varepsilon$, откуда, в силу определений, следует, что $K \in \overline{\Phi}$ и $\overline{\alpha}(K) = a$.

Этот результат показывает сразу же, что если K_1 и K_2 — два компактных множества и $K_1 \subset K_2$, то $\overline{\alpha}(K_1) \leqslant \overline{\alpha}(K_2)$. Если же K_1 и K_2 — два любых компактных множества, то в силу $(\mathrm{PM}_{\mathrm{II}})$, $\overline{\alpha}(K_1 \cup K_2) \leqslant \overline{\alpha}(K_1) + \overline{\alpha}(K_2)$. Если, кроме того, K_1 и K_2 не пересекаются, то $\overline{\alpha}(K_1 \cup K_2) = \overline{\alpha}(K_1) + \overline{\alpha}(K_2)$. Действительно, в этом случае найдутся такие два открытых множества U_1 и U_2 без общих точек что $K_1 \subset U_1$ и $K_2 \subset U_2$ (Общая топ., гл. II (2-е изд.), § 4, предл. 1; (3-е изд.), § 4, предл. 4). Значит, согласно $(\mathrm{PC}_{\mathrm{II}})$ найдутся такие два множества $M_1 \in \Phi$ и $M_2 \in \Phi$, что $K_1 \subset M_1 \subset U_1$ и $K_2 \subset M_2 \subset U_2$. Обозначим далее через P произвольное множество из Φ, содержащее $K_1 \cup K_2$; на основании $(\mathrm{PC}_{\mathrm{I}})$ объединение двух множеств $P \cap M_1$ и $P \cap M_2$ принадлежит Φ, а поскольку эти два множества не пересекаются, то, применив $(\mathrm{PM}_{\mathrm{I}})$ и $(\mathrm{PM}_{\mathrm{III}})$, получим

$$\alpha(P) \geqslant \alpha(P \cap M_1) + \alpha(P \cap M_2) \geqslant \overline{\alpha}(K_1) + \overline{\alpha}(K_2),$$

что и доказывает наше утверждение.

4° *Продолжение функции* α *на открытые множества.*

Теперь мы покажем, что для того, чтобы открытое множество U принадлежало $\overline{\Phi}$, необходимо и достаточно, чтобы для K, пробегающих множество компактных подмножеств из U, верхняя грань чисел $\overline{\alpha}(K)$ была конечна; тогда $\overline{\alpha}(U)$ будет равно этой верхней грани.

В самом деле, пусть открытое множество U принадлежит $\overline{\Phi}$; для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое компактное множество $K \subset U$, что для любого множества $M \in \Phi$, удовлетворяющего условиям $K \subset M \subset U$, выполняется неравенство $|\overline{\alpha}(U) - \alpha(M)| \leqslant \varepsilon$; отсюда $|\overline{\alpha}(U) - \overline{\alpha}(K)| \leqslant \varepsilon$; с другой стороны, если K' есть произвольное содержащееся в U компактное множество, то $K \subset K \cup K' \subset U$, откуда $|\overline{\alpha}(U) - \overline{\alpha}(K \cup K')| \leqslant \varepsilon$, и значит, $\overline{\alpha}(U) \geqslant \overline{\alpha}(K \cup K') - \varepsilon \geqslant \overline{\alpha}(K') - \varepsilon$; таким образом, $\overline{\alpha}(U)$ равно верхней грани чисел $\overline{\alpha}(K)$, когда K пробегает множество компактных подмножеств из U.

Обратно, пусть открытое множество U обладает тем свойством, что $b = \sup_{K \subset U} \overline{\alpha}(K) < +\infty$ (где K пробегает множество компактных подмножеств из U); покажем, что $U \in \overline{\Phi}$. Для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое компактное множество $K \subset U$, что $b - \varepsilon \leqslant \overline{\alpha}(K) \leqslant b$; согласно $(\mathrm{PM}''_{\mathrm{IV}})$, для любого $M \in \Phi$, удовлетворяющего условиям $K \subset M \subset U$, существует такое компактное множество $K' \subset M$, что $\alpha(M) \leqslant \overline{\alpha}(K') + \varepsilon \leqslant b + \varepsilon$; следовательно, $b - \varepsilon \leqslant \alpha(M) \leqslant b + \varepsilon$, чем и доказано, что $U \in \overline{\Phi}$.

Из этой характеризации открытых множеств $U \in \overline{\Phi}$ и $\overline{\alpha}(U)$, прежде всего, вытекает, что если U_1 и U_2 — такие два открытых множества, что $U_1 \subset U_2$ и $U_2 \in \overline{\Phi}$, то $U_1 \in \overline{\Phi}$ и $\overline{\alpha}(U_1) \leqslant \overline{\alpha}(U_2)$. С другой стороны, если U_1 и U_2 — два открытых множества, принадлежащих $\overline{\Phi}$, то таким же будет и множество $U_1 \cup U_2$, и $\overline{\alpha}(U_1 \cup U_2) \leqslant \overline{\alpha}(U_1) + \overline{\alpha}(U_2)$. В самом деле, пусть K означает произвольное компактное множество, содержащееся в $U_1 \cup U_2$; для любой точки $x \in K$ существует ее компактная окрестность в U_1 или в U_2; следовательно, K может быть покрыто конечным числом таких окрестностей; если обозначить через K_1 (соотв. K_2) объединение тех из них, которые содержатся в U_1 (соотв. в U_2), то $K \subset K_1 \cup K_2$, откуда $\overline{\alpha}(K) \leqslant \overline{\alpha}(K_1 \cup K_2) \leqslant \overline{\alpha}(K_1) + \overline{\alpha}(K_2) \leqslant \overline{\alpha}(U_1) + \overline{\alpha}(U_2)$, чем требуемое свойство и установлено.

5° *Свойства множества* $\overline{\Phi}$ *и функции* $\overline{\alpha}$.

Теперь определение множества $\overline{\Phi}$ и функции $\overline{\alpha}$ может быть следующим образом преобразовано (с учетом условия $(\mathrm{PC}_{\mathrm{II}})$): для того чтобы $M \in \overline{\Phi}$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовали такое компактное множество K и такое открытое множество $U \in \overline{\Phi}$, что $K \subset M \subset U$ и $\overline{\alpha}(U) - \overline{\alpha}(K) \leqslant \varepsilon$; при этом $\overline{\alpha}(M)$ есть *нижняя грань* значений $\overline{\alpha}(U)$ для открытых множеств $U \in \overline{\Phi}$, содержащих M, и *верхняя грань* значений $\overline{\alpha}(K)$ для компактных множеств $K \subset M$.

Отсюда мы прежде всего выведем, что если M_1, M_2 и $M_1 \cup M_2$ принадлежат $\overline{\Phi}$, то $\overline{\alpha}(M_1 \cup M_2) \leqslant \overline{\alpha}(M_1) + \overline{\alpha}(M_2)$. Действительно, если U_1 и U_2 — два открытых множества из $\overline{\Phi}$, содержащие соответственно M_1 и M_2 и такие,

что $\overline{\alpha}(U_1) \leqslant \overline{\alpha}(M_1)+\varepsilon$, и $\overline{\alpha}(U_2) \leqslant \overline{\alpha}(M_2)+\varepsilon$, то множество $U_1 \cup U_2$ принадлежит $\overline{\Phi}$, содержит $M_1 \cup M_2$ и, значит,

$$\overline{\alpha}(M_1 \cup M_2) \leqslant \overline{\alpha}(U_1 \cup U_2) \leqslant \overline{\alpha}(U_1)+\overline{\alpha}(U_2) \leqslant \overline{\alpha}(M_1)+\overline{\alpha}(M_2)+2\varepsilon,$$

откуда и следует наше утверждение.

Далее покажем, что если K — некоторое компактное множество, а U — такое открытое множество из $\overline{\Phi}$, что $K \subset U$, то $\overline{\alpha}(U - K) = \overline{\alpha}(U) - \overline{\alpha}(K)$. На основании предыдущего $\overline{\alpha}(U) \leqslant \overline{\alpha}(K)+\overline{\alpha}(U - K)$. С другой стороны, для любого компактного множества $K' \subset U - K$ имеем $\overline{\alpha}(K \cup K') = \overline{\alpha}(K)+\overline{\alpha}(K') \leqslant \overline{\alpha}(U)$; а поскольку множество $U - K$ открыто и принадлежит $\overline{\Phi}$, то $\alpha(U - K)$ есть верхняя грань значений $\overline{\alpha}(K')$, и поэтому $\overline{\alpha}(K)+\overline{\alpha}(U - K) \leqslant \overline{\alpha}(U)$.

Таким образом, определению $\overline{\Phi}$ можно также придать следующую форму: для того чтобы $M \in \overline{\Phi}$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовали такое компактное множество K и такое открытое множество $U \in \overline{\Phi}$, что $K \subset M \subset U$ и $\overline{\alpha}(U - K) \leqslant \varepsilon$.

Теперь мы подготовлены к доказательству того, что $\overline{\Phi}$ есть алгебра, а $\overline{\alpha}$ есть *аддитивная функция множества* на $\overline{\Phi}$. Прежде всего покажем, что если M и N принадлежат $\overline{\Phi}$, то это имеет место и для $M \cap \mathbf{C}N$ и $M \cup N$. По условию, для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие два компактных множества K и K' и такие два открытых множества U и U' из $\overline{\Phi}$, что $K \subset M \subset U$, $K' \subset N \subset U'$, $\overline{\alpha}(U - K) \leqslant \varepsilon$, $\overline{\alpha}(U' - K') \leqslant \varepsilon$. Множество $K'' = K \cap \mathbf{C}U'$ компактно, а множество $U'' = U \cap \mathbf{C}K'$ открыто и принадлежит $\overline{\Phi}$ и $K'' \subset M \cap \mathbf{C}N \subset U''$; с другой стороны, $U'' - K''$ содержится в объединении множеств $U \cap \mathbf{C}K$ и $U' \cap \mathbf{C}K'$, откуда $\overline{\alpha}(U'' - K'') \leqslant 2\varepsilon$, чем доказано, что $M \cap \mathbf{C}N \in \overline{\Phi}$. Точно так же $U_1 = U \cup U'$ открыто и принадлежит $\overline{\Phi}$, $K_1 = K \cup K'$ компактно и $K_1 \subset M \cup N \subset U_1$; с другой стороны, $U_1 - K_1$ содержится в объединении $U - K$ и $U' - K'$, откуда снова $\overline{\alpha}(U_1 - K_1) \leqslant 2\varepsilon$ и $M \cup N$ принадлежит $\overline{\Phi}$. Наконец, если M и N не пересекаются, то $\overline{\alpha}(K_1) = \overline{\alpha}(K) + \overline{\alpha}(K') \geqslant \overline{\alpha}(M) + \overline{\alpha}(N) - 2\varepsilon$, и следовательно, $\overline{\alpha}(M \cup N) \geqslant \overline{\alpha}(M) + \overline{\alpha}(N) - 2\varepsilon$; а так как ε произвольно, то $\overline{\alpha}(M \cup N) = \overline{\alpha}(M) + \overline{\alpha}(N)$.

6° *Существование меры* μ.

Согласно предложению 18, п. 9, на векторном пространстве $\mathscr{E}(\overline{\Phi})$ $\overline{\Phi}$-размещенных функций существует, и притом только одна, такая положительная линейная форма β, что $\beta(\varphi_M) = \overline{\alpha}(M)$ для любого $M \in \overline{\Phi}$. Для любого компактного подмножества K их X через $\mathscr{G}(K)$ обозначим пространство *равномерных пределов* функций из $\mathscr{E}(\overline{\Phi})$ с носителем в K. Так как β

положительна, то $|\beta(f)| \leqslant \overline{\alpha}(K) \cdot \|f\|$ для любой функции $f \in \mathscr{C}(\overline{\Phi})$, носитель которой содержится в K; сужением формы β на пространство этих функций будет линейная форма, непрерывная в топологии равномерной сходимости; значит, она продолжается до непрерывной положительной линейной формы $\overline{\beta}_K$ на $\mathscr{G}(K)$. Кроме того, если K и K_1 — два компактных множества и $K \subset K_1$, то сужение формы $\overline{\beta}_{K_1}$ на $\mathscr{G}(K)$ совпадает с $\overline{\beta}_K$, и, стало быть, на объединении $\mathscr{G}$ всех $\mathscr{G}(K)$ существует положительная линейная форма $\overline{\beta}$, являющаяся продолжением каждой из форм $\overline{\beta}_K$.

Но поскольку каждое компактное множество принадлежит $\overline{\Phi}$, то пространство $\mathscr{K}$ непрерывных числовых функций с компактным носителем есть *подпространство* пространства $\mathscr{G}$ (п. 10, предл. 19); следовательно, *сужение* на $\mathscr{K}$ положительной линейной формы $\overline{\beta}$ есть положительная *мера* μ. Покажем, что для любого компактного множества K имеет место равенство $\mu(K) = \overline{\alpha}(K)$. Для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое открытое множество $U \in \overline{\Phi}$, что $K \subset U$, $\mu(U) \leqslant \mu(K) + \varepsilon$ и $\overline{\alpha}(U) \leqslant \overline{\alpha}(K) + \varepsilon$. Пусть f — непрерывное отображение пространства X в $[0, 1]$ с носителем в U и такое, что $f(x) = 1$ на K (гл. III, § 1, п. 2, лемма 1). Имеем $\mu(K) \leqslant \mu(f) \leqslant \mu(U) \leqslant \mu(K) + \varepsilon$, а с другой стороны, $\overline{\alpha}(K) = \beta(\varphi_K) \leqslant \overline{\beta}(f) \leqslant \beta(\varphi_U) = \overline{\alpha}(U) \leqslant \overline{\alpha}(K) + \varepsilon$; так как $\mu(f) = \overline{\beta}(f)$, то отсюда $|\mu(K) - \overline{\alpha}(K)| \leqslant \varepsilon$, а поскольку ε произвольно, то $\mu(K) = \overline{\alpha}(K)$.

Характеристическое свойство открытых множеств, принадлежащих $\overline{\Phi}$, в соединении со следствием 4 из теоремы 4 п. 6 показывает, что принадлежащие $\overline{\Phi}$ открытые множества суть не что иное, как открытые μ-интегрируемые множества, и что для такого множества U выполняется равенство $\mu(U) = \overline{\alpha}(U)$. Далее, теорема 4 п. 6 и характеристическое свойство множеств из $\overline{\Phi}$, указанное в п. 5, показывают, что μ-интегрируемые множества являются множествами из Φ и что для такого множества M выполняется равенство $\mu(M) = \overline{\alpha}(M)$. Наконец, утверждение о том, что $\mu^*(U) = \sup_{M \in \Phi,\ M \subset U} \alpha(M)$ для любого открытого множества U, сразу же вытекает из $(\mathrm{PC_{II}})$ и следствия 4 теоремы 4, п. 6.

Итак, теорема 5 полностью доказана.

Следствие. *Пусть X — локально компактное пространство со счетной базой, Ψ — множество борелевских подмножеств из X и β — отображение Ψ в $[0, +\infty]$, удовлетворяющее следующим условиям:*

(i) *Если $(B_1, B_2, \ldots)$ — последовательность попарно не пересекающихся борелевских подмножеств из X, то $\beta(B_1 \cup B_2 \cup \ldots) = \beta(B_1) + \beta(B_2) + \ldots$*

(ii) *Если B — компактное подмножество из X, то $\beta(B) < +\infty$.*

Тогда существует, и притом единственная, такая мера μ на X, что $\beta(B) = \mu^*(B)$ для любого $B \in \Psi$.

Пусть Φ — множество компактных подмножеств из X и α — сужение β на Φ. Тогда выполняются условия $(\mathrm{PC_I})$, $(\mathrm{PC_{II}})$, $(\mathrm{PM_I})$, $(\mathrm{PM_{II}})$, $(\mathrm{PM_{III}})$,

($\mathrm{PM}_{\mathrm{IV}}$). Пусть K — компактное подмножество из X и пусть $\varepsilon > 0$. Тогда K является пересечением убывающей последовательности $(U_1, U_2, \ldots)$ открытых относительно компактных подмножеств из X (Общая топ., гл. IX (2-е изд.), § 2, п. 5, предл. 7). Имеем

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \beta(U_n - U_{n+1}) = \beta(U_1 - K) < +\infty,$$

и значит,

$$\beta(U_n) - \beta(K) = \beta(U_n - K) = \sum_{p=n}^{+\infty} \beta(U_p - U_{p+1})$$

стремится к 0 при $n \to +\infty$. Это доказывает, что условие ($\mathrm{PM}'_{\mathrm{IV}}$) выполняется. В силу теоремы 5 существует такая положительная мера μ на X, что $\mu(K) = \alpha(K)$ для любого компактного множества K из X. А поскольку всякое открытое множество U из X является объединением возрастающей последовательности компактных множеств, то $\mu^*(U) = \beta(U)$. Пусть L — компактное подмножество из X. Согласно предложению 7 из п. 5 μ-интегрируемые подмножества из L образуют σ-алгебру подмножеств из L. Стало быть, если B — множество из Ψ, содержащееся в L, то B μ-интегрируемо; тогда для любого $\varepsilon > 0$ в X найдутся такое компактное множество K и такое открытое множество U, что $K \subset B \subset U$, $\mu^*(U) - \mu(K) \leqslant \varepsilon$ (п. 6, теорема 4). Принимая во внимание равенства $\beta(U) = \mu^*(U)$ и $\beta(K) = \mu(K)$, получаем $|\mu^*(B) - \beta(B)| \leqslant 2\varepsilon$. Следовательно, $\beta(B) = \mu^*(B)$. Наконец, всякое борелевское подмножество C из X есть объединение последовательности относительно компактных попарно не пересекающихся борелевских подмножеств, откуда $\beta(C) = \mu^*(C)$. Единственность μ непосредственно вытекает из теоремы 5.

Упражнения

1) Пусть H есть фильтрующееся по отношению $\leqslant$ множество положительных интегрируемых функций таких, что $\sup_{f \in H} N_1(f) < +\infty$. Пусть, далее, g есть верхняя огибающая множества H; для того чтобы g была интегрируема и чтобы в L^1 класс $\tilde{g}$ функции g был пределом фильтра сечений фильтрующегося множества классов функций $f \in H$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовали: функция $f_1 \in H$, фильтрующееся по отношению $\leqslant$ множество B полунепрерывных снизу интегрируемых функций и отображение $f \mapsto f^*$ множества H_1 функций $f \in H$, удовлетворяющих условию $f \leqslant f_1$, в множество B такие, что $f \leqslant f^*$ и $N_1(f^* - f) \leqslant \varepsilon$ для любой функции $f \in H_1$ (применить теорему 3, п. 4).

2) Пусть μ — мера Лебега на $\mathbf{R}$, и пусть Ω — топологическое пространство, полученное в результате наделения пространства $\mathscr{L}^1$ топологией простой сходимости на $\mathbf{R}$. Показать, что отображение $f \mapsto \int f\,d\mu$ пространства Ω в $\mathbf{R}$ не будет непрерывным ни в одной точке из Ω.

3) Пусть I — интервал из R и f — такое отображение произведения $X \times I$ в банахово пространство F, что: 1° для любого $\alpha \in I$ отображение $t \mapsto f(t, \alpha)$ пространства X в F интегрируемо; 2° для любого $t \in X$ отображение $\alpha \mapsto f(t, \alpha)$ имеет на I производную $f'_\alpha(t, \alpha)$; 3° существует такая интегрируемая функция $g \geqslant 0$, что $\| f'_\alpha(t, \alpha) \| \leqslant g(t)$ для любого $t \in X$ и любого $\alpha \in I$. Показать, что при выполнении этих условий функция $u(\alpha) = \int f(t, \alpha)\, d\mu(t)$ дифференцируема на I и что

$$u'(\alpha) = \int f'_\alpha(t, \alpha)\, d\mu(t).$$

°4) Пусть μ — мера Лебега на интервале $X = [0, 1]$.

a) Построить на X совершенное нигде не плотное множество A, имеющее произвольную меру α, заключенную в пределах $0 \leqslant \alpha < 1$ (использовать метод построения троичного канторова множества).

b) Определить на X такую последовательность (A_n) нигде не плотных интегрируемых множеств попарно без общих точек, что $\mu(A_n) = 2^{-n}$ и что всякий интервал, смежный с $B_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$, содержит подмножество из A_{n+1} строго положительной меры. Показать, что если $A = \bigcup_n A_n$, то A будет тощим множеством меры 1, а множество $\complement A$ будет не тощим и пренебрежимым.

c) Пусть $H = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_{2n+1}$; показать, что для любого открытого интервала $I \subset X$ пересечения его с H и с $\complement H$ имеют строго положительную меру. Пусть f — функция, равная почти всюду характеристической функции φ_H; показать, что не существует последовательности (f_n) непрерывных на X функций, сходящейся в *каждой* точке из X к пределу f (заметить, что f необходимо разрывна в каждой точке из X, и применить упр. 22 из «Общей топ.», гл. IX (2-е изд.), § 5).

5) Пусть μ — положительная мера на локально компактном пространстве X. Для любой определенной на X (конечной или нет) числовой функции f произвольного знака обозначим через $\mu^*(f)$ (*верхний интеграл* функции f) нижнюю грань значений $\mu(h)$ для функций $h \geqslant f$, интегрируемых и полунепрерывных снизу, если таковые существуют, и $+\infty$ в противном случае; это определение при $f \geqslant 0$ совпадает с определением из § 1, п. 3. Через $\mu_*(f)$ обозначим число $-\mu^*(-f)$ и назовем его *нижним интегралом* функции f.

a) Показать, что если f_1 и f_2 — такие две числовые функции, что $f_1(x) \leqslant f_2(x)$ почти всюду, то $\mu^*(f_1) \leqslant \mu^*(f_2)$.

b) Пусть f_1 и f_2 — такие две числовые функции, что сумма $\mu^*(f_1) + \mu^*(f_2)$ определена и $< +\infty$; показать, что функция $f_1(x) + f_2(x)$ определена почти всюду и что $\mu^*(f_1 + f_2) \leqslant \mu^*(f_1) + \mu^*(f_2)$ (при

помощи а) свести к случаю, когда $f_1(x) < +\infty$ и $f_2(x) < +\infty$ в каждой точке).

c) Пусть (f_n) есть возрастающая последовательность таких числовых функций, что, начиная с некоторого номера, $\mu^*(f_n) > -\infty$; показать, что

$$\mu^*(\sup_n f_n) = \sup_n \mu^*(f_n).$$

°6) a) Пусть f — такая числовая функция, что $\mu^*(f)$ (упр. 5) конечно. Показать, что существует интегрируемая функция $f_1 \geqslant f$, для которой $\mu(f_1) = \mu^*(f)$; если f_2 — другая интегрируемая функция, такая, что $f_2 \geqslant f$ и $\mu(f_2) = \mu^*(f)$, то f_1 и f_2 эквивалентны.

b) Для того чтобы числовая функция f была интегируемой, необходимо и достаточно, чтобы $\mu^*(f)$ и $\mu_*(f)$ были конечны и равны.

c) Пусть f — такая числовая функция, что $\mu^*(f)$ и $\mu_*(f)$ конечны; пусть g и h — такие две интегрируемые функции, что $g \leqslant f \leqslant h$ и $\mu(g) = \mu_*(f)$, $\mu(h) = \mu^*(f)$. Показать, что $\mu_*(f-g) = \mu_*(h-f) = 0$, $\mu^*(f-g) = \mu^*(h-f) = \mu^*(f) - \mu_*(f)$.

d) Пусть f_1 и f_2 — две числовые функции, для которых все числа $\mu^*(f_1)$, $\mu^*(f_2)$, $\mu_*(f_1)$, $\mu_*(f_2)$ конечны; показать, что $\mu_*(f_1+f_2) \leqslant \mu_*(f_1) + \mu^*(f_2) \leqslant \mu^*(f_1+f_2)$ (заметить, что если g_2 — такая интегрируемая функция, что $f_2 \leqslant g_2$ и $\mu^*(f_2) = \mu(g_2)$, то для любой интегрируемой функции $h \leqslant f_1+f_2$ выполняется неравенство $h - g_2 \leqslant f_1$). Вывести отсюда, что если f_1 интегрируема, то

$$\mu^*(f_1 + f_2) = \mu(f_1) + \mu^*(f_2),$$
$$\mu_*(f_1 + f_2) = \mu(f_1) + \mu_*(f_2)$$

и

$$\mu^*(f_1 + f_2) = \mu^*(\sup(f_1, f_2)) + \mu^*(\inf(f_1, f_2))$$

(для последнего соотношения воспользоваться упр. 1 из § 1).

e) Пусть f — интегрируемая функция. Для того чтобы функция g, для которой $\mu^*(g)$ конечно, была интегрируема, необходимо и достаточно, чтобы $\mu(f) = \mu^*(g) + \mu^*(f-g)$ (заметить, что если g_1 — интегрируемая функция, для которой $g \leqslant g_1$ и $\mu^*(g) = \mu(g_1)$, то $f - g_1 \leqslant f - g$).

°7) Пусть μ — положительная мера на X. Для любого подмножества $A \subset X$ назовем *внутренней мерой* A и обозначим через $\mu_*(A)$ нижний интеграл (упр. 5) характеристической функции φ_A.

a) Показать, что $\mu_*(A)$ есть верхняя грань мер компактных множеств, содержащихся в A (рассуждать, как в теореме 4).

b) Показать, что для любого подмножества A из X *конечной* внешней меры существуют такие два интегрируемых множества A_1, A_2, что $A_1 \subset A \subset A_2$ и $\mu_*(A) = \mu(A_1)$, $\mu^*(A) = \mu(A_2)$. Для того чтобы A было интегрируемо, необходимо и достаточно, чтобы $\mu^*(A)$ и $\mu_*(A)$ были конечны и равны. Показать, что, в тех же обозначениях,

$$\mu_*(A \cap \mathbf{C}A_1) = \mu_*(A_2 \cap \mathbf{C}A) = 0$$

и

$$\mu^*(A \cap \mathsf{C}A_1) = \mu^*(A_2 \cap \mathsf{C}A) = \mu^*(A) - \mu_*(A).$$

c) Пусть A — интегрируемое множество; показать, что для любого множества $B \subset A$ имеем $\mu(A) = \mu^*(B) + \mu_*(A \cap \mathsf{C}B)$.

d) Пусть A и B — два множества конечной внешней меры, не имеющие общих точек. Показать, что если $C = A \cup B$, то

$$\mu_*(A) + \mu_*(B) \leqslant \mu_*(C) \leqslant \mu_*(A) + \mu^*(B) \leqslant \mu^*(C) \leqslant \mu^*(A) + \mu^*(B)$$

и

$$\mu_*(C) - \mu_*(A) - \mu_*(B) \leqslant \mu^*(A) + \mu^*(B) - \mu^*(C)$$

(доказательство этого последнего неравенства свести при помощи b) к случаю, когда

$$\mu_*(A) = \mu_*(B) = 0;$$

показать, что если A_2 и B_2 — такие интегрируемые множества, что $A \subset A_2$, $B \subset B_2$, $\mu^*(A) = \mu(A_2)$, $\mu^*(B) = \mu(B_2)$, то $\mu_*(C) \leqslant \leqslant \mu(A_2 \cap B_2)$).

°8) Если отождествить канонически тор $\mathbf{T} = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ с интервалом $[0, 1[$ из $\mathbf{R}$, то мера Лебега μ на этом интервале будет мерой на $\mathbf{T}$; для любого множества $A \subset \mathbf{T}$ и любого $z \in \mathbf{T}$ будет иметь место равенство $\mu^*(A + z) = \mu^*(A)$.

a) Показать, что существует такая подгруппа H_0 из $\mathbf{T}$, что множества $H_n = r_n + H_0$, где r_n пробегает множество рациональных чисел, содержащихся в $[0, 1[$, образуют разбиение тора $\mathbf{T}$ (рассматривая $\mathbf{R}$ как векторное пространство над $\mathbf{Q}$, заметить, что в $\mathbf{R}$ подпространство $\mathbf{Q}$ имеет дополнение).

b) Пусть H — объединение какого-либо конечного числа множеств H_n; показать, что H не интегрируемо и что $\mu_*(H) = 0$ (заметить, что всякая подгруппа аддитивной группы $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$, порожденная конечным числом элементов, имеет в $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ бесконечный индекс; вывести отсюда, что существует разбиение тора $\mathbf{T}$ на бесконечное счетное множество множеств P_n, каждое из которых содержит множество вида $z + H$).

c) Построить на основании b) пример такой убывающей последовательности (A_n) подмножеств из $\mathbf{T}$ с пустым пересечением, что $\mu^*(A_n) = 1$ при любом n.

d) Пусть A — такое интегрируемое множество, что $H_0 \subset A$ и $\mu(A) = \mu^*(H_0) > 0$; показать, что для любого интегрируемого множества $B \subset A$ множества $B_1 = B \cap H_0$ и $B_2 = B \cap \mathsf{C}H_0$ образуют разбиение множества B, для которого $\mu^*(B_1) = \mu^*(B_2) = \mu(B)$ и $\mu_*(B_1) = \mu_*(B_2) = 0$ (использовать упр. 7b)).

°9) a) Пусть μ — положительная мера на локально компактном пространстве X. Пусть в банаховом пространстве $\mathscr{F}^1$ классов эквивалентности функций из $\mathscr{F}^1$ через G обозначено замкнутое векторное подпространство, содержащее подпространство L^1; пусть $\mathscr{G}$ — замкнутое

векторное подпространство пространства $\mathscr{F}^1$, состоящее из функций, класс которых принадлежит G. Показать, что линейную форму $\mu(f)$ можно продолжить на $\mathscr{G}$ таким образом, чтобы выполнялось неравенство $|\mu(f)| \leqslant N_1(f)$ (применить теорему Хана — Банаха). Показать, что для продолженного таким способом интеграла теорема 3 из § 3 по-прежнему верна.

b) Предположим, что G есть прямая сумма пространства L^1 и подпространства H *конечной* размерности. Показать, что для $\mathscr{G}$ остается справедливой теорема Лебега (теорема 2). (Пусть (f_n) — последовательность функций из $\mathscr{G}$, стремящаяся почти всюду к f и такая, что $|f_n| \leqslant g$, где $g \geqslant 0$, и $N_1(g) < +\infty$. Пусть $(\widetilde{u}_k)_{1\leqslant k\leqslant m}$ — базис в H, и пусть $f_n = \sum_{k=1}^{m} \alpha_{nk} u_k + h_k$, где $h_n \in \mathscr{L}^1$. Используя тот факт, что G есть прямая топологическая сумма пространств L^1 и H, показать, что α_{nk} равномерно ограничены; выбирая в случае надобности из (f_n) подпоследовательность, свести к случаю, когда каждая из последовательностей $(\alpha_{nk})_{n\geqslant 1}$ имеет предел; вывести затем, что $h_n(x)$ стремится почти всюду к пределу, и применить к последовательности (h_n) теорему Лебега; наконец, заметить, что две подпоследовательности из $(\widetilde{f}_n)$ не могут стремиться к различным пределам в G.)

°10) a) Пусть $\mathscr{E}$ — пространство Рисса и μ — такая положительная линейная форма на $\mathscr{E}$, что соотношение $\mu(|x|) = 0$ влечет $x = 0$; тогда $\mu(|x|)$ есть норма на $\mathscr{E}$, и мы предположим, что $\mathscr{E}$, наделенное этой нормой, *полно*. Тогда $\mathscr{E}$ вполне решеточно (гл. II, § 2, упр. 8e)). Следовательно (гл. II, § 1, упр. 12 и 13), существует такое локально компактное пространство X, являющееся суммой семейства (K_α) компактных стоуновых пространств, что $\mathscr{E}$ изоморфно пространству, состоящему из непрерывных на X (конечных или нет) числовых функций и содержащему пространство $\mathscr{K}(X)$. Отождествим $\mathscr{E}$ с этим пространством; тогда сужение формы μ на $\mathscr{K}(X)$ будет положительной мерой на X. Показать, что $\mathscr{E}$ канонически изоморфно пространству $L^1(\mu)$; более точно, для любой определенной на X μ-интегрируемой функции g существует, и притом только одна, функция $f \in \mathscr{E}$, эквивалентная g относительно меры μ (заметить, что всякий положительный элемент из $\mathscr{E}$ служит верхней гранью для возрастающей последовательности элементов из $\mathscr{K}(X)$ и что $\mathscr{K}(X)$ плотно в $\mathscr{L}^1(\mu)$).

b) Вывести из a), что для любого компактного пространства K существует такое локально компактное пространство S, являющееся топологической суммой семейства стоуновых компактных пространств, и такая положительная мера ν на S с носителем, равным S, что вполне решеточное пространство $\mathscr{M}(K)$ мер на K, наделенное нормой $\|\mu\|$, изоморфно $\mathscr{L}^1(\nu)$ (рассмотреть на $\mathscr{M}(K)$ линейную форму $\mu \mapsto \mu(K)$).

11) a) Пусть Γ — произвольное множество подмножеств множества A. Пусть, далее, Ψ — множество подмножеств из A вида

$X_1 \cap X_2 \cap \ldots \cap X_m \cap \mathbf{C}X_{m+1} \cap \ldots \cap \mathbf{C}X_{m+p}$, где X_i — множества из Γ, m — произвольное целое число, $m \geqslant 1$, p — произвольное целое число, $p \geqslant 0$. Показать, что наименьшая алгебра Φ, содержащая Γ, есть множество конечных объединений множеств из Ψ.

b) Пусть Δ — множество конечных пересечений множеств из Γ. Показать, что для любого векторного пространства F множество линейных комбинаций (с коэффициентами из F) характеристических функций множеств алгебры, порожденной Γ, совпадает с множеством линейных комбинаций характеристических функций множеств из Δ.

c) Пусть X — топологическое пространство и Γ — множество компактных подмножеств из X. Показать, что алгебра, порожденная множеством Γ, совпадает с множеством конечных объединений подмножеств из X вида $X \cap \mathbf{C}Y$, где X и Y — компактные множества.

12) Пусть X — отделимое топологическое пространство. Для любой пары (K, U), состоящей из компактного множества K и открытого множества U в X, через $I(K, U)$ обозначим множество таких подмножеств $M \subset X$, что $K \subset M \subset U$, и пусть $\mathscr{T}$ — топология в $\mathfrak{B}(X)$, порожденная множеством подмножеств $I(K, U)$ из $\mathfrak{B}(X)$.

a) Показать, что каждое из множеств $I(K, U)$ одновременно открыто и замкнуто в $\mathfrak{B}(X)$; вывести отсюда, что $\mathfrak{B}(X)$, наделенное топологией $\mathscr{T}$, является вполне регулярным вполне несвязным пространством.

b) Для того чтобы отображение $M \mapsto \mathbf{C}M$ пространства $\mathfrak{B}(X)$ на себя было непрерывно (в топологии $\mathscr{T}$), необходимо и достаточно, чтобы X было компактно.

c) Возьмем в качестве X интервал $[0, 1]$ из $\mathbf{R}$. Показать, что отображения $(M, N) \mapsto M \cup N$ и $(M, N) \mapsto M \cap N$ произведения $\mathfrak{B}(X) \times \mathfrak{B}(X)$ в $\mathfrak{B}(X)$ не будут непрерывны в топологии $\mathscr{T}$.

d) Пусть X локально компактно. Показать, что топология, индуцированная топологией $\mathscr{T}$ на множестве компактных подмножеств из X, мажорирует топологию, полученную из равномерной структуры пространства X методом упр. 5 из Общей топ., гл. II (3-е изд.), § 1; эти две топологии могут совпадать лишь в том случае, когда X — дискретное пространство.

°13) a) Пусть X — локально компактное пространство, и пусть Γ есть базис топологии в X, образованный относительно компактными множествами. Пусть $\mathscr{U}$ — равномерная структура, согласующаяся с топологией в X, и пусть $\mathfrak{S}$ — фундаментальная система окружений этой структуры. Пусть $M \mapsto \lambda(M)$ — конечная положительная числовая функция, определенная на Γ. Пусть для любого компактного множества $K \subset X$ и любого окружения $V \in \mathfrak{S}$ через $\alpha_V(K)$ обозначена нижняя грань чисел $\sum_i \lambda(U_i)$ для всех конечных покрытий (U_i) множества K, образованных множествами из Γ порядка малости V; предположим, что когда V пробегает $\mathfrak{S}$, верхняя грань $\alpha(K)$ чисел $\alpha_V(K)$ будет *конечной*. Показать, что на X существует (и притом

только одна) такая мера μ, что $\mu(K) = \alpha(K)$ для любого компактного множества K (применить теорему 5).

b) Пусть Ψ — множество борелевских подмножеств из X и α — отображение Ψ в $[0, +\infty]$, удовлетворяющее следующим условиям:

(i) Если B_1, B_2 — два непересекающихся борелевских подмножества из X, то $\alpha(B_1 \cup B_2) = \alpha(B_1) + \alpha(B_2)$.

(ii) Если B — компактное подмножество из X, то $\alpha(B) < +\infty$.

(iii) Если B — борелевское подмножество из X, то $\alpha(B) = \inf \alpha(U)$, где U пробегает множество открытых подмножеств из X, содержащих B.

Тогда существует, и притом единственная, такая положительная мера μ на X, что $\alpha(X) = \mu^*(B)$ для любого борелевского подмножества B из X, которое может быть покрыто последовательностью компактных подмножеств.

c) Для любого $B \in \Psi$ положим $\alpha(B) = 0$, если B может быть покрыто последовательностью компактных подмножеств, и $\alpha(B) = +\infty$ в противном случае. Тогда условия (i), (ii), (iii) из b) выполняются.

Имеем $\mu = 0$, и значит, $\alpha(B) \neq \mu^*(B)$, если B не может быть покрыто последовательностью компактных подмножеств.

14) Пусть (A_n) — последовательность интегрируемых множеств и $\sum_n \mu(A_n) < +\infty$. Пусть для любого целого k через G_k обозначено множество таких $x \in X$, что $x \in A_n$ по крайней мере для k значений индекса n; показать, что G_k интегрируемо и что $k \cdot \mu(G_k) \leqslant \sum_n \mu(A_n)$.

15) Пусть μ — положительная ограниченная мера на локально компактном пространстве X, и пусть (A_n) — такая последовательность интегрируемых множеств из X, что $\inf_n \mu(A_n) = m > 0$. Показать, что множество B точек из X, принадлежащих бесконечному числу множеств A_n, интегрируемо и что $\mu(B) \geqslant m$.

°16) Пусть X — вполне регулярное пространство, и пусть $\mathscr{C}(X)$ (соотв. $\mathscr{C}^b(X)$) есть пространство Рисса непрерывных (соотв. непрерывных и ограниченных) на X числовых функций.

a) Показать, что если линейная форма λ на $\mathscr{C}(X)$ непрерывна в топологии компактной сходимости, то она относительно ограничена.

b) Пусть λ — положительная линейная форма на $\mathscr{C}(X)$. Показать, что если λ обращается в нуль на $\mathscr{C}^b(X)$, то она равна нулю и на $\mathscr{C}(X)$ (пусть φ — каноническое отображение пространства $\mathscr{C}(X)$ на факторпространство Рисса $\mathscr{C}(X)/\mathscr{C}^b(X)$ (гл. II, § 1, упр. 4); показать, что если h есть непрерывная положительная функция, не ограниченная на X, то $n\varphi(h) \leqslant \varphi(h^2)$ при любом целом $n > 0$).

c) Пусть βX — компактификация Стоуна — Чеха пространства X, т. е. компактное пространство, полученное в результате наделения X слабейшей равномерной структурой, при которой функции из $\mathscr{C}^b(X)$ равномерно непрерывны, и пополнения полученного таким образом

равномерного пространства; всякая функция $f \in \mathscr{C}(X)$ продолжается по непрерывности до непрерывной на βX функции $\widetilde{f}$ с конечными или бесконечными значениями (рассмотреть $f/(1 + |f|)$). Если λ есть положительная линейная форма на $\mathscr{C}(X)$, то ее сужение на $\mathscr{C}^b(X)$ имеет вид $f \mapsto \mu(\widetilde{f})$, где μ — положительная мера на βX; показать, что для любой функции $f \in \mathscr{C}(X)$ функция $\widetilde{f}$ интегрируема относительно μ и что $\lambda(f) = \mu(\widetilde{f})$ (использовать b), заметив, что всякая положительная функция из $\mathscr{C}(X)$ служит верхней огибающей некоторой последовательности функции из $\mathscr{C}^b(X)$).

d) Показать, что всякая точка x_0 из носителя меры μ, не принадлежащая X, обладает следующим свойством: для любой убывающей последовательности (V_n) окрестностей точки x_0 пересечение множеств V_n содержит хотя бы одну точку из X. Обратить это утверждение.

e) Вывести из d), что если X локально компактно и счетно на бесконечности, то носитель меры μ содержится в X (сравнить с h)).

f) Показать, что если X дискретно, то носитель меры μ конечен (допустив противное, построить противоречащий пример — функцию $f \geqslant 0$, определенную на X и такую, что $\widetilde{f}$ не будет μ-интегрируема).

g) Показать, что если линейная форма λ на $\mathscr{C}(X)$ положительна и непрерывна в топологии компактной сходимости, то носитель меры μ содержится в X (ср. гл. III, § 2, предл. 11).

h) Пусть X_0 — компактное пространство, полученное добавлением бесконечно удаленной точки ω к локально компактному пространству X, определенному в Общей топ., гл. I (3-е изд.), § 9, упр. 12; пусть Y — подпространство из $\overline{\mathbf{R}}$, состоящее из целых положительных чисел и из $+\infty$, и пусть Z — локально компактное пространство, являющееся дополнением точки $(\omega, +\infty)$ в пространстве — произведении $X_0 \times Y$. Показать, что всякая непрерывная числовая функция на Z ограничена и что $f(z)$ стремится к пределу, когда z стремится к бесконечно удаленной точке $(\omega, +\infty)$ пространства Z. Вывести отсюда, что если μ — мера на Z, определенная при помощи массы $1/2^n$, помещенной в точке (ω, n) при любом $n \geqslant 0$, то всякая непрерывная функция на Z μ-интегрируема, но носитель меры μ не компактен.

°17) Пусть X — локально компактное пространство, определенное в Общей топ., гл. I (3-е изд.), § 9, упр. 12.

a) Пусть H — компактное подмножество локально выпуклого пространства $\mathscr{C}(X; \mathbf{C})$, наделенного топологией компактной сходимости; показать, что функции $f \in H$ *равномерно ограничены* на X и что существует такое $c \in X$, что при $x \geqslant c$ все функции из H являются *константами*. (Рассуждать от противного; если бы функции из H не были равномерно ограничены на X, то нашлась бы такая возрастающая последовательность (x_n) точек из X, что $\sup(|H(x_n)|) \geqslant n$, где $|H(x_n)|$ означает множество, состоящее из $|f(x_n)|$ для $f \in H$; заметить, что последовательность (x_n) сходится в X. Далее, пусть

для любого $x \in X$ через $\delta(x)$ обозначена верхняя грань колебаний всех функций $f \in H$ на интервале $[x, \rightarrow[$; функция $\delta(x)$ конечна и убывает, и значит, найдется такое $d \in X$, что $\delta(x)$ является постоянной при $x \geqslant d$. Чтобы убедиться в том, что эта постоянная β равна нулю, рассуждать, как и выше, от противного, построив две возрастающие последовательности (s_n) и (t_n) точек из X, обладающие тем свойством, что $s_n \leqslant t_n \leqslant s_{n+1} \leqslant t_{n+1}$, и такую последовательность (f_n) функций из H, что $|f_n(s_n) - f_n(t_n)| \geqslant \beta/2$.

В частности, $\mathscr{C}(X; \mathbf{C})$ есть прямая сумма пространств $\mathscr{K}(X; \mathbf{C})$ и $\mathbf{C}.1$.

b) Показать, что на X всякая мера имеет компактный носитель (пусть для любого $x \in X$ через f_x обозначена характеристическая функция интервала $]\leftarrow, x]$, которая непрерывна и имеет компактный носитель; рассмотреть на X возрастающую функцию $|\mu|(f_x)$).

c) Вывести из a) и b), что в $\mathscr{M}(X; \mathbf{C}) = \mathscr{M}^1(X; \mathbf{C}) = \mathscr{C}'(X; \mathbf{C})$ подмножества, ограниченные в топологии $\mathscr{T}$ равномерной сходимости на компактных подмножествах из $\mathscr{C}(X; \mathbf{C})$, являются ограниченными подмножествами в ультрасильной топологии (гл. III, § 1, упр. 15). Показать, что $\mathscr{C}'(X; \mathbf{C})$ не является квазиполным в топологии $\mathscr{T}$ (рассмотреть меры ε_x для $x \in X$); вывести отсюда, что относительно топологии компактной сходимости $\mathscr{C}(X; \mathbf{C})$ не является ни бочечным, ни борнологическим пространством (ср. Топ. вект. пр-ва, гл. III, § 3, п. 7, следствие 2 из теоремы 4 и упр. 18).

d) Показать, что на $\mathscr{K}(X; \mathbf{C})$ топология $\mathscr{T}_0$ (индуктивный предел топологий банаховых пространств $\mathscr{K}(X, K; \mathbf{C})$)совпадает с топологией равномерной сходимости и что пространство $\mathscr{K}(X; \mathbf{C})$, наделенное этой топологией, полно. (Пусть V — окрестность 0 в топологии $\mathscr{T}_0$; пусть для любого $x \in X$ через r_x обозначено наибольшее строго положительное число такое, что V содержит все непрерывные функции f с носителем, содержащимся в $]\leftarrow, x]$, и такие, что $\|f\| \leqslant r_x$. Показать, что нижняя грань множества чисел r_x в X строго положительна, доказав, что не может существовать такой возрастающей последовательности (x_n) точек из X, что $\lim_{n\to\infty} r_{x_n} = 0$.)

18) Пусть X — паракомпактное локально компактное пространство.

a) Показать, что пространство $\mathscr{C}(X; \mathbf{C})$ изоморфно произведению пространств Фреше, и значит, бочечно.

b) Для того чтобы подмножество H из $\mathscr{C}'(X; \mathbf{C})$ было ограничено в топологии компактной сходимости, необходимо и достаточно, чтобы существовало такое компактное подмножество K из X, что $\operatorname{supp}(\mu) \subset K$ для любой меры $\mu \in H$, и чтобы H было ограничено в ультрасильной топологии (сравнить с упр. 17c)). Топология, индуцированная на H топологией компактной сходимости, будет в этом случае совпадать с широкой топологией.

c) Показать, что в множестве $\mathscr{M}_+(X) \cap \mathscr{C}'(X; \mathbf{C})$ топология, индуцированная топологией компактной сходимости в $\mathscr{C}'(X; \mathbf{C})$, совпадает с широкой топологией. Верно ли это, когда X не паракомпактно (упр. 17)?

19) Наделим $\mathscr{C}(X; \mathbf{C})$ топологией компактной сходимости, а $\mathscr{C}'(X; \mathbf{C})$ — топологией равномерной сходимости на компактных подмножествах из $\mathscr{C}(X; \mathbf{C})$. Пусть $\mathfrak{S}$ — множество компактных подмножеств из $\mathscr{C}(X; \mathbf{C})$; показать, что билинейное отображение $(g, \mu) \mapsto g \cdot \mu$ произведения $\mathscr{C}(X; \mathbf{C}) \times \mathscr{C}'(X; \mathbf{C})$ в $\mathscr{C}'(X; \mathbf{C})$ $\mathfrak{S}$-гипонепрерывно. Пусть $\mathfrak{T}$ — множество ограниченных подмножеств из $\mathscr{C}'(X; \mathbf{C})$; показать, что если X паракомпактно, то указанное билинейное отображение также и $\mathfrak{T}$-гипонепрерывно; будет ли это последнее свойство справедливо, если не предполагать больше, что X паракомпактно (упр. 17)?

°20) Пусть X, Y — паракомпактные локально компактные пространства. Наделим пространства $\mathscr{C}'(X; \mathbf{C})$ и $\mathscr{C}'(Y; \mathbf{C})$ топологией компактной сходимости.

a) Показать, что если наделить $\mathscr{C}'(X \times Y; \mathbf{C})$ топологией компактной сходимости, то отображение $(\mu, \nu) \mapsto \mu \otimes \nu$ $(\mathfrak{S}, \mathfrak{T})$-гипонепрерывно, где $\mathfrak{S}$ означает множество ограниченных подмножеств из $\mathscr{C}'(X; \mathbf{C})$, а $\mathfrak{T}$ — множество ограниченных подмножеств из $\mathscr{C}'(Y; \mathbf{C})$ (использовать упр. 18b)).

b) Показать, что если X и Y *счетны в бесконечности* и $\mathscr{C}'(X \times Y; \mathbf{C})$ наделено топологией компактной сходимости, то отображение $(\mu, \nu) \mapsto \mu \otimes \nu$ *непрерывно*. (Руководствоваться доказательством упр. 3 гл. III, § 4 и, введя в X (соотв. Y) непрерывное разбиение единицы, подчиненное открытому локально конечному покрытию, рассуждать, как в упр. 9a), Топ. векг. пр-ва, гл. II (2-е изд.), § 4.)

c) Если X дискретно, то пространство $\mathscr{C}'(X; \mathbf{C})$ отождествляется с пространством — прямой суммой $\mathbf{C}^{(X)}$, наделенном сильнейшей локально выпуклой топологией. Построить на основании этого пример, когда X и Y дискретны, X несчетно и когда отображение $(\mu, \nu) \mapsto \mu \otimes \nu$ не является непрерывным, если наделить $\mathscr{C}'(X \times Y; \mathbf{C})$ широкой топологией (ср. Топ. векг. пр-ва, гл. II (2-е изд.), § 4, упр. 9b)).

21) Пусть — X — локально компактное пространство и $f \geqslant 0$ — числовая функция, определенная на X. Для того чтобы отображение $\mu \mapsto \mu^*(f)$ пересечения $\mathscr{M}_+(X) \cap \mathscr{C}'(X; \mathbf{C})$ в $\overline{\mathbf{R}}$ было непрерывно в топологии компактной сходимости, необходимо и достаточно, чтобы f была непрерывна на X.

22) Пусть X, Y — локально компактные пространства, μ — ограниченная мера на X и ν — ограниченная мера на Y, так, что $\mu \otimes \nu$ — ограниченная мера на $X \times Y$. Показать, что для любой функции $f \in \mathscr{C}^0(X \times Y; \mathbf{C})$ функция $x \mapsto \int f(x, y)\, dv(y)$ принадлежит

$\mathscr{C}^0(X; \mathbf{C})$ и что

$$\int f(x, y)\, d\mu(x)\, d\nu(y) = \int d\mu(x) \int f(x, y)\, d\nu(y).$$

°23) Пусть μ — мера Лебега на $\mathbf{R}^n$, $|x|$ — такая норма, что единичный шар в этой норме имеет меру, равную 1, и $(x_k)_{k\geqslant 1}$ — бесконечная последовательность различных точек такого ограниченного интегрируемого множества B, что $\mu(B) = 1$. Для любого целого m обозначим через d_m нижнюю грань чисел $|x_i - x_j|$ при $1 \leqslant i < j \leqslant m$. Показать, что $\liminf\limits_{m\to\infty} m d_m^n \leqslant \alpha_n^{-1}$, где

$$\alpha_n = 1 + n \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{1+t}\, dt.$$

(Рассуждать от противного, предположив, что для некоторого $\varepsilon > 0$ найдется такое m_0, что $m d_m^n > h_n$ для $m \geqslant m_0$, где $h_n = \alpha_n^{-1} + \varepsilon$. Пусть для $1 \leqslant i < m$ через B_i обозначен шар с центром x_i и радиусом $h_n m^{-1/n}/2$, а для $m \leqslant i \leqslant 2^n m$ через B_i обозначен шар с центром x_i и радиусом $h_n (2i^{-1/n} - m^{-1/n})/2$. Показать, что $2^n m$ шаров B_i попарно не пересекаются, и оценить меру их объединения, используя формулу Эйлера — Маклорена.)

§ 5. Измеримые функции и множества

1. Определение измеримых функций и множеств

Определение 1. *Пусть X — локально компактное пространство и μ — мера на X. Говорят, что отображение f пространства X в топологическое пространство F измеримо относительно меры μ* (или *μ-измеримо*), *если для любого компактного подмножества K пространства X существуют такое μ-пренебрежимое множество $N \subset K$ и такое разбиение множества $K - N$, состоящее из* (конечной или бесконечной) *последовательности (K_n) компактных множеств, что сужение отображения f на каждое из K_n непрерывно.*

Ясно, что всякое непрерывное отображение пространства X в F измеримо.

Отметим, что если μ и ν — такие две положительные меры на X, что всякое μ-пренебрежимое множество ν-пренебрежимо, то *любая μ-измеримая функция также ν-измерима* (ср. гл. V, § 5).

Определение 1 может быть преобразовано в следующий критерий:

Предложение 1. *Для того чтобы отображение f пространства X в F было измеримо, необходимо и достаточно, чтобы для любого компактного множества $K \subset X$ и любого числа $\varepsilon > 0$ существовало такое компактное множество $K_1 \subset K$, что $|\mu|(K - K_1) \leqslant \varepsilon$ и сужение отображения f на K_1 непрерывно.*

Действительно, если указанное условие выполнено, то можно определить по индукции последовательность таких компактных множеств $K_n \subset K$, не имеющих попарно общих точек, что $|\mu|(K - (\bigcup_{i=1}^{n} K_i)) \leqslant 1/n$ и что сужение отображения f на каждое из K_n непрерывно; тогда дополнение до K объединения множеств K_n будет пренебрежимо (§ 4, п. 5, следствие из предл. 7) и, значит, отображение f измеримо. Обратно, предположим, что существуют такое пренебрежимое множество $N \subset K$ и такое разбиение (K_n) множества $K - N$, состоящее из компактных множеств, что сужение отображения f на каждое из K_n непрерывно; для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое целое n, что если $H = \bigcup_{i=1}^{n} K_i$, то $|\mu|(K - H) \leqslant \varepsilon$ (§ 4, п. 5, следствие из предл. 7); множество H компактно, множества K_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ образуют конечное разбиение множества H на компактные множества, и сужение отображения f на каждое из K_i непрерывно; следовательно, непрерывно и сужение f на H.

Предложение 2. *Пусть (F_n) — последовательность топологических пространств, и пусть для каждого n через f_n обозначено измеримое отображение пространства X в F_n. Тогда для любого компактного множества $K \subset X$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется такое компактное множество $K_0 \subset K$, что $|\mu|(K - K_0) \leqslant \varepsilon$ и что сужение на K_0 каждой из функций f_n непрерывно.*

В самом деле, для каждого целого $n \geqslant 1$ существует такое компактное множество $K_n \subset K$, что $|\mu|(K - K_n) \leqslant \varepsilon/2^n$ и что сужение f_n на K_n непрерывно. Множество $K_0 = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ компактно, сужения на K_0 всех функций f_n непрерывны, и так как $K - K_0$ содержится в объединении множеств $K - K_n$, то

$$|\mu|(K - K_0) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon.$$

Определение 2. *Подмножество A из X называется измеримым, если измерима его характеристическая функция φ_A.*

Согласно определению 1 это означает, что измеримое множество A есть такое множество, что для любого компактного множества K существуют пренебрежимое множество $N \subset K$ и разбиение (K_n) множества $K - N$, состоящее из последовательности компактных множеств, каждое из которых содержится в $K \cap A$ или в $K \cap \complement A$.

Это определение сразу же позволяет сформулировать следующий критерий:

Предложение 3. *Для того чтобы множество A было измеримо, необходимо и достаточно, чтобы для любого компактного множества K множество $A \cap K$ было интегрируемо.*

Условие необходимо, так как объединение последовательности интегрируемых множеств A_n интегрируемо, когда сумма $\sum_n |\mu|(A_n)$ конечна (§ 4, п. 5, следствие из предл. 8). Условие достаточно, ибо для любого интегрируемого множества B существуют пренебрежимое множество $N \subset B$ и разбиение множества $B - N$ на последовательность компактных множеств (§ 4, п. 6, следствие 2 из теоремы 4).

Следствие 1. *Открытые множества и замкнутые множества измеримы.*

В частности, все пространство X измеримо.

Следствие 2. *Если X метризуемо, то всякое суслинское подмножество A из X* (Общая топ., гл. IX (2-е изд.), § 6, п. 2) *μ-измеримо относительно любой меры μ на X.*

В силу предложения 3 достаточно убедиться в том, что всякое относительно компактное суслинское множество A μ-интегрируемо. Но тогда A емкостно относительно $|\mu|^*$ (Общая топ., гл. IX (2-е изд.), § 6, п. 9, теорема 5). Стало быть, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое компактное подмножество K из A, что $|\mu|^*(A) \leqslant |\mu|^*(K) + \varepsilon = |\mu|(K) + \varepsilon$. Пусть U — открытое относи-

тельно компактное подмножество из X, содержащее A и такое, что

$$|\mu|(U) = |\mu|^*(U) \leqslant |\mu|^*(A) + \varepsilon.$$

Тогда $|\mu|^*(U - K) = |\mu|(U) - |\mu|(K) \leqslant 2\varepsilon$, и значит, $|\mu|^*(A - K) \leqslant 2\varepsilon$, чем и доказано, что A μ-интегрируемо (§ 4, п. 6, следствие 1 из теоремы 4).

2. *Принцип локализации. Локально пренебрежимые множества*

Предложение 4 (принцип локализации). *Пусть f — отображение пространства X в топологическое пространство F. Предположим, что для любого $x \in X$ существуют интегрируемая окрестность V_x точки x и измеримое отображение g_x пространства X в F, такие, что $f(y) = g_x(y)$ почти всюду на V_x. Тогда f измеримо.*

В самом деле, пусть K — компактное множество; существует конечное число таких точек $x_i \in K$, что V_x образуют покрытие K. Из этого тотчас заключаем (§ 4, п. 9, лемма 1), что существуют такое пренебрежимое множество $N \subset K$ и такое конечное разбиение множества $K - N$, состоящее из интегрируемых множеств M_j, что каждое из множеств $K \cap V_{x_i}$ является объединением подмножества из N и некоторого числа множеств M_j и что на каждом из M_j отображение f равно одной из функций g_{x_i}. Но для каждого M_j существуют пренебрежимое множество $N_j \subset M_j$ и разбиение множества $M_j - N_j$, состоящее из последовательности компактных множеств K_{nj} ($n \in \mathbf{N}$); с другой стороны, для каждого K_{nj} существуют пренебрежимое множество $P_{nj} \subset K_{nj}$ и разбиение множества $K_{nj} - P_{nj}$, состоящее из такой последовательности компактных множеств K_{mnj} ($m \in \mathbf{N}$), что сужение отображения f на каждое из множеств K_{mnj} непрерывно. А так как объединение множеств N, N_j и P_{nj} пренебрежимо, то отображение f измеримо.

Таким образом, понятие измеримой функции носит локальный характер.

Определение 3. *Множество $A \subset X$ называется локально пренебрежимым (относительно меры μ), если для любого $x \in X$ существует такая окрестность V точки x, что множество $V \cap A$ пренебрежимо.*

Согласно принципу локализации всякое локально пренебрежимое множество *измеримо*. Свойства пренебрежимых множеств (§ 2) показывают, что любое подмножество локально пренебрежимого множества локально пренебрежимо и что любое счетное объединение локально пренебрежимых множеств локально пренебрежимо.

Предложение 5. *Для того чтобы множество A было локально пренебрежимо, необходимо и достаточно, чтобы для любого компактного множества K множество $A \cap K$ было пренебрежимо.*

Достаточность очевидна, так как всякая точка из X имеет компактную окрестность. Необходимость следует из того, что если для любого $x \in K$ существует такая окрестность V_x точки x, что $A \cap V_x$ пренебрежимо, то найдется конечное число точек $x_i \in K$, для которых V_{x_i} образуют покрытие K и $A \cap K$ содержится в объединении пренебрежимых множеств $A \cap V_{x_i}$.

Следствие 1. *Для того чтобы множество A было пренебрежимо, необходимо и достаточно, чтобы оно было локально пренебрежимо и имело конечную внешнюю меру.*

Необходимость очевидна. Обратно, если условие выполнено, то A содержится в интегрируемом открытом множестве G, являющемся объединением пренебрежимого множества N и последовательности (K_n) компактных множеств (§ 4, п. 6, следствие 2 из теоремы 4); так как множество $A \cap N$ и множества $A \cap K_n$ пренебрежимы, то это верно и для их объединения A.

Следствие 2. *Всякое открытое локально пренебрежимое множество пренебрежимо* (и, стало быть, содержится в дополнении носителя меры μ).

В самом деле, внешняя мера открытого множества G служит верхней гранью мер $|\mu|(K)$ компактных множеств $K \subset G$ (§ 4, п. 6, следствие 4 из теоремы 4); если G локально пренебрежимо, то $|\mu|(K) = 0$ для любого содержащегося в G компактного множества K, и, значит, $|\mu|^*(G) = 0$.

Следствие 3. *В локально компактном пространстве X, счетном в бесконечности, всякое локально пренебрежимое множество пренебрежимо.*

Действительно, так как X является объединением последовательности (K_n) компактных множеств, то всякое локально пренебрежимое множество A является объединением пренебрежимых множеств $A \cap K_n$ и потому пренебрежимо.

Можно указать примеры не счетных в бесконечности локально компактных пространств и мер на таком пространстве X, что в X существуют локально пренебрежимые множества, не являющиеся пренебрежимыми (§ 1, упр. 5).

Следствие 4. *Пусть f — отображение пространства X в топологическое пространство F. Если множество N точек разрыва функции f локально пренебрежимо, то f измерима.*

В самом деле, для любого компактного множества $K \subset X$ множество $K \cap N$ пренебрежимо (предл. 5) и, стало быть, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое компактное множество $K_1 \subset K - (K \cap N)$, что $|\mu|(K - K_1) \leqslant \varepsilon$ (§ 4, п. 6, теорема 4), и, по условию, сужение f на K_1 непрерывно; отсюда и следует утверждение.

Если $P\{x\}$ есть некоторое свойство, то свойство «$P\{x\}$ *имеет место локально почти всюду* (*относительно меры* μ)», по определению, эквивалентно свойству «*множество тех* x, *для которых* $x \in X$ *и не* $P\{x\}$, *локально пренебрежимо* (*относительно меры* μ)». Если F — произвольное множество, то отношение «$f(x) = g(x)$ локально почти всюду» есть отношение эквивалентности в множестве отображений пространства X в F. В частности, если F есть векторное пространство, то отображение f пространства X в F, при котором $f(x) = 0$ локально почти всюду, называется *локально пренебрежимым*. Мы предоставляем читателю установить для этих понятий большинство свойств, соответствующих тем, которые были перечислены в § 2, пп. 4, 5 и 6, для функций, равных между собой почти всюду. Мы же ограничимся замечанием, что если два *непрерывных* отображения f и g пространства X в отделимое топологическое пространство F равны между собой *локально почти всюду*, то они, на основании следствия 2 из предложения 5, равны *почти всюду* (и, значит, равны между собой в любой точке носителя меры μ (§ 2, п. 4, предл. 9)); с другой стороны, мы можем сформулировать следующее пред-

ложение, являющееся непосредственным следствием принципа локализации:

Предложение 6. *Пусть f — измеримое отображение пространства X в топологическое пространство F. Всякое отображение пространства X в F, равное f локально почти всюду, измеримо.*

3. Элементарные свойства измеримых функций

Теорема 1. *Пусть X — локально компактное пространство, μ — мера на X, (F_n) — последовательность топологических пространств и $F = \prod_n F_n$ — их произведение. Пусть, далее, для каждого индекса n через f_n обозначено измеримое отображение пространства X в F_n, и пусть $f(x) = (f_n(x)) \in F$; тогда для любого непрерывного отображения и множества $f(X)$ в топологическое пространство G функция $x \mapsto u(f(x))$ измерима.*

В самом деле, для любого компактного подмножества K из X и любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое компактное множество $K_1 \subset K$, что $|\mu|(K - K_1) \leqslant \varepsilon$ и что сужения на K_1 всех функций f_n непрерывны (п. 1, предл. 2); ясно, что функция $u \circ f$ непрерывна на K_1, откуда и следует теорема.

Замечания. 1) Теорема не распространяется на *произвольное* произведение топологических пространств (упр. 1).

2) Если f — непрерывное отображение пространства X в себя, а g — измеримое отображение X в F, то $g \circ f$ не обязательно измеримо (упр. 2).

Следствие 1. *Верхняя и нижняя огибающие конечного числа измеримых числовых (конечных или нет) функций измеримы.*

Действительно, $\sup(u, v)$ и $\inf(u, v)$ непрерывны на $\bar{\mathbf{R}} \times \bar{\mathbf{R}}$.

Следствие 2. *Для того чтобы (конечная или нет) числовая функция f была измерима, необходимо и достаточно, чтобы были измеримы f^+ и f^-.*

Необходимость вытекает из следствия 1, а достаточность — из того, что образ A пространства X при отображении $x \mapsto (f^+(x), f^-(x))$ в $\bar{\mathbf{R}} \times \bar{\mathbf{R}}$ не содержит точек $(+\infty, +\infty)$ и $(-\infty, -\infty)$, и, значит, отображение $(u, v) \mapsto u - v$ непрерывно на A.

Следствие 3. *Если f и g — два измеримых отображения пространства X в топологическое векторное пространство F, то отображения $f+g$ и αf измеримы* (α — произвольный скаляр).

Таким образом, множество измеримых отображений пространства X в топологическое векторное пространство F является векторным пространством.

Следствие 4. *Пусть F — n-мерное векторное пространство над* $\mathbf{R}$ *и пусть $(e_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ — его базис. Для того чтобы функция $f=\sum_{k=1}^{n} e_k f_k$ была измерима, необходимо и достаточно, чтобы была измерима каждая из числовых функций f_k.*

Следствие 5. *Пусть F, G, H — три топологических векторных пространства и пусть $(u, v)\mapsto [u\cdot v]$ — непрерывное билинейное отображение произведения $F\times G$ в H. Если f есть измеримое отображение пространства X в F, а g — измеримое отображение пространства X в G, то $[f\cdot g]$ есть измеримое отображение пространства X в H.*

В частности, если f есть измеримое отображение пространства X в действительное (соотв. комплексное) нормированное пространство F, а g — измеримое отображение пространства X в $\mathbf{R}$ (соотв. $\mathbf{C}$), то отображение gf измеримо. Если F — *нормированная алгебра*, а f и g — измеримые отображения пространства X в F, то отображение fg измеримо.

Следствие 6. *Если f есть измеримое отображение пространства X в нормированное пространство F, то числовая функция $|f|$ измерима.*

4. *Пределы измеримых функций*

Теорема 2 (Егоров). *Пусть X — локально компактное пространство, μ — мера на X, A — счетное множество, $\mathfrak{F}$ — фильтр на A со счетным базисом, $(f_\alpha)_{\alpha\in A}$ — семейство измеримых отображений пространства X в метризуемое пространство F. Предположим, что предел $\lim_{\mathfrak{F}} f_\alpha(x)=f(x)$ существует на дополнении к локально пренебрежимому подмножеству N из X. Тогда:*

1° *функция* f (продолженная произвольно на N) *измерима*;

2° *для любого компактного подмножества* $K \subset X$ *и любого* $\varepsilon > 0$ *найдется такое компактное подмножество* $K_1 \subset K$, *что* $|\mu|(K - K_1) \leqslant \varepsilon$ *и что сужения отображений* f_α *на* K_1 *непрерывны и равномерно сходятся на* K_1 *к отображению* f.

Первое утверждение является очевидным следствием второго, которое мы сейчас и докажем. Существует такое компактное множество $K_0 \subset K$, что $|\mu|(K - K_0) \leqslant \varepsilon/2$ и что сужения на K_0 всех функций f_α непрерывны (п. 1, предл. 2). Обозначим через (A_n) убывающий счетный базис фильтра $\mathfrak{F}$, а через d — расстояние в F, согласующееся с топологией этого пространства. Пусть для любой пары целых чисел $n > 0$, $r > 0$ через $B_{n,r}$ обозначено множество таких точек $x \in K_0$, что хотя бы для одной пары α, β индексов, принадлежащих A_n, выполняется неравенство $d(f_\alpha(x), f_\beta(x)) \geqslant 1/r$; для фиксированных α и β множество тех $x \in K_0$, при которых $d(f_\alpha(x), f_\beta(x)) \geqslant 1/r$, замкнуто в K_0 и, значит, компактно; таким образом, $B_{n,r}$ является счетным объединением содержащихся в K_0 компактных множеств и, стало быть, интегрируемо (§ 4, п. 5, предл. 6 и 8). Если зафиксировать r, то пересечение убывающей последовательности множеств $B_{n,r}$ ($n = 1, 2, \ldots$) будет иметь меру нуль, потому что $f_\alpha(x)$ стремится к $f(x)$ по фильтру $\mathfrak{F}$ почти всюду на K_0; следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} |\mu|(B_{n,r}) = 0$ (§ 4, п. 5, следствие из предл. 7), и, значит, найдется такое целое n_r, для которого $|\mu|(B_{n_r,r}) \leqslant \varepsilon/2^{r+2}$. Обозначим через B объединение (по $r = 1, 2, \ldots$) множеств $B_{n_r,r}$; оно интегрируемо, и $|\mu|(B) \leqslant \sum\limits_{r=1}^{\infty} |\mu|(B_{n_r,r}) \leqslant \frac{\varepsilon}{4}$ (§ 4, п. 5, следствие из предл. 8). Через C обозначим дополнение множества B до K_0; $f_\alpha(x)$, по построению, *равномерно* сходится к $f(x)$ по фильтру $\mathfrak{F}$ на C, а поскольку сужения функций f_α на C непрерывны, то непрерывно и сужение на C функции f. Тогда для выполнения сформулированных в теореме утверждений достаточно выбрать компактное множество $K_1 \subset C$ так, чтобы $|\mu|(C - K_1) \leqslant \varepsilon/4$, ибо

$$|\mu|(K - K_1) = |\mu|(K - K_0) + |\mu|(B) + |\mu|(C - K_1) \leqslant \varepsilon.$$

Заключения теоремы 2 уже не обязаны выполняться, если F не метризуемо (упр. 1). Если F метризуемо и множество A несчетно, но фильтр $\mathfrak{F}$ обладает счетным базисом, то первое заключение теоремы 2 остается справедливым; действительно, если (A_n) есть счетный базис фильтра $\mathfrak{F}$ и α_n — некоторый элемент из A_n, то функция f является локально почти всюду пределом последовательности (f_{α_n}) и, значит, измерима; однако второе заключение теоремы 2 может уже не выполняться (ср. упр. 4).

Следствие 1. *Пусть* (f_n) — *последовательность* (*конечных или нет*) *числовых функций. Если* f_n *измеримы, то функции* $\sup_n f_n$, $\inf_n f_n$, $\lim.\sup_{n\to\infty} f_n$, $\lim.\inf_{n\to\infty} f_n$ *тоже измеримы.*

В самом деле, расширенная прямая $\overline{\mathbf{R}}$, гомеоморфная компактному интервалу из $\mathbf{R}$, метризуема. Функция $\sup_n f_n$ есть простой предел возрастающей последовательности функций $g_n = \sup(f_1, f_2, \ldots, f_n)$, которые измеримы (п. 3, следствие 1 из теоремы 1); далее, $\lim.\sup_{n\to\infty} f_n$ есть простой предел убывающей последовательности функций $h_n = \sup_{p\geqslant 0} f_{n+p}$, каждая из которых, на основании предыдущего, измерима. Наконец, поскольку $\inf_n f_n = -\sup_n (-f_n)$ и $\lim.\inf_{n\to\infty} f_n = -\lim.\sup_{n\to\infty} (-f_n)$, то эти функции измеримы.

Следствие 2. *Измеримые множества в* X *образуют* σ-*алгебру* (Общая топ., гл. IX (2-е изд.), § 6, п. 3).

В самом деле, если M и N измеримы, то $\varphi_{M\cup N} = \varphi_M + \varphi_N - \varphi_M\varphi_N$ и $\varphi_{M\cap \complement N} = \varphi_M - \varphi_M\varphi_N$ измеримы в силу теоремы 1, п. 3. Если (M_n) — последовательность измеримых множеств и M — их объединение, то $\varphi_M = \sup_n \varphi_{M_n}$ измерима в силу следствия 1 из теоремы 2. Отсюда получаем следствие.

В частности, учитывая, что открытые множества измеримы, получаем:

Следствие 3. *Борелевские множества в* X (Общая топ., гл. IX (2-е изд.), § 6, п. 3, опр. 4) μ-*измеримы относительно любой меры* μ *на* X.

5. *Критерии измеримости*

Если F есть топологическое векторное пространство, то всякая размещенная на измеримых множествах (§ 4, п. 9, опр. 4) функция со значениями в F, очевидно, измерима (п. 3, следствие 3 из теоремы 1); такая функция f принимает лишь конечное число значений, и для любого $y \in F$ множество $f^{-1}(y)$ измеримо. Вообще, пусть F — любое топологическое пространство и f — отображение пространства X в F, принимающее лишь конечное число различных значений a_i $(1 \leqslant i \leqslant m)$; если множества $A_i = f^{-1}(a_i)$ измеримы, то функция f измерима. Действительно, для любого компактного множества K и для каждого из множеств $A_i \cap K$ существуют пренебрежимое множество $N_i \subset A_i \cap K$ и разбиение множества $A_i \cap K \cap \mathbf{C}N_i$, состоящее из последовательности (K_{in}) компактных множеств; а так как K есть объединение множеств $A_i \cap K$ и сужение функции f на каждое из K_{in} постоянно, а значит, непрерывно, то f измерима. Допуская вольность, будем говорить, что отображение f пространства X в F есть *измеримая размещенная функция*, если она принимает лишь конечное число значений и если для любого $y \in F$ множество $f^{-1}(y)$ измеримо.

Теорема 3. *Для того чтобы отображение f пространства X в метризуемое пространство F было измеримо, необходимо и достаточно, чтобы для любого компактного множества $K \subset X$ существовала такая последовательность (g_n) измеримых размещенных функций со значениями в F, что $g_n(x)$ стремится к $f(x)$ для почти всех $x \in K$.*

Достаточность вытекает из теоремы Егорова и из принципа локализации. Докажем необходимость: по условию найдутся пренебрежимое множество $N \subset K$ и разбиение (K_m) множества $K - N$, состоящее из компактных множеств, на каждом из которых f непрерывна. Чтобы выбрать последовательность (g_n), достаточно проделать следующее: обозначим через d расстояние, согласующееся с топологией пространства F; затем, согласно лемме 1, § 4, п. 9, для каждого K_i с индексом $i \leqslant n$ выберем конечное разбиение этого множества на такие достаточно малые интегрируемые множества A_{ij} $(1 \leqslant j \leqslant q_i)$, что колебание функции f на каждом из A_{ij} не превосходит $1/n$; положим g_n постоянной на каждом

из A_{ij}, равной одному из значений функции f на этом множестве (для $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant q_i$), а для любой точки из X, не принадлежащей никакому из A_{ij}, — равной некоторому фиксированному элементу $a \in F$. Ясно, что последовательность $(g_n(x))$ сходится к $f(x)$ в любой точке из K, не принадлежащей N.

Следствие 1. *Пусть f — измеримое отображение пространства X в банахово пространство F; для любого компактного множества $K \subset X$ существует последовательность (g_n) таких измеримых размещенных функций с носителем в K, что $|g_n(x)| \leqslant |f(x)|$ для любого $x \in X$ и что $g_n(x)$ стремится к $f(x)$ для почти всех $x \in K$.*

Сохранив обозначения, введенные при доказательстве теоремы 3, и обозначив через a_{ij} значение функции f на A_{ij}, мы получим искомую последовательность, взяв в качестве значения функции g_n на A_{ij} точку 0, если $|a_{ij}| \leqslant 1/n$, точку $a_{ij}\left(1 - \frac{1}{n|a_{ij}|}\right)$ в противном случае и положив $g_n(x) = 0$ на дополнении объединения множеств A_{ij} $(1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant q_i)$.

Следствие 2. *Пусть X — локально компактное пространство, счетное в бесконечности. Если f есть измеримое отображение пространства X в метризуемое пространство F, то найдется такая последовательность (g_n) измеримых размещенных функций со значениями в F, что $g_n(x)$ стремится к $f(x)$ для почти всех $x \in X$.*

В самом деле, если X есть объединение возрастающей последовательности (A_n) компактных множеств, то непустые множества $A_n - A_{n-1}$ образуют разбиение пространства X на интегрируемые множества; следовательно, существуют такое пренебрежимое множество $N \subset X$ и такое разбиение множества $\complement N$, состоящее из последовательности (K_n) компактных множеств, что сужение функции f на каждое из K_n непрерывно; далее без всяких изменений повторяется доказательство теоремы 3.

Предложение 7. *Пусть f — измеримое отображение пространства X в топологическое пространство F; прообраз при отображении f любого замкнутого* (соотв. *открытого*) *в F множества измерим.*

Достаточно провести доказательство для прообраза $f^{-1}(A)$ замкнутого в F множества A. Пусть K — компактное подмножество из X; существуют пренебрежимое множество $N \subset K$ и разбиение (K_n) множества $K - N$, состоящее из таких компактных множеств, что сужение функции f на каждое из K_n непрерывно. Тогда пересечение $K_n \cap f^{-1}(A)$ служит прообразом замкнутого множества A при сужении отображения f на K_n; значит, оно является замкнутым в K_n множеством и, стало быть, компактно. Таким образом, множество $K \cap f^{-1}(A)$ представляет собой объединение пренебрежимого множества $N \cap f^{-1}(A)$ и компактных множеств $K_n \cap f^{-1}(A)$, что доказывает измеримость множества $f^{-1}(A)$.

Теорема 4. *Пусть F — метризуемое пространство и d — расстояние, согласующееся с его топологией. Для того чтобы отображение f пространства X в F было измеримо, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие два условия*:

a) *прообраз при отображении f всякого замкнутого шара из F измерим*;

b) *для любого компактного множества $K \subset X$ существует такое счетное подмножество H из X, что $f(x) \in \overline{H}$ для почти всех $x \in K$.*

Необходимость условия a) вытекает из предложения 7; что же касается условия b), то при обозначениях, принятых в теореме 3, оно будет выполнено, если в качестве H взять счетную последовательность, составленную из значений всех функций g_n.

Покажем теперь, что условия a) и b) достаточны. Обозначим через K произвольное компактное множество из X; найдется такое пренебрежимое подмножество N из K, что $f(K - N)$ содержится в замыкании счетного множества точек из F, которые мы расположим в последовательность (a_n). Через $A_{n,p}$ обозначим множество тех $x \in K - N$, для которых $d(f(x), a_n) \leqslant 1/p$. Из условия a) вытекает, что $A_{n,p}$ измеримо. Определим для фиксированного p по индукции последовательность множеств $B_{n,p} \subset K - N$, положив $B_{1,p} = A_{1,p}$ и $B_{n+1,p} = A_{n+1,p} \cap \mathbf{C}(\bigcup_{k \leqslant n} A_{k,p})$; множества $B_{n,p}$ измеримы, и те из них, которые не пусты, образуют разбиение множества $K - N$. Обозначим через $g_{m,p}$ функцию, равную a_i

на множестве $B_{i,p}$ для $1 \leqslant i \leqslant m$ и равную постоянной $b \in F$ на дополнении объединения этих множеств; $g_{m,p}$ — измеримая размещенная функция; когда m неограниченно возрастает, $g_{m,p}$ стремится просто к функции f_p, равной a_n на $B_{n,p}$ $(n \geqslant 1)$ и b на $N \cup \complement K$, и значит (теорема 2), f_p измерима. Когда p неограниченно возрастает, то $f_p(x)$ стремится к $f(x)$ при всех $x \in K - N$ и к b для $x \in N \cup \complement K$; следовательно, предел функций f_p измерим, и, стало быть, на основании принципа локализации, сама функция f тоже измерима.

Замечания. 1) Одного условия a) недостаточно для измеримости функции f (упр. 7).

2) Если топология пространства F имеет *счетный базис*, то условие b) теоремы 4 автоматически выполняется для любого отображения пространства X в F. При этом из доказательства следует, что достаточно предположить лишь, что при отображении f прообразы замкнутых шаров с рациональным радиусом и с центром, принадлежащим некоторому счетному всюду плотному множеству из F, являются измеримыми множествами.

3) Условие a) может быть заменено условием, что при отображении f прообраз всякого открытого шара из F измерим.

Особого упоминания заслуживает случай числовых функций (конечных или нет).

Предложение 8. *Пусть D — счетное всюду плотное множество в $\mathbf{R}$. Для того чтобы (конечная или нет) числовая функция f была измерима, достаточно (и необходимо), чтобы для любого $a \in D$ множество тех $x \in X$, в которых $f(x) \geqslant a$, было измеримо.*

В самом деле, если это условие выполняется, то для любого $b \in \overline{\mathbf{R}}$ множество тех x, в которых $f(x) \geqslant b$, измеримо, как пересечение множеств (образующих счетное семейство), состоящих из тех x, в которых $f(x) \geqslant a$, когда a пробегает множество точек из D, не превосходящих b. Множество тех x, в которых $f(x) < b$, измеримо, как дополнение измеримого множества. Наконец, если b конечно, то множество тех x, в которых $f(x) \leqslant b$, измеримо, как пересечение множеств, состоящих из тех x, в которых $f(x) \leqslant b + 1/n$; множество $f^{-1}(-\infty)$ тоже измеримо, как пересечение множеств, состоящих из тех x, в которых $f(x) < n$, где n пробегает $\mathbf{Z}$. Окончательно получаем, что прообраз при отображе-

нии f любого замкнутого интервала из $\overline{\mathbf{R}}$ измерим, как пересечение двух измеримых множеств, и значит, применима теорема 4.

Можно было бы также показать, что достаточно, чтобы для любого $a \in D$ множество тех x, в которых $f(x) > a$, было измеримо.

Следствие. *Всякая полунепрерывная снизу* (соотв. *сверху*) *функция измерима.*

Действительно, если f полунепрерывна снизу, то множество тех $x \in X$, в которых $f(x) \leqslant a$, замкнуто при любом $a \in \overline{\mathbf{R}}$.

Предложение 7 позволяет уточнить следующим образом теорему 3, когда F метризуемо и *компактно*:

Предложение 9. *Если F есть метризуемое и компатное пространство, то всякое измеримое отображение f пространства X в F есть равномерный предел* (на всем X) *последовательности измеримых размещенных функций.*

Пусть d означает расстояние, согласующееся с топологией в F. Для любого целого n найдется *конечное* число таких точек $a_k \in F$, что замкнутые шары B_k с центром a_k и радиусом $1/n$ образуют покрытие пространства F; значит, множества $A_k = f^{-1}(B_k)$ измеримы (предл. 7) и образуют покрытие пространства X. Следовательно (§ 4, п. 9, лемма 1), существует такое разбиение (C_i) пространства X на конечное число измеримых множеств, что каждое из A_k является объединением конечного числа множеств C_i. Обозначим через c_i некоторую точку из C_i, а через g_n — измеримую размещенную функцию, равную $f(c_i)$ на C_i (для каждого индекса i). Ясно, что $d(f(x), g_n(x)) \leqslant 2/n$ для всех $x \in X$.

Предложение 10. *Пусть F — банахово пространство счетного типа, F' — его сопряженное и (a'_n) — слабо плотная последовательность в единичном шаре из F'* (Топ. вект. пр-ва, гл. IV, § 5, п. 1, предл. 2).

Для того чтобы отображение f пространства X в F было измеримо, необходимо и достаточно, чтобы для любого n скалярная функция $x \mapsto \langle f(x), a'_n \rangle$ была измерима.

Необходимость очевидна (п. 3, теорема 1); поэтому докажем достаточность. Достаточно показать выполнение условия а) теоремы 4, и для этого на основании принципа локализации доста-

точно доказать, что для любого компактного подмножества K из X и любого замкнутого шара $B \subset F$ с центром a и радиусом r множество $A = K \cap f^{-1}(B)$ измеримо; для любого $z \in F$ имеем

$$|z| = \sup_n |\langle z, a'_n \rangle| / |a'_n|;$$

значит, A есть пересечение K с множествами, определяемыми неравенствами

$$|\langle f(x), a'_n \rangle - \langle a, a'_n \rangle| \leqslant r |a'_n|;$$

а поскольку эти множества по условию измеримы, то A измеримо.

Следствие 1. *Пусть F — банахово пространство. Для того чтобы отображение f пространства X в F было измеримо, необходимо и достаточно, чтобы оно удовлетворяло следующим условиям:*

а) *для любого $a' \in F'$ скалярная функция $x \mapsto \langle f(x), a' \rangle$ измерима;*

b) *для любого компактного множества $K \subset X$ существует такое счетное подмножество $H \subset F$, что $f(x) \in \overline{H}$ для почти всех $x \in K$.*

Необходимость условий вытекает из теорем 1 и 4, п. 3. Для доказательства достаточности опять достаточно убедиться в выполнении условия а) теоремы 4. Приняв те же обозначения, что и в доказательстве предложения 10, можно (в силу b)) предположить (изменив в случае необходимости f на пренебрежимом множестве), что $f(K) \subset \overline{H}$, где H — счетное подмножество из F. Если V есть замкнутое векторное подпространство пространства F, порожденное множеством $H \cup \{a\}$, то V является банаховым пространством счетного типа, и всякая непрерывная линейная форма на V будет сужением формы $a' \in F'$; то же рассуждение, что и в предложении 10, показывает теперь, что множество $K \cap f^{-1}(B)$ измеримо.

Следствие 2. *Пусть F — локально выпуклое метризуемое пространство счетного типа и F' — его сопряженное. Для того чтобы отображение f пространства X в F было измеримо, необходимо и достаточно, чтобы для любого $a' \in F'$ скалярная функция $x \mapsto \langle f(x), a' \rangle$ была измерима.*

В самом деле, F может рассматриваться как подпространство счетного произведения $\prod_n E_n$ банаховых пространств (Топ. вект.

пр-ва, гл. II (2-е изд.), § 4, п. 3), и можно предположить, что $\mathrm{pr}_n(F)$ плотно в E_n, которое, стало быть, является пространством счетного типа. Тогда для любого n отображение $\mathrm{pr}_n \circ f$ в силу предложения 10 измеримо, и следовательно, в силу теоремы 1, п. 3, f измеримо.

Предложение 11. *Пусть F — локально выпуклое пространство, являющееся индуктивным пределом последовательности метризуемых локально выпуклых пространств F_n счетного типа, причем F есть объединение пространств F_n. Пусть F' — сопряженное к F пространство, наделенное слабой топологией $\sigma(F', F)$. Для того чтобы отображение f пространства X в F' было измеримо, необходимо и достаточно, чтобы для любого $a \in F$ скалярная функция $x \mapsto \langle a, f(x)\rangle$ была измерима.*

Условие необходимо в силу теоремы 1, п. 3; докажем достаточность. Предположим вначале, что F — метризуемое пространство счетного типа, и пусть D — счетное множество, плотное в F. Пусть далее (V_n) — убывающая фундаментальная последовательность открытых уравновешенных выпуклых окрестностей 0 в F; полярные множества V_n^0 равностепенно непрерывны, и их объединение составляет все F'. Пусть $X_n = f^{-1}(V_n^0)$; последовательность (X_n) возрастает и $X = \bigcup_n X_n$; покажем, что каждое из X_n μ-измеримо. Действительно, $D \cap V_n$ плотно в V_n; пусть для любого $y \in D \cap V_n$ через S_y обозначено множество тех $x \in X$, для которых $|\langle y, f(x)\rangle| \leqslant 1$; условие влечет, что каждое из S_y измеримо, и X_n есть пересечение счетного семейства множеств S_y для $y \in D \cap V_n$. Далее для любого компактного подмножества K из X и любого $\varepsilon > 0$ найдется такое целое n, что $|\mu|(K - (K \cap X_n)) \leqslant \varepsilon/4$, затем найдется такое компактное подмножество K_1 из $K \cap X_n$, что $|\mu|((K \cap X_n) - K_1) \leqslant \varepsilon/4$; наконец, найдется такое компактное подмножество K_2 из K_1, что $|\mu|(K_1 - K_2) \leqslant \varepsilon/2$ и что сужения на K_2 всех функций $\langle y, f\rangle$, где $y \in D$, непрерывны (п. 1, предл. 2). Но множество $f(K_2) \subset f(X_n) \subset V_n^0$ равностепенно непрерывно, и поэтому топология, индуцируемая на $f(K_2)$ топологией $\sigma(F', F)$, совпадает с топологией простой сходимости на D (Общая топ., гл. X (2-е изд.), § 2, п. 4, теорема 1); стало быть, сужение f на K_2 непрерывно, откуда и следует наше утверждение в этом первом случае.

Перейдем к общему случаю. Если z' — непрерывная линейная форма на F, ее сужение z'_n на F_n непрерывно; поскольку $F = \bigcup_n F_n$, то сопряженное F' к F может быть (алгебраически) отождествлено с векторным подпространством произведения $\prod_n F'_n$, и мы имеем $\mathrm{pr}_n(z') = z'_n$. Кроме того, всякое конечное подмножество из F содержится в одном из F_n, и значит, топология $\sigma(F', F)$ есть не что иное, как топология, индуцируемая топологией — произведением топологий $\sigma(F'_n, F_n)$. Таким образом, если $\langle a, f\rangle$ измерима для любого $a \in F$, то измерима и $\langle a_n, \mathrm{pr}_n \circ f\rangle$ для любого n и любого $a_n \in F_n$, поскольку $\langle a_n, \mathrm{pr} \circ f\rangle = \langle a_n, f\rangle$; стало быть, первая часть доказательства показывает, что $\mathrm{pr}_n \circ f$ измеримо при любом n, и следовательно, измеримо и f (п. 3, теорема 1).

6. *Критерии интегрируемости*

Теорема 5. *Для того чтобы отображение f пространства X в банахово пространство F было интегрируемо в p-й степени $(1 \leqslant p < +\infty)$, необходимо и достаточно, чтобы f было измеримо и чтобы $N_p(f)$ было конечно.*

Условие *необходимо*: в самом деле, если $f \in \mathscr{L}^p_F$, то найдется последовательность (g_n) непрерывных функций с компактным носителем, сходящаяся почти всюду к f (§ 3, п. 4, следствие 2 из теоремы 3); тогда, в силу теоремы 2, п. 4, отображение f будет измеримо.

Для доказательства *достаточности* мы предварительно установим лемму.

Лемма 1. *Пусть g — такая функция со значениями в F, что $N_p(g) < +\infty$ (то есть функция из $\mathscr{F}^p_F$). Тогда множество A тех точек $x \in X$, в которых $g(x) \neq 0$, содержится в объединении пренебрежимого множества и последовательности компактных множеств.*

В самом деле, обозначим через A_n множество тех точек $x \in X$, в которых $|g(x)| \geqslant 1/n$; тогда A будет объединением множеств A_n, и будет выполняться неравенство $\varphi_{A_n} \leqslant n|g|$, откуда $|\mu|^*(A_n) \leqslant (nN_p(g))^p$; значит, A_n содержится в объединении пренебрежимого множества и последовательности компактных

множеств (§ 4, п. 6, следствие 3 из теоремы 4); стало быть, то же самое справедливо и для A, и лемма доказана.

Рассмотрим теперь случай, когда f имеет *компактный* носитель K. Согласно следствию 1 из теоремы 3, п. 4 существует последовательность (g_n) таких измеримых размещенных функций, что $|g_n(x)| \leqslant |f(x)|$ в каждой точке $x \in X$ и что $g_n(x)$ стремится почти всюду к $f(x)$. Но g_n представляет собой линейную комбинацию характеристических функций измеримых подмножеств из K; а так как эти подмножества в силу предложения 3, п. 1 интегрируемы, то g_n принадлежит $\mathscr{L}^p_F$. Поскольку же $N_p(f) < +\infty$, то теорема Лебега (§ 3, п. 7, теорема 6) показывает, что f тоже принадлежит $\mathscr{L}^p_F$.

В общем случае из леммы 1 вытекает существование такой возрастающей последовательности (K_n) компактных множеств, что $f(x)$ обращается в нуль почти всюду на дополнении объединения множеств K_n. Обозначим через f_n функцию, равную $f(x)$ на K_n и 0 вне его; f_n измерима в силу следствия 5 из теоремы 1, п. 3; а поскольку $|f_n| \leqslant |f|$, то, в силу уже доказанного, f_n принадлежит $\mathscr{L}^p_F$. А так как $f(x)$ равна почти всюду пределу последовательности функций $f_n(x)$, то теорема Лебега снова показывает, что $f \in \mathscr{L}^p_F$, чем и завершается доказательство.

Следует отметить, что *локально пренебрежимая*, но *не пренебрежимая* функция не интегрируема; таким образом, функция, равная *локально почти всюду* интегрируемой функции, не обязана быть интегрируемой.

Следствие 1. *Для того чтобы множество было интегрируемо, необходимо и достаточно, чтобы оно было измеримо и имело конечную внешнюю меру.*

Следствие 2. *Пусть (F_n) — последовательность топологических пространств, пусть для каждого индекса n через f_n обозначено измеримое отображение пространства X в F_n, и пусть $f(x) = (f_n(x)) \in F = \prod_n F_n$; наконец, пусть u — непрерывное отображение пространства $f(X)$ в банахово пространство G. Для того чтобы функция $g(x) = u(f(x))$ была интегрируема, необходимо и достаточно, чтобы $N_1(g) < +\infty$.*

Действительно. g измерима (п. 3, теорема 1).

Следствие 3. *Для любой интегрируемой функции f и любого измеримого множества A функция $f\varphi_A$ интегрируема.*

В самом деле, из теоремы 5 и из следствия 5 теоремы 1, п. 3 вытекает, что $f\varphi_A$ измерима, и $N_1(f\varphi_A) \leqslant N(f)$.

Положим $\int\limits_A f\,d\mu = \int f\varphi_A\,d\mu$ (или $\int\limits_A f\mu$) для любой интегрируемой функции f и любого измеримого множества A. Будем также для любой (конечной или нет) функции $f \geqslant 0$ вместо $\int^* f\varphi_A\,d\,|\,\mu\,|$ писать $\int\limits_A^* f\,d\,|\,\mu\,|$ (или $\int\limits_A^* f\,|\,\mu\,|$), (полагая $f(x)\,\varphi_A(x) = 0$, если $f(x) = +\infty$, а $\varphi_A(x) = 0$).

Следствие 4. *Для любой последовательности (f_n) измеримых положительных функций на X*

$$\int^* \Big(\sum_n f_n\Big)\,d\,|\mu| = \sum_n \int^* f_n\,d\,|\mu|. \tag{1}$$

Учитывая теорему 3 из § 1, п. 3, все сводится к доказательству того, что для двух измеримых функций $f \geqslant 0$, $g \geqslant 0$ на X

$$\int^* (f+g)\,d\,|\,\mu\,| = \int^* f\,d\,|\,\mu\,| + \int^* g\,d\,|\,\mu\,|. \tag{2}$$

Но это есть не что иное, как свойство аддитивности интеграла, когда f и g интегрируемы. В противном случае, если, например, f не интегрируема, в силу теоремы 5 имеем $\int^* f\,d\,|\,\mu\,| = +\infty$, и тем более, $\int^* (f+g)\,d\,|\,\mu\,| = +\infty$.

Следствие 5. *Для любой последовательности (A_n) попарно не пересекающихся измеримых множеств*

$$|\mu|^*\Big(\bigcup_n A_n\Big) = \sum_n |\mu|^*(A_n).$$

Это сразу же вытекает из следствия 4, примененного к φ_{A_n}.

7. *Мера, индуцированная на локально компактном подпространстве*

Пусть X — локально компактное пространство, μ — мера на X и Y — *локально компактное подпространство* из X. Поскольку Y есть пересечение открытого множества и замкнутого множества в X (Общая топ., гл. I (3-е изд.), § 9, п. 7, предл. 12), то оно μ-измеримо (п. 1, следствие из предл. 3). Обозначим для любой функции $g \in \mathscr{K}(Y; \mathbf{C})$ через g' функцию, определенную на X, равную g на Y и 0 на $X - Y$; покажем, что g' μ-*интегрируема*. Можно ограничиться случаем, когда g действительна и $g \geqslant 0$ (записывая g как линейную комбинацию таких функций); а поскольку g' ограничена и имеет компактный носитель, достаточно показать, что g' μ-измерима (п. 6, теорема 5); но это вытекает из того, что g' полунепрерывна сверху на X (п. 5, следствие из предл. 8). Таким образом, можно сформулировать следующее определение.

Определение 4. *Пусть задано локально компактное подпространство Y локально компактного пространства X; мерой, индуцированной на Y мерой μ на X, называется мера, определяемая формулой*

$$\int g \, d\mu_Y = \int g' \, d\mu \tag{3}$$

для любой функции $g \in \mathscr{K}(Y; \mathbf{C})$; здесь g' означает функцию, равную g на Y и 0 на $X - Y$. Индуцированная мера обозначается μ_Y или $\mu \mid Y$.

Пример. Пусть μ — мера Лебега на $\mathbf{R}$ и I — *произвольный* интервал из $\mathbf{R}$; I есть локально компактное подпространство пространства $\mathbf{R}$, и мера, индуцированная на I мерой μ, есть линейная форма

$$g \longmapsto \int_a^b g(x) \, dx$$

на $\mathscr{K}(I; \mathbf{C})$, причем a и b — начало и конец (не обязательно конечные) интервала I (ср. § 4, п. 4, пример); иными словами, это есть то, что мы назвали *мерой Лебега* на I.

В случае, когда Y — *открытое* подпространство из X, определение 4 совпадает с определением меры, индуцируемой μ на Y

(или сужением μ на Y), приведенным в главе III, § 2, п. 1: действительно, тогда для любой функции $g \in \mathscr{K}(Y; \mathbf{C})$ функция g' непрерывна на X.

В главе V § 5 мы подробно изучим интегрирование относительно индуцированной меры, а до тех пор нам понадобятся лишь следующие результаты.

Лемма 2. *Пусть μ — положительная мера на X и K — компактное подмножество из X.*

(i) *Для любого компактного* (соотв. *открытого*) *подмножества H из K справедливо равенство $\mu_K(H) = \mu(H)$.*

(ii) *Для того чтобы подмножество N из K было μ_K-пренебрежимо, необходимо и достаточно, чтобы оно было μ-пренебрежимо.*

(iii) *Если S — носитель меры μ_K, то* $\operatorname{supp}(\mu_S) = S$.

(i) Можно ограничиться случаем, когда H компактно. Обозначим через f характеристическую функцию множества H в пространстве K; f — полунепрерывная сверху и, значит, является нижней огибающей убывающего фильтрующегося семейства (g_α) функций из $\mathscr{K}_+(K)$; имеем $\mu_K(H) = \inf_\alpha \int g_\alpha \, d\mu_K$ (§ 4, п. 4, следствие 2 из предл. 5). Если g'_α — функция, равная g_α на K и 0 на $X - K$, то g'_α полунепрерывна сверху, и нижняя огибающая убывающего фильтрующегося семейства (g'_α) есть характеристическая функция φ_H множества H в пространстве X; стало быть, в силу (3) имеем

$$\mu(H) = \inf_\alpha \int g'_\alpha \, d\mu = \inf_\alpha \int g_\alpha \, d\mu_K = \mu_K(H).$$

(ii) Если N μ-пренебрежимо, то для любого $\varepsilon > 0$ в X найдется такая открытая относительно компактная окрестность U множества N, что $\mu(U) \leqslant \varepsilon$; а поскольку $K - (U \cap K)$ компактно, из (i) следует, что $\mu_K(U \cap K) \leqslant \mu(U) \leqslant \varepsilon$, и значит, N μ_K-пренебрежимо. Обратно, если N μ_K-пренебрежимо, то в X найдется такая открытая окрестность V множества N, что $\mu_K(V \cap K) \leqslant \varepsilon$; в силу (i) имеем

$$\mu(V \cap K) = \mu_K(V \cap K),$$

и стало быть, $\mu(N) = 0$, поскольку ε произвольно.

(iii) Для любого открытого подмножества U из K, пересекающегося с S, имеем по предположению $\mu_K(U \cap S) \neq 0$, и значит,

по (i), $\mu(U \cap S) \neq 0$, а поскольку $U \cap S$ открыто в S, то $\mu_S(U \cap S) \neq 0$ по (i); но любое непустое открытое множество в S имеет вид $U \cap S$, где U открыто в K; тем самым доказано, что $\operatorname{supp}(\mu_S) = S$.

Лемма 3. *Пусть Y — локально компактное подпространство из X; для любой меры μ на X справедливо* $|\mu_Y| = |\mu|_Y$.

Пусть f — функция из $\mathscr{K}_+(Y)$ и $\varepsilon > 0$ — произвольное число; по определению, найдется такая функция $g \in \mathscr{K}(Y; \mathbf{C})$, что $|g| \leqslant f$ и $|\mu_Y|(f) \leqslant |\mu_Y(g)| + \varepsilon$. Если обозначить через f' и g' функции, полученные соответственно продолжением функций f и g нулем на $X - Y$, то $\mu_Y(g) = \mu(g')$, а поскольку $|g'| \leqslant f'$, то

$$|\mu(g')| \leqslant |\mu|(|g'|) \leqslant |\mu|(f') = |\mu|_Y(f),$$

откуда $|\mu_Y|(f) \leqslant |\mu|_Y(f) + \varepsilon$, и в силу произвольности ε,

$$|\mu_Y|(f) \leqslant |\mu|_Y(f).$$

С другой стороны, пусть K — носитель f и U — такая компактная окрестность множества K в X, что $|\mu|(U - K) \leqslant \varepsilon$; согласно теореме Урысона найдется функция $f_1 \in \mathscr{K}_+(X)$, продолжающая f, имеющая носитель в U и такая, что $\|f_1\| = \|f\|$. Существует такая функция $h_1 \in \mathscr{K}(X; \mathbf{C})$, что $|h_1| \leqslant f_1$ и что $|\mu|(f_1) \leqslant |\mu(h_1)| + \varepsilon$. Если h — сужение h_1 на Y, то $h \in \mathscr{K}(Y; \mathbf{C})$, $|h| \leqslant f$ и $\mu(h_1) - \mu_Y(h) = \mu(h_1 \varphi_{U-K})$, и стало быть, $|\mu(h_1) - \mu_Y(h)| \leqslant \|f\| \cdot |\mu|(U - K) \leqslant \varepsilon \|f\|$; кроме того, имеем

$$|\mu|(f_1) - |\mu|_Y(f) = |\mu|(f_1 \varphi_{U-K}),$$
$$\|\mu|(f_1) - |\mu|_Y(f)| \leqslant \varepsilon \|f\|.$$

Отсюда выводим, что

$$|\mu|_Y(f) \leqslant |\mu_Y(h)| + \varepsilon(1 + 2\|f\|) \leqslant |\mu_Y|(f) + \varepsilon(1 + 2\|f\|),$$

а поскольку ε произвольно, то $|\mu|_Y(f) \leqslant |\mu_Y|(f)$, чем и завершается доказательство.

8. *μ-плотные семейства компактных множеств*

Предложение 12. *Пусть μ — мера на локально компактном пространстве X, A — μ-измеримое подмножество из X и $\mathfrak{K}$ — множество компактных подмножеств из A, удовлетворяющее следующим условиям:*

($\mathrm{PL_I}$) *Всякое замкнутое* (и значит, компактное) *подмножество множества из* $\mathfrak{K}$ *принадлежит* $\mathfrak{K}$.

($\mathrm{PL_{II}}$) *Любое конечное объединение множеств из* $\mathfrak{K}$ *принадлежит* $\mathfrak{K}$.

Тогда следующие четыре свойства эквивалентны:

a) *Для того чтобы подмножество* B *из* A *было локально* μ*-пренебрежимо, необходимо и достаточно, чтобы* $|\mu|^*(B \cap K) = 0$ *для любого* $K \in \mathfrak{K}$.

b) *Для любого компактного подмножества* K_0 *из* A *и любого* $\varepsilon > 0$ *найдется подмножество* $K \in \mathfrak{K}$, *содержащееся в* K_0 *и такое, что* $|\mu|(K_0 - K) \leqslant \varepsilon$.

c) *Для любого компактного подмножества* B *из* A *существует разбиение множества* B, *состоящее из* μ*-пренебрежимого множества* N *и последовательности* (H_n) *компактных множеств, принадлежащих* $\mathfrak{K}$.

d) *Для любого компактного подмножества* B *из* A *существует возрастающая последовательность* (K_n) *компактных множеств из* $\mathfrak{K}$, *содержащихся в* B *и таких, что множество* $N = B - \bigcup_n K_n$ μ*-пренебрежимо.*

Сразу получаем (п. 2, предл. 5), что d) влечет a); c) влечет d), если взять в качестве K_n объединение таких H_p, что $p \leqslant n$, и воспользоваться ($\mathrm{PL_{II}}$). Чтобы показать, что b) влечет c), определим по индукции последовательность (H_p) множеств из $\mathfrak{K}$ так, чтобы $H_{n+1} \subset B - \bigcup_{p \leqslant n} H_p$ и чтобы $|\mu|(B - \bigcup_{p \leqslant n} H_p) \leqslant 1/n$ (§ 4, п. 6, теорема 4). Наконец, остается доказать, что a) влечет b). Рассуждая от противного, предположим, что верхняя грань α чисел $|\mu|(K)$, где K пробегает множество подмножеств из K_0, принадлежащих $\mathfrak{K}$, такова, что $\alpha < |\mu|(K_0)$. В силу ($\mathrm{PL_{II}}$) существует возрастающая последовательность (L_n) компактных подмножеств из K_0, принадлежащих $\mathfrak{K}$, такая, что $\sup_n |\mu|(L_n) = \alpha$. Положим $B = \bigcup_n L_n$; B интегрируемо и $|\mu|(B) = \alpha$, а значит, $|\mu|(K_0 - B) = |\mu|(K_0) - \alpha > 0$. Но, с другой стороны, мы покажем, что для любого подмножества $K \in \mathfrak{K}$ $|\mu|(K \cap (K_0 - B)) = 0$, что в силу a) приведет к противоречию. В самом деле, если бы существовало такое подмножество $K \in \mathfrak{K}$, что $|\mu|(K \cap (K_0 - B)) > 0$, то существовало бы такое компактное подмножество H из

$K \cap (K_0 - B)$, что $|\mu|(H) > 0$. Согласно (PL_I) тогда было бы $H \in \mathfrak{K}$ и, для достаточно больших n,

$$|\mu|(L_n \cup H) = |\mu|(L_n) + |\mu|(H) > \alpha.$$

Но $L_n \cup H$ принадлежит $\mathfrak{K}$ в силу (PL_{II}), что противоречит определению α.

Определение 6 *). *Пусть A — μ-измеримое подмножество из X. Говорят, что множество $\mathfrak{K}$ компактных подмножеств из A μ-плотно в A, если выполняются условия* (PL_I), (PL_{II}) a), b), c), d) *предложения* 12.

Множество всех компактных подмножеств из A μ-плотно в A. В случае $A = X$ будем вместо «μ-плотное множество в X» говорить просто «μ-плотное множество». Если $X - A$ локально μ-пренебрежимо, то всякое множество компактных подмножеств из A, μ-плотное в A, μ-плотно в X.

Замечание. Предположим, что A является объединением последовательности (L_n) компактных множеств и μ-пренебрежимого множества (соотв. локально μ-пренебрежимого), и пусть $\mathfrak{K}$ есть множество компактных подмножеств, μ-плотное в A. Применяя к каждому L_n свойство c) формулировки предложения 12, видим, что A является объединением последовательности компактных множеств, *принадлежащих* $\mathfrak{K}$, и μ-пренебрежимого множества (соотв. локально μ-пренебрежимого).

Если K — компактное подмножество из X, то утверждения, что некоторое множество компактных подмножеств из K μ-плотно в K или μ_K-*плотно* в K, равносильны; это вытекает из лемм 2 и 3 п. 7 и из условия b) предложения 12.

Предложение 13. *Пусть A — μ-измеримое подмножество из X и $\mathfrak{K}$ — множество компактных подмножеств, μ-плотное в A. Пусть, далее, $\mathfrak{H}$ — множество компактных подмножеств из A, удовлетворяющее* (PL_I) *и* (PL_{II}) *и такое, что для любого $K \in \mathfrak{K}$ множество тех $H \in \mathfrak{H}$, которые принадлежат K, μ_K-плотно* (или, что сводится к тому же, μ-*плотно*) *в K. Тогда $\mathfrak{H}$ μ-плотно в A.*

*) В авторском тексте пропущено определение 5. При переводе этот пропуск оставлен во избежание путаницы в системе ссылок по другим книгам трактата. (*Прим. перев.*)

В самом деле, пусть L — компактное подмножество из A. Для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $K \in \mathfrak{K}$, что $K \subset L$ и $|\mu|(L - K) \leqslant \varepsilon/2$, а затем такое $H \in \mathfrak{H}$, что $H \subset K$ и $|\mu|(K - H) \leqslant \varepsilon/2$; отсюда выводим, что $|\mu|(L - H) \leqslant \varepsilon$, и предложение доказано.

9. *Локально счетные разбиения*

Определение 7. *Говорят, что множество* $\mathfrak{A}$ *подмножеств топологического пространства* T *локально счетно, если для любого* $t \in T$ *существует такая окрестность* V *точки* t, *что множество* $A \in \mathfrak{A}$, *пересекающихся с* V, *счетно.*

Если множество $\mathfrak{A}$ подмножеств из T локально счетно, то для любого компактного подмножества K из T множество тех $A \in \mathfrak{A}$, которые пересекаются с K, счетно, ибо K может быть покрыто конечным числом открытых окрестностей точек из K, каждая из которых пересекается не более чем со счетным числом множеств, принадлежащих $\mathfrak{A}$.

Определение 7 показывает, что *объединение* локально счетного множества μ-измеримых подмножеств (соотв. локально μ-пренебрежимых) локально компактного пространства μ-измеримо (соотв. локально μ-пренебрежимо) (п. 1, предл. 3 и п. 2, предл. 5).

Предложение 14. *Пусть* X — *локально компактное пространство,* μ—*мера на* X, A — μ-*измеримое подмножество из* X *и* $\mathfrak{K}$ — *множество компактных подмножеств из* A, μ-*плотное в* A. *Существует локально счетное множество* $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{K}$, *состоящее из попарно не пересекающихся множеств, такое, что* $A - \bigcup_{K \in \mathfrak{H}} K$ *локально* μ-*пренебрежимо и такое, что для любого* $K \in \mathfrak{H}$ *носитель меры* μ_K *есть все* K.

Рассмотрим множества $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{K}$, состоящие из таких попарно не пересекающихся множеств, что для любого $L \in \mathfrak{L}$ имеем $\operatorname{supp}(\mu_L) = L$. Эти множества $\mathfrak{L}$ образуют подмножество $\mathscr{H}$ множества $\mathfrak{P}(\mathfrak{K})$, которое не пусто (ибо оно содержит элемент $\varnothing$) и которое мы упорядочим отношением включения в $\mathfrak{P}(\mathfrak{K})$. Очевидно, что $\mathscr{H}$ *индуктивно;* пусть $\mathfrak{H}$ — максимальный элемент в $\mathscr{H}$

(Теория множеств, Сводка рез., § 6, п. 10). Покажем прежде всего, что $\mathfrak{H}$ *локально счетно*. Действительно, обозначим для любого $x \in X$ через V открытую относительно компактную окрестность точки x; если $(K_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ — конечное семейство различных множеств из $\mathfrak{H}$, пересекающихся с V, то $\sum_{i=1}^{n} |\mu|(K_i \cap V) = |\mu|(V \cap (\bigcup_{i=1}^{n} K_i))$, поскольку K_i попарно не пересекаются; отсюда $\sum_{i=1}^{n} |\mu|(K_i \cap V) \leqslant |\mu|(V)$. Стало быть, если $\mathfrak{H}_V$ — совокупность $K \in \mathfrak{H}$, пересекающихся с V, то

$$\sum_{K \in \mathfrak{H}_V} |\mu|(K \cap V) < +\infty,$$

а поскольку $|\mu|(K \cap V) > 0$ для любого $K \in \mathfrak{H}_V$, то $\mathfrak{H}_V$ счетно. Докажем, далее, что $N = A - \bigcup_{K \in \mathfrak{H}} K$ локально μ-пренебрежимо. Мы знаем (см. выше), что N μ-измеримо. Если бы N не было локально пренебрежимо, то оно содержало бы не пренебрежимое компактное множество L_0, и значит (п. 8, предл. 12), компактное не пренебрежимое множество $L \subset L_0$, принадлежащее $\mathfrak{K}$. А так как $|\mu_L|(L) = |\mu|(L) > 0$ (п. 7, леммы 2 и 3), то мера μ_L, индуцированная на L мерой μ, не является нулевой; стало быть, ее носитель является непустым компактным подмножеством, принадлежащим $\mathfrak{K}$ (в силу $(\mathrm{PL_I})$), и мы имеем $\mathrm{supp}\,(\mu_S) = S$ (п. 7, лемма 2, (iii)). Отсюда заключаем, что множество $\mathfrak{H} \cup \{S\}$ должно принадлежать $\mathscr{H}$, что противоречит определению $\mathfrak{H}$; следовательно, множество N локально пренебрежимо, чем и завершается доказательство.

10. *Измеримые функции, определенные на измеримом подмножестве*

Предложение 15. *Пусть X — локально компактное пространство, μ — мера на X, A — μ-измеримое подмножество из X и f — отображение A в топологическое пространство F. Следующие условия эквивалентны*:

а) *Множество $\mathfrak{H}$ таких компактных подмножеств K из A, что сужение f на K непрерывно, μ-плотно в A.*

b) *Существует множество* $\mathfrak{K}$ *компактных подмножеств из* A, μ-*плотное в* A *и такое, что сужение* f *на все* $K \in \mathfrak{K}$ μ_K-*измеримо.*

c) *Существуют такой гомеоморфизм* j *пространства* F *на подпространство топологического пространства* G *и такое* μ-*измеримое отображение* g *пространства* X *в* G, *что* $g \mid A = j \circ f$.

d) *Всякое продолжение* f *до отображения пространства* X *в* F, *постоянное на* $X - A$, μ-*измеримо.*

Ясно, что a) влечет b) и что d) влечет c). Тот факт, что c) влечет a), вытекает из условия c) предложения 12, п. 8. С другой стороны, b) влечет a): действительно, определение 1 показывает, что множество подмножеств $H \in \mathfrak{K}$, содержащихся в некотором произвольном $K \in \mathfrak{K}$, μ_K-плотно в K (п. 8, предл. 12c)), и предложение 13, п. 8 показывает, что $\mathfrak{K}$ μ-плотно в A. Остается убедиться в том, что a) влечет d). Пусть g — продолжение f на X, постоянное на $X - A$. Для любого компактного подмножества L из X множества $L \cap A$ и $L \cap (X - A)$ μ-интегрируемы; значит, для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такое компактное подмножество $P \subset L \cap A$ и такое компактное подмножество $Q \subset L \cap (X - A)$, что $|\mu|((L \cap A) - P) \leqslant \varepsilon/4$ и $|\mu|((L \cap (X - A)) - Q) \leqslant \varepsilon/4$. С другой стороны, существует подмножество $H \in \mathfrak{K}$, содержащееся в P и такое, что $|\mu|(P - H) \leqslant \varepsilon/2$; тогда сужение g на компактное множество $K = H \cup Q$ непрерывно (ибо g постоянно на Q), и мы имеем $|\mu|(L - K) \leqslant \varepsilon$, что и завершает доказательство.

Определение 8. *Пусть* X — *локально компактное пространство,* μ — *мера на* X *и* A — μ-*измеримое подмножество из* X. *Отображение* f *множества* A *в топологическое пространство* F *называется* μ-*измеримым, если оно удовлетворяет эквивалентным условиям из предложения* 15.

Следовательно, если A локально μ-пренебрежимо, то *любое* отображение A в F μ-измеримо.

Следствие 1. *Пусть* X — *локально компактное пространство,* μ — *мера на* X, A — μ-*измеримое подмножество из* X *и* f — μ-*измеримое отображение* A *в топологическое пространство* F. *Пусть, далее,* $\mathfrak{K}$ — *множество компактных подмножеств из* X, μ-*плотное в* X. *Тогда существует разбиение множества* A, *состоящее из локально пренебрежимого множества* N *и из такого*

локально счетного семейства $(K_\lambda)_{\lambda\in L}$ *множеств* $K_\lambda \in \mathfrak{K}$, *что* $f \mid K_\lambda$ *непрерывно для любого* $\lambda \in L$.

Принимая во внимание предложение 14, п. 9, достаточно показать, что множество $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{K}$ таких подмножеств $K \in \mathfrak{K}$, что $K \subset A$ и $f \mid K$ непрерывно, будет μ-*плотно* в A. Но из предложения 1, п. 1 и условия d) предложения 15 сразу непосредственно вытекает, что для любого компактного подмножества K_0 из A и любого $\varepsilon > 0$ существует такое принадлежащее $\mathfrak{K}$ подмножество $K \subset K_0$, что $|\mu|(K_0 - K) \leqslant \varepsilon$ и $f \mid K$ непрерывно; таким образом, заключение следует из предложения 12, п. 8.

Следствие 2. *Пусть* K — *компактное подпространство из* X; *для того чтобы отображение* f *пространства* K *в топологическое пространство* F *было* μ-*измеримо, необходимо и достаточно, чтобы оно было* μ_K-*измеримо.*

Учитывая лемму 2, п. 7, это сразу же вытекает из предложения 1, п. 1 и условия a) предложения 15.

Предложение 16. *Пусть* $\mathfrak{A}$ — *локально счетное множество* μ-*измеримых подмножеств из* X *и пусть* $B = \bigcup_{A\in\mathfrak{A}} A$. *Для того чтобы отображение* f *множества* B *в топологическое пространство* F *было* μ-*измеримо, необходимо и достаточно, чтобы сужение* f *на любое* $A \in \mathfrak{A}$ *было* μ-*измеримо.*

Как мы уже заметили (п. 9), B μ-измеримо. Поскольку необходимость условия очевидна, докажем его достаточность. Итак, пусть K — компактное подмножество из B. По условию, найдется последовательность множеств (A_n), принадлежащих $\mathfrak{A}$, такая, что $K \cap A_n$ образуют покрытие K. Положим $C_0 = K \cap A_0$,

$$C_n = K \cap A_n \cap \mathbf{C}\Big(\bigcup_{i<n} C_i\Big)$$

для любого $n > 0$, так что непустые C_n образуют разбиение K на μ-интегрируемые множества. Но сужение f на C_n μ-измеримо, и значит, существует разбиение C_n, состоящее из μ-пренебрежимого множества N_n и последовательности $(L_{mn})_{m\geqslant 0}$ таких компактных множеств, что $f \mid L_{mn}$ непрерывно. Поскольку $N = \bigcup_n N_n$ μ-пренебрежимо, то ясно, что условие a) предложения 15 выполняется, откуда и следует предложение.

Свойство d) предложения 15 позволяет сразу же обобщить на измеримые функции, определенные на измеримом подмножестве A из X, свойства измеримых функций, определенных на всем X, изложенные в пп. 2—5; мы предоставляем читателю провести эти обобщения. Укажем только, что принцип локализации (п. 2, предл. 4) по-прежнему будет справедлив, если предположить, что каждая из функций g_x определена только на V_x (или почти всюду на V_x) и измерима.

11. *Сходимость по мере*

Пусть X — локально компактное пространство, μ — мера на X, A — μ-измеримое подмножество из X и F — *равномерное пространство*; мы будем обозначать через $\mathscr{S}(A, \mu; F)$ или $\mathscr{S}_F(A, \mu)$ (или просто $\mathscr{S}_F(\mu)$ и даже $\mathscr{S}_F$, когда $A = X$) множество *μ-измеримых отображений A в F* (п. 10, опр. 8). Для любого окружения V равномерной структуры пространства F, любого μ-интегрируемого множества $B \subset A$ и любого $\delta > 0$ мы будем обозначать через $\boldsymbol{W}(V, B, \delta)$ множество пар (f, g) функций из $\mathscr{S}(A, \mu; F)$, обладающих следующим свойством: множество M тех $x \in B$, для которых $(f(x), g(x)) \notin V$, таково, что $|\mu|^*(M) \leqslant \delta$. Покажем, что множества $\boldsymbol{W}(V, B, \delta)$ образуют *фундаментальную систему окружений* равномерной структуры в $\mathscr{S}(A, \mu; F)$: ясно, что $\boldsymbol{W}(V, B, \delta)$ симметрично, если таково V, и что если $V' \subset V$, $B' \supset B$ и $\delta' \leqslant \delta$, то

$$\boldsymbol{W}(V', B', \delta') \subset \boldsymbol{W}(V, B, \delta);$$

стало быть, достаточно проверить выполнение аксиомы (U_{III}) (Общая топ., гл. II (3-е изд.), § 1, п. 1). Но если V' — такое окружение, что $\overset{2}{V'} \subset V$, то

$$\boldsymbol{W}(V', B, \delta/2) \circ \boldsymbol{W}(V', B, \delta/2) \subset \boldsymbol{W}(V, B, \delta).$$

Отметим, что когда K пробегает μ-*плотное множество* $\mathfrak{K}$ *компактных* подмножеств из A, множества $\boldsymbol{W}(V, K, \delta)$ также образуют фундаментальную систему окружений предыдущей равномерной структуры; действительно, для любого интегрируемого множества $B \subset A$ существует компактное подмножество $K \in \mathfrak{K}$, содержащееся в B и такое, что $|\mu|(B - K) \leqslant \delta$, и следовательно, $\boldsymbol{W}(V, K, \delta) \subset \boldsymbol{W}(V, B, 2\delta)$.

Определение 9. *Говорят, что равномерная структура в* $\mathscr{S}(A, \mu; F)$, *множества* $\boldsymbol{W}(V, B, \delta)$ *которой образуют фундаментальную систему окружений, есть равномерная структура сходимости по мере на* A.

Соответствующая топология называется *топологией сходимости по мере на* A, и фильтр (соотв. последовательность), сходящийся в этой топологии, называют *сходящимся* (соотв. *сходящейся*) по мере на A; часто, когда $A = X$, A не упоминается.

Предположим, что F *отделимо*; тогда для любого μ-интегрируемого множества $B \subset A$ пересечение окружений $\boldsymbol{W}(V, B, \delta)$, где V пробегает фундаментальную систему окружений для F, а δ пробегает множество чисел > 0, есть множество таких пар (f, g), что $f(x) = g(x)$ *почти всюду* (*относительно* μ) *на* B. Действительно, множество M тех $x \in B$, для которых $f(x) \neq g(x)$, μ-интегрируемо, поскольку это есть прообраз при μ-измеримом отображении $x \mapsto (f(x), g(x))$ дополнения диагонали в $F \times F$, которое открыто (п. 5, предл. 7); если $|\mu|(M) = \alpha > 0$, то найдется такое компактное множество $K \subset M$, что $|\mu|(M - K) < \alpha/2$ и что сужения f и g на K непрерывны; следовательно, имеется такое окружение V_0 для F, что $(f(x), g(x)) \notin V_0$ для любого $x \in K$, и значит, $(f, g) \notin \boldsymbol{W}(V_0, B, \alpha/2)$.

Из этого заключаем, что когда F отделимо, пересечение *всех* окружений для $\mathscr{S}(A, \mu; F)$ есть множество таких пар (f, g), что $f(x) = g(x)$ *локально почти всюду на* A. Отделимое равномерное пространство, ассоциированное с $\mathscr{S}(A, \mu; F)$, которое мы обозначим $S(A, \mu; F)$ или $S_F(A, \mu)$ (или даже $S_F(\mu)$ или S_F, когда $A = X$), состоит, следовательно, из *классов эквивалентности* по отношению «$f(x) = g(x)$ локально почти всюду на A» в множестве $\mathscr{S}(A, \mu; F)$.

Предложение 17. *Пусть* $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ — *локально счетное семейство* μ-*измеримых подмножеств из* A, *попарно не пересекающихся и таких, что* $A - \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ *локально* μ-*пренебрежимо. Тогда, если для любого класса* $\dot{f} \in S(A, \mu; F)$ *и любого* $\lambda \in L$ *через* $\dot{f}_\lambda$ *обозначен класс сужения на* A_λ *произвольной функции класса* $\dot{f}$, *то отображение* ψ: $\dot{f} \mapsto (\dot{f}_\lambda)_{\lambda \in L}$ *есть изоморфизм равномерного пространства*

$S(A, \mu; F)$ *на равномерное пространство — произведение* $\prod_{\lambda \in L} S(A_\lambda, \mu; F)$.

Из предложения 16, п. 10 вытекает, что ψ *биективно*. Рассмотрим окружение T для $S(A, \mu; F)$, являющееся каноническим образом окружения $\boldsymbol{W}(V, B, \delta)$, где B — *компактное* подмножество из A; известно, что множество J тех $\lambda \in L$, для которых $B \cap A_\lambda \neq \varnothing$, счетно (п. 9), и мы имеем $|\mu|(B) = \sum_{\lambda \in J} |\mu|(B \cap A_\lambda)$; стало быть, найдется такое конечное подмножество H из J, что

$$\sum_{\lambda \in J - H} |\mu|(B \cap A_\lambda) \leqslant \frac{\delta}{2}.$$

При этом образ окружения T при отображении $\psi \times \psi$ содержится в каноническом образе произведения $\prod_{\lambda \in H} \boldsymbol{W}(V, B \cap A_\lambda, \delta)$. С другой стороны, если m — число элементов множества H, то образ окружения T при $\psi \times \psi$ содержит канонический образ окружения $\prod_{\lambda \in H} \boldsymbol{W}(V, A_\lambda, \delta/2m)$, что и доказывает предложение.

Предложение 18. *Если F метризуемо и если A есть объединение локально μ-пренебрежимого множества и последовательности (A_n) μ-интегрируемых множеств, то пространство $S(A, \mu; F)$ метризуемо.*

Учитывая, что каждое A_n есть объединение пренебрежимого множества и последовательности компактных множеств, мы можем предположить, что A_n *компактны* и попарно не пересекаются. Предложение 17 позволяет далее предположить, что A компактно. Если (V_n) — счетная фундаментальная система окружений для F, то ясно, что $\boldsymbol{W}(V_n, K, 1/n)$ образуют фундаментальную систему окружений для $\mathscr{S}(A, \mu; F)$, когда n пробегает $\mathbf{N}$, откуда и получаем предложение.

Лемма 4. *Пусть F — равномерное метризуемое пространство и пусть $B \subset A$ — счетное объединение μ-интегрируемых множеств. Тогда для любой последовательности Коши (f_n) в $\mathscr{S}(A, \mu; F)$ существует такая подпоследовательность (f_{n_k}), что $(f_{n_k}(x))$ есть последовательность Коши в F для почти всех $x \in B$.*

Предположим сначала, что B интегрируемо, и обозначим через d расстояние, согласующееся с равномерной структурой в F. Определим по индукции такую двойную последовательность (f_{mn}) функций из $\mathscr{S}(A, \mu; F)$, чтобы $f_{0n} = f_n$ для любого n, чтобы $(f_{mn})_{n\geqslant 0}$ была подпоследовательностью последовательности $(f_{m-1,n})_{n\geqslant 0}$ для любого $m > 0$ и, наконец, чтобы для $m > 0$ множество M_{mn} тех $x \in B$, для которых $d(f_{mn}(x), f_{m,n+1}(x)) > 1/2^{m+n+1}$, имело меру $|\mu|(M_{mn}) \leqslant 1/2^{m+n+1}$; возможность такого определения вытекает из того, что (f_n) есть последовательность Коши в $\mathscr{S}(A, \mu; F)$. Положим $M_m = \bigcup_{n\geqslant 0} M_{mn}$; имеем

$$|\mu|(M_m) \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |\mu|(M_{mn}) \leqslant 1/2^m,$$

и для всех $x \in B - M_m$ имеем $d(f_{mn}(x), f_{m,n+p}(x)) \leqslant 1/2^{m+n+1}$ для любого $n \geqslant 0$ и любого $p > 0$; стало быть, $(f_{mn}(x))_{n\geqslant 0}$ есть последовательность Коши в F. Пусть теперь $N = \bigcap_{m=0}^{\infty} M_m$; множество N *пренебрежимо*. Положим $g_n = f_{nn}$ для любого $n \geqslant 0$; для любого m последовательность $(g_n)_{n\geqslant m}$ есть подпоследовательность последовательности $(f_{mn})_{n\geqslant 0}$; если $x \in B - N$, то найдется такой номер m, что $x \notin M_n$; это и доказывает, что $(g_n(x))$ есть последовательность Коши в F.

Если теперь B есть объединение последовательности (B_m) интегрируемых множеств, то можно определить по индукции такую двойную последовательность (g_{mn}), что $g_{0n} = f_n$, что $(g_{mn})_{n\geqslant 0}$ будет подпоследовательностью последовательности $(g_{m-1,n})_{n\geqslant 0}$ для любого $m > 0$ и что $(g_{mn}(x))_{n\geqslant 0}$ будет последовательностью Коши на $B_m - P_m$, где P_m пренебрежимо. Положим $h_n = g_{nn}$ для любого $n \geqslant 0$, так что для любого m последовательность $(h_n)_{n\geqslant m}$ будет подпоследовательностью последовательности $(g_{mn})_{n\geqslant 0}$; тогда $(h_n(x))_{n\geqslant 0}$ есть последовательность Коши в F для любого $x \in B - P$, где $P = \bigcup_{m=0}^{\infty} P_m$ — пренебрежимое множество.

Предложение 19. *Если равномерное пространство F метризуемо и полно, то равномерное пространство $S(A, \mu; F)$ полно.*

Существует такое локально счетное семейство $(K_\lambda)_{\lambda\in L}$ компактных подмножеств из A, что K_λ попарно не пересекаются

и $A = \bigcup_{\lambda} K_\lambda$ локально пренебрежимо (п. 9, предл. 14). В силу предложения 17 $S(A, \mu; F)$ изоморфно $\prod_{\lambda \in L} S(K_\lambda, \mu; F)$; таким образом, все сводится к доказательству предложения для случая, когда A *интегрируемо*; в этом случае $S(A, \mu; F)$ метризуемо (предл. 18), и согласно лемме 4, для любой последовательности Коши (f_n) в $\mathcal{S}(A, \mu; F)$ найдется подпоследовательность (f_{n_k}), сходящаяся на $A - N$, где N пренебрежимо; предел f последовательности (f_{n_k}) (продолженный произвольным образом на все A) есть μ-измеримая функция, и из обобщения теоремы Егорова, о котором шла речь к п. 10, вытекает, что последовательность (f_{n_k}) *сходится по мере* к f на A. Отсюда следует, что f есть элемент прикосновения последовательности (f_n) в $\mathcal{S}(A, \mu; F)$, а поскольку (f_n) есть по условию последовательность Коши, то она сходится к f, что и требовалось доказать.

Следствие. *Пусть F — равномерное метризуемое пространство.*

(i) *Всякая последовательность (f_n) элементов из $\mathcal{S}(A, \mu; F)$, сходящаяся локально почти всюду к отображению f (необходимо μ-метризуемому) множества A в F, сходится по мере к f на A.*

(ii) *Пусть (f_n) — последовательность элементов из $\mathcal{S}(A, \mu; F)$, сходящаяся по мере к отображению f множества A в F. Для любого множества $B \subset A$, являющегося счетным объединением интегрируемых множеств, существует такая подпоследовательность (f_{n_k}) последовательности (f_n), что последовательность $(f_{n_k}(x))$ сходится в F к $f(x)$ для почти всех $x \in B$.*

(i) Утверждение сразу же следует из обобщения теоремы Егорова, о котором шла речь в п. 10.

(ii) В силу леммы 4 существует такая подпоследовательность (f_{n_k}) последовательности (f_n), что $(f_{n_k}(x))$ есть последовательность Коши в F для любого $x \in B - N$, где N пренебрежимо; пусть $f'(x) \in \hat{F}$ *) — предел этой последовательности для $x \in B - N$. Ясно, что f' есть μ-измеримое отображение $B - N$ в $\hat{F}$, и последовательность (f_n) в силу (i) сходится по мере к f' на $B - N$; стало быть, f' равна f почти всюду на B.

*) $\hat{F}$ — пополнение метрического пространства F.

Предложение 20. *Пусть F — банахово пространство, наделенное равномерной структурой, определяемой его нормой.*

(i) *Для любого μ-измеримого подмножества A из X топология сходимости по мере согласуется со структурой векторного пространства множества $\mathscr{S}(A\ \mu; F)$.*

(ii) *Пространство $\mathscr{K}(X; F)$ всюду плотно в $\mathscr{S}(X, \mu; F)$.*

(iii) *Для любого конечного действительного числа $p \geqslant 1$ топология, индуцируемая в пространстве $\mathscr{L}_F^p(X, \mu)$ топологией сходимости по мере, мажорируется топологией сходимости в среднем порядка p.*

(i) Для любого μ-интегрируемого подмножества B из A и любого $\delta > 0$ обозначим через $\boldsymbol{T}(B, \delta)$ множество таких $f \in \mathscr{S}(A, \mu; F)$, что множество C тех $x \in B$, для которых $|f(x)| \geqslant \delta$, удовлетворяет соотношению $|\mu|(C) \leqslant \delta$; ясно, что если V_δ есть окружение для F, состоящее из таких пар (y, z), что $|y - z| \leqslant \delta$, то окружение $\boldsymbol{W}(V_\delta, B, \delta)$ есть множество таких пар (f, g) измеримых отображений A в F, что $f - g \in \boldsymbol{T}(B, \delta)$. Ясно, что множества $\boldsymbol{T}(B, \delta)$ симметричны и что $\boldsymbol{T}(B, \delta) + \boldsymbol{T}(B, \delta) \subset \boldsymbol{T}(B, 2\delta)$ и $\boldsymbol{T}(B, \alpha\delta) \subset \alpha\boldsymbol{T}(B, \delta)$ для любого скаляра α, удовлетворяющего условию $|\alpha| \leqslant 1$; стало быть, достаточно убедиться в том, что множества $\boldsymbol{T}(B, \delta)$ являются *поглощающими* (Топ. вект. пр-ва (2-е изд.), гл. I, п. 5, предл. 4). Но если f есть μ-измеримое отображение A в F, то числовая функция $|f|$ тоже μ-измерима (п. 3, следствие 6 из теоремы 1). Пусть C_n — множество тех $x \in B$, для которых $|f(x)| \geqslant n$; C_n образуют убывающую последовательность интегрируемых множеств, имеющих пустое пересечение; значит, найдется такое целое n, что $|\mu|(C_n) \leqslant \delta$ (§ 4, п. 5, следствие из предл. 7); кроме того, можно предположить, что n взято столь большим, что $1/n \leqslant \delta$; тогда $f/n^2 \in \boldsymbol{T}(B, \delta)$, чем и завершается доказательство утверждения (i).

(iii) Соотношение $\int |f|^p \, d|\mu| \leqslant \delta^{p+1}$ влечет, что если C — множество тех $x \in X$, для которых $|f(x)| \geqslant \delta$, то

$$\delta^p |\mu|^*(C) \leqslant \int |f|^p \, d|\mu| \leqslant \delta^{p+1},$$

откуда $|\mu|^*(C) \leqslant \delta$, что и доказывает (iii).

(ii) В силу (iii) достаточно доказать, например, что $\mathscr{L}_F^1$ всюду плотно в $\mathscr{S}_F$, ибо $\mathscr{K}(X; F)$ по определению плотно в $\mathscr{L}_F^1$ относи-

тельно топологии сходимости в среднем. Итак, пусть f — произвольный элемент из $\mathscr{S}_F$ и $\boldsymbol{T}(B, \delta)$ — окрестность 0 в этом пространстве; как и в (i), ясно, что существует такое интегрируемое подмножество C из B, что $|\mu|(C) \leqslant \delta$ и что f *ограничена* на $B - C$; обозначим теперь через g функцию, равную f на $B - C$ и 0 на $X - (B - C)$; из теоремы 5, п. 6 следует, что g интегрируема и очевидно, что $f - g \in \boldsymbol{T}(B, \delta)$.

Замечания. 1) Топологическое векторное пространство $\mathscr{S}(X, \mu; F)$ не обязательно локально выпукло (упр. 24).

2) Топология, индуцируемая топологией сходимости по мере, на множестве тех f, для которых $N_p(f) \leqslant 1$, может быть строго более слабой, чем топология, индуцируемая на этом множестве топологией сходимости в среднем порядка p (упр. 22). См. однако ниже предложение 21.

Определение 10. *Пусть X — локально компактное пространство, μ — мера на X, F — банахово пространство и $p \in [1, +\infty[$. Подмножество H из $\mathscr{L}^p_F(X, \mu)$ называется равностепенно интегрируемым порядка p (относительно μ), если оно удовлетворяет следующим условиям*:

(i) *Для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любого интегрируемого множества A меры $|\mu|(A) \leqslant \delta$ и любого $f \in H$*

$$\int |f|^p \varphi_A d|\mu| \leqslant \varepsilon.$$

(ii) *Для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое компактное подмножество K из X, что для любого $f \in H$*

$$\int |f|^p \varphi_{X-K} \, d|\mu| \leqslant \varepsilon.$$

При $p = 1$ вместо «равностепенно интегрируемое порядка p» говорят просто «равностепенно интегрируемое».

Замечание. Предположим, что μ ограничена. Для любого $a > 0$ множество измеримых отображений пространства X в F, для которых $|f(x)| \leqslant a$ почти всюду, равностепенно интегрируемо порядка p, и это верно для любых $p \in [1, +\infty[$.

Предложение 21. *Пусть H — подмножество из $\mathscr{L}^p_F(X, \mu)$, равностепенно интегрируемое порядка p. В H равномерная струк-*

тура сходимости по мере совпадает с равномерной структурой, индуцируемой равномерной структурой из $\mathscr{L}_F^p(X, \mu)$.

Пусть $\varepsilon > 0$. Найдутся δ и K, удовлетворяющие условиям (i) и (ii) определения 10. Пусть, далее, f, g из H таковы, что

$$|f(x) - g(x)| \leqslant \left(\frac{\varepsilon}{|\mu|(K)}\right)^{1/p}$$

для $x \in K$, кроме точек множества M меры $\leqslant \delta$. Имеем

$$\left(\int_{X-K} |f-g|^p \, d|\mu|\right)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_{X-K} |f|^p \, d|\mu|\right)^{1/p} + \left(\int_{X-K} |g|^p \, d|\mu|\right)^{1/p} \leqslant 2\varepsilon^{1/p},$$

и так же

$$\left(\int_M |f-g|^p \, d|\mu|\right)^{1/p} \leqslant 2\varepsilon^{1/p};$$

следовательно,

$$\int |f-g|^p \, d|\mu| =$$

$$= \int_{X-K} |f-g|^p \, d|\mu| + \int_M |f-g|^p \, d|\mu| + \int_{K-M} |f-g|^p \, d|\mu| \leqslant$$

$$\leqslant 2^p\varepsilon + 2^p\varepsilon + \frac{\varepsilon}{|\mu|(K)} |\mu|(K-M) \leqslant (2^{p+1}+1)\varepsilon.$$

Таким образом, равномерная структура сходимости по мере на H мажорирует равномерную структуру, индуцируемую равномерной структурой из $\mathscr{L}_F^p(X, \mu)$. Стало быть, достаточно применить предложение 20.

12. Одно свойство широкой сходимости

Лемма 5. *Пусть X — локально компактное пространство, μ — положительная ограниченная мера на X, F — банахово пространство и f — ограниченная функция на X со значениями в F. Следующие условия эквивалентны:*

(i) *Множество точек разрыва функции f μ-пренебрежимо.*

(ii) *Для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие элементы $a_1, \ldots, a_n$ из F, такие функции $g_1, \ldots, g_n$, принадлежащие $\mathscr{K}(X)$, и такая*

непрерывная ограниченная функция $h \geqslant 0$ *на* X, *что*

$$|f - g_1a_1 - \ldots - g_na_n| \leqslant h \leqslant 2 \sup |f|$$

всюду на X *и*

$$\int h\, d\mu \leqslant \varepsilon.$$

Обозначим через N множество точек разрыва функции f и положим $M = \sup |f|$.

(i) $\Rightarrow$ (ii). Предположим, что условие (i) выполнено. Возьмем $\varepsilon > 0$. Функция f μ-интегрируема (п. 2, следствие 4 из предл. 5 и п. 6, теорема 5); значит, в F найдутся такие $a_1, \ldots, a_n$, а в $\mathscr{K}(X)$ такие $g_1, \ldots, g_n$, что, положив $k = |f - g_1a_1 - \ldots - g_na_n|$, получим $\int k\, d\mu \leqslant \varepsilon/2$ (§ 3, п. 5, предл. 10). Мы можем, кроме того, умножая $g_1, \ldots, g_n$ на один и тот же надлежащим образом выбранный элемент из $\mathscr{K}(X)$, предположить, что

$$|g_1a_1 + \ldots + g_na_n| \leqslant |f|$$

на X, откуда $k \leqslant 2M$. Множество N' точек разрыва функции k содержится в N, и значит, пренебрежимо. Для любого $x \in X$ положим $l(x) = \limsup_{y \to x} k(y)$. Имеем $2M \geqslant l \geqslant k$ на X и $l = k$ на $X - N'$, т.е. почти всюду относительно μ; значит, $\int l\, d\mu \leqslant \varepsilon/2$. С другой стороны, l ограничена и полунепрерывна сверху, и стало быть, является нижней огибающей множества непрерывных ограниченных функций, мажорирующих l. Следовательно, найдется такая непрерывная ограниченная функция $h \geqslant l$ на X, что $h \leqslant 2M$ и $\int h\, d\mu \leqslant \int l\, d\mu + \varepsilon/2$ (§ 4, п. 4, следствие 2 из предл. 5). Ясно, что $\int h\, d\mu \leqslant \varepsilon$, и $|f - g_1a_1 - \ldots - g_na_n| \leqslant h$.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Предположим, что условие (ii) выполнено. Пусть для любого $x \in X$ через $\omega(x)$ обозначено колебание функции f в точке x. Возьмем $\varepsilon > 0$. Существуют $a_1, \ldots, a_n, g_1, \ldots, g_n, h$, обладающие свойствами, указанными в условии (ii). Для любого $x \in X$ $\omega(x)$ будет колебанием функции $f - g_1a_1 - \ldots - g_na_n$ в x, и значит, $\omega(x) \leqslant 2h(x)$. Стало быть, $\int \omega\, d\mu \leqslant 2\varepsilon$. Следовательно, множество A_ε тех $x \in X$, для которых $\omega(x) \geqslant \sqrt{\varepsilon}$, таково,

что $\mu(A_\varepsilon) \leqslant 2\sqrt{\varepsilon}$. Тем самым доказано, что $\mu(N) \leqslant 2\sqrt{\varepsilon}$, откуда $\mu(N) = 0$.

Предложение 22. *Пусть F — банахово пространство, X — локально компактное пространство, $\mathscr{C}$ — множество положительных ограниченных мер на X, μ — элемент из $\mathscr{C}$ и $\mathfrak{B}$ — базис фильтра в $\mathscr{C}$. Предположим, что $\mathfrak{B}$ широко сходится к μ и что $\|\nu\|$ стремится к $\|\mu\|$ по $\mathfrak{B}$. Пусть f — отображение X в F, удовлетворяющее следующим условиям:*

(i) *f ограничено, интегрируемо относительно μ и относительно любой меры, принадлежащей элементу из $\mathfrak{B}$;*

(ii) *множество точек разрыва отображения f μ-пренебрежимо.*

Тогда $\int f\,d\nu$ стремится к $\int f\,d\mu$ по $\mathfrak{B}$.

Пусть $\varepsilon > 0$. Существуют такие элементы $a_1, \ldots, a_n$ из F, такие функции $g_1, \ldots, g_n$ из $\mathscr{K}(X)$ и такая непрерывная ограниченная функция $h \geqslant 0$ на X, что $|f - g_1a_1 - \ldots - g_na_n| \leqslant h \leqslant 2\sup|f|$ на X и $\int h\,d\mu \leqslant \varepsilon$ (лемма 5). Пусть $M = \sup|f|$. Найдутся такое компактное помножество K из X, что $\mu^*(X - K) \leqslant \varepsilon$ (§ 4, п. 7, предл. 12 и п. 6, теорема 4), такая компактная окрестность K' множества K в X и такое непрерывное отображение h' X в $[0, 2M]$, что $h' = h$ на K, $h' = 2M$ на $X - K'$; заменяя h на $\sup(h, h')$, можно, кроме того, предположить, что h' мажорирует h. Имеем $\int (h' - h)\,d\mu \leqslant 2M\mu^*(X - K) \leqslant 2M\varepsilon$. С другой стороны, $h' = h_1 + 2M$, где $h_1 \in \mathscr{K}(X)$. Учитывая предложение 12 из § 4, п. 7, получаем, что число $\int h'd\nu = \int h_1 d\nu + 2M\|\nu\|$ стремится по $\mathfrak{B}$ к

$$\int h_1\,d\mu + 2M\|\mu\| = \int h'\,d\mu.$$

Тогда существует такое $A \in \mathfrak{B}$, что для любого $\nu \in A$

$$\left|\int (g_1a_1 + \ldots + g_na_n)\,d\nu - \int (g_1a_1 + \ldots + g_na_n)\,d\mu\right| \leqslant \varepsilon,$$

$$\int h\,d\nu \leqslant \int h'\,d\nu \leqslant \int h'\,d\mu + \varepsilon \leqslant \int h\,d\mu + 2M\varepsilon + \varepsilon \leqslant 2(M+1)\varepsilon.$$

Из этих неравенств получаем

$$\left| \int f\,d\nu - \int f\,d\mu \right| \leqslant \int h\,d\nu + \left| \int (g_1 a_1 + \ldots + g_n a_n)\,d\nu - \right.$$
$$\left. - \int (g_1 a_1 + \ldots + g_n a_n)\,d\mu \right| + \int h\,d\mu \leqslant 2\,(M+2)\varepsilon,$$

что и доказывает предложение.

Замечание. Условия (i) и (ii) предложения 22 выполняются, если f непрерывно и ограничено.

Пример. Возьмем в качестве X компактное пространство U комплексных чисел с абсолютным значением 1. Полагая для любого $f \in \mathscr{K}(U)$ $\mu(f) = \int_0^1 f(e^{2\pi i t})\,dt$, определим на X положительную меру массы 1. С другой стороны, пусть θ — действительное число; пусть, далее, для любого целого $n \geqslant 0$ через ν_n обозначена единичная масса, помещенная в точке $e^{2i\pi n\theta}$ пространства U, и пусть

$$\mu_n = \frac{1}{n+1}(\nu_0 + \ldots + \nu_n),$$

так что μ_n есть положительная мера на U массы 1. Тогда, в случае иррационального θ μ_n широко стремится к μ. Действительно, поскольку линейные комбинации функций $z \mapsto z^k$ ($k \in \mathbf{Z}$) всюду плотны в $\mathscr{K}(U)$ (Общая топ., гл. X (2-е изд.), § 4, п. 4, предл. 8), то достаточно доказать, что $\mu_n(z^k)$ стремится к $\mu(z^k)$ для $k \in \mathbf{Z}$. Но для $k = 0$ имеем $\mu_n(z^k) = \mu(z^k) = 1$; для $k \neq 0$ имеем

$$\mu_n(z^k) = \frac{1}{n+1}(1 + e^{2i\pi k\theta} + e^{4i\pi k\theta} + \ldots + e^{2i\pi kn\theta}).$$

А так как $e^{2i\pi k\theta} \neq 1$ (ибо θ иррационально), то отсюда выводим:

$$|\mu_n(z^k)| = \left| \frac{1}{n+1} \frac{e^{2i\pi k(n+1)\theta} - 1}{e^{2i\pi k\theta} - 1} \right| \leqslant \frac{1}{n+1} \frac{2}{|e^{2i\pi k\theta} - 1|},$$

и значит, $\mu_n(z^k)$ стремится к $0 = \mu(z^k)$. При этих условиях можно применить предложение 22 и, в частности, мы видим, что если A — подмножество из U с *пренебрежимой границей* относительно μ, то $\mu_n(A)$ стремится к $\mu(A)$. Иными словами, если p_n означает число целых $k \in [0, n]$, для которых $e^{2i\pi k\theta} \in A$, то $n^{-1}p_n$ стремится к $\mu(A)$ при $n \to +\infty$.

Упражнения

°1) Пусть I — полуоткрытый интервал $]a, b]$ из $\mathbf{R}$ и пусть $F = \mathbf{R}^I$ — пространство всех отображений интервала I в $\mathbf{R}$, наделенное топологией простой сходимости; для любого $x \in I$ через $f(x)$ обозначим отображение $t \mapsto |x - t|$ интервала I в $\mathbf{R}$, являющееся элементом пространства F; отображение f интервала I в F непрерывно. Показать, что функция f дифференцируема слева в каждой точке из I, но что ее левая производная f'_g есть функция (со значениями в F), не измеримая относительно меры Лебега, хотя она является простым пределом последовательности непрерывных функций и хотя для каждого $t \in I$ функция $\mathrm{pr}_t \circ f'_g$ является измеримой числовой функцией (заметить, что f'_g не непрерывна справа ни в одной точке из I, и применить упр. 1 из Общей топ., гл. IV, § 2).

2) Пусть ν — мера Лебега на $\mathbf{R}$, g — непрерывное отображение $\mathbf{R}$ в $[0, 1]$ с носителем в $]-1, 2[$, равное 1 на $[0, 1]$, и μ — мера $g \cdot \nu$ на $\mathbf{R}$. Множество $H_0 \subset [0, 1]$, определенное в упр. 8 § 4, не является μ-измеримым, но множество $H = H_0 - 2$ μ-пренебрежимо.

a) Если положить $f(x) = x - 2$, то f непрерывна, а φ_H μ-измерима, но сложная функция $\varphi_H \circ f$ не является μ-измеримой.

b) Если положить $h(x) = x + 2$, то образ $h(H)$ μ-измеримого множества H посредством непрерывной функции h не является μ-измеримым.

3) Пусть f — измеримое отображение X в топологическое пространство F и g — полунепрерывная снизу числовая функция на F; показать, что $g \circ f$ измерима.

°4) Пусть μ — мера Лебега на $X = [0, 1[$ и пусть (H_n) — разбиение X в бесконечную последовательность множеств мощности континуум, из которых ни одно не является измеримым и которые таковы, что для объединения H любого конечного числа множеств H_n имеем $\mu_*(H) = 0$ (§ 4, упр. 8). Пусть σ_n — биекция $]1/(n+1), 1/n]$ на H_n. Для любого y, $0 < y \leqslant 1$, обозначим через n такое целое число, что $1/(n+1) < y \leqslant 1/n$. Определим f_y как характеристическую функцию множества, сводящегося к точке $\sigma_n(y)$; для любого $x \in X$ функция $f_y(x)$ стремится к 0, когда y стремится к 0. Показать, что не существует такого компактного множества $K \subset X$ меры > 0, чтобы f_y равномерно стремилась к 0 на K.

5) Пусть (f_{mn}) — двойная последовательность измеримых отображений пространства X в метризуемое пространство F. Допустим, что при любом m последовательность $(f_{mn})_{n \geqslant 1}$ сходится локально почти всюду к функции g_m и что последовательность (g_m) сходится локально почти всюду к функции h. Показать, что для любого компактного подмножества K из X найдутся такие две строго возрастающие последовательности (m_k) и (n_k) целых чисел > 0, что последова-

тельность функций f_{m_k, n_k} сходится почти всюду на K к h. (Заметить, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое компактное множество $K_1 \subset K$, что $\mu(K — K_1) \leqslant \varepsilon$ и что на K_1 последовательность (g_m) и каждая из последовательностей $(f_{mn})_{n \geqslant 1}$ равномерно сходятся.)

°6) Пусть для любого целого $n \geqslant 1$ $f_n(x) = [2^n x] - 2[2^{n-1}x]$. Пусть, далее, в компактном пространстве отображений прямой $\mathbf{R}$ в $\{0, 1\}$ (наделенном топологией простой сходимости) через f обозначена точка прикосновения последовательности (f_n). Показать, что для любого двоично-рационального числа r равенство $f(r + x) = f(x)$ справедливо для любого $x \in \mathbf{R}$, а равенство $f(r - x) = 1 - f(x)$ — для любого $x \in \mathbf{R}$, отличного от двоично-рационального числа. Вывести отсюда, что функция f не измерима относительно меры Лебега μ. (Рассуждать от противного; обозначив через A множество тех $x \in [0, 1]$, в которых $f(x) = 1$, допустим, что A измеримо и $\mu(A) = \alpha > 0$; показать, что существует такое множество I, представляющее собой объединение конечного числа открытых интервалов из $]0, 1[$, что $\mu(I \cap \complement A) \leqslant \alpha/4$ и $\mu(A \cap \complement I) \leqslant \alpha/4$; рассматривая интервалы, содержащиеся в I и имеющие вид $]k/2^n, (k+1)/2^n[$, показать, что для двоично-рационального r и не двоично-рационального x не будет выполняться соотношение $f(r - x) = 1 - f(x)$.)

7) Пусть X — интервал $[0, 1]$ из $\mathbf{R}$ и F — гильбертово пространство, имеющее ортонормированный базис $(e_t)_{0 \leqslant t \leqslant 1}$, равномощный интервалу X.

a) Показать, что отображение f интервала X в F, такое, что $f(t) = e_t$ для $0 \leqslant t \leqslant 1$, не измеримо относительно меры Лебега, но что прообраз при отображении f всякого замкнутого шара из F измерим и что для любой непрерывной линейной формы a' на F функция $\langle f, a' \rangle$ пренебрежима.

b) Пусть H — не измеримое множество из X (§ 4, упр. 8); показать, что если $g = f\varphi_H$, то функция $\langle g, a' \rangle$ пренебрежима для любой непрерывной линейной формы a' на F, но числовая функция $|g|$ не измерима.

8) Пусть F-метризуемое локально выпуклое пространство и f — отображение X в F, удовлетворяющее условиям a) и b) п. 5, следствие 1, предл. 10; показать, что f измеримо.

9) Пусть μ — мера Лебега на $X = [0, 1]$; обозначим через F векторное пространство над $\mathbf{R}$ конечных μ-измеримых числовых функций на X; наделенное топологией простой сходимости, это пространство отделимо и локально выпукло.

a) Показать, что в F существует счетное всюду плотное множество (рассмотреть в банаховом пространстве $\mathscr{C}(X; \mathbf{R})$ непрерывных числовых функций на X всюду плотную последовательность).

b) Пусть для любого $x \in X$ через $f(x)$ обозначен элемент сопряженного F' к F, определенный равенством $\langle z, f(x) \rangle = z(x)$, справедливым при всех $z \in F$. Показать, что когда F' наделено слабой тополо-

гией $\sigma(F', F)$, f не является μ-измеримым, но $\langle a, f \rangle$ μ-измеримо для любого $a \in F$.

°10) Пусть F — банахово пространство и f — такое измеримое отображение пространства X в F, что множество A тех $x \in X$, в которых $f(x) \neq 0$, является счетным объединением интегрируемых множеств. Показать, что существует такая последовательность (f_n) непрерывных функций с компактным носителем, принимающих значения в F, что последовательность $(f_n(x))$ сходится к $f(x)$ почти всюду на X (заметить, что, с одной стороны, A есть объединение пренебрежимого множества N и последовательности компактных множеств K_n попарно без общих точек, обладающих тем свойством, что сужение функции f на каждое из K_n непрерывно; а, с другой стороны, существует убывающая последовательность (U_n) открытых множеств, содержащих A и таких, что $\mu(U_n \cap \mathbf{C}A)$ стремится к 0 при неограниченном возрастании n).

11) Пусть f — измеримое отображение пространства X в банахово пространство F. Для любого целого (положительного или отрицательного) рационального n через A_n обозначим множество тех $x \in X$, в которых $2^n \geqslant \| f(x) \| > 2^{n-1}$. Для того чтобы функция f была интегрируема, необходимо и достаточно, чтобы ряд с общим членом $2^n \mu(A_n)$ $(n \in \mathbf{Z})$ сходился.

°12) Пусть $\mu \geqslant 0$ — мера на X и (f_n) — последовательность интегрируемых функций на X, сходящаяся просто на X к функции f.

a) Показать, что если f интегрируема и

$$\int f \, d\mu = \lim_{n \to \infty} \int f_n \, d\mu,$$

то для любого $\varepsilon > 0$ существуют интегрируемое множество A, интегрируемая функция $g \geqslant 0$ и целое n_0 такие, что для любого $n \geqslant n_0$

$$\left| \int f_n \varphi_{\mathbf{C}A} \, d\mu \right| \leqslant \varepsilon$$

и $|f_n(x)| \leqslant g(x)$ для любого $x \in A$ (рассмотреть такое интегрируемое множество B, что

$$\int |f| \, \varphi_{\mathbf{C}B} \, d\mu \leqslant \varepsilon/2$$

и что f ограничена на B, и применить теорему Егорова).

b) Предположим, что для любого $\varepsilon > 0$ найдутся измеримое множество A, интегрируемая функция $g \geqslant 0$ и целое n_0 такие, что для любого $n \geqslant n_0$ $\int |f_n| \, \varphi_{\mathbf{C}A} \, d\mu \leqslant \varepsilon$ и $|f_n(x)| \leqslant g(x)$ для любого $x \in A$. Показать, что при этих условиях f интегрируема и что $f_n \to f$ в L^1. И обратно.

c) Предположим, что $F = \mathbf{R}$; показать на примерах, что условия п. a) недостаточны и что условия п. b) не необходимы для того,

чтобы f была интегрируема и чтобы

$$\int f\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n\,d\mu.$$

°13) Пусть μ — положительная мера на X. Показать, что если множество A измеримо, то для *любого* подмножества $B \subset X$ выполняется равенство

$$\mu^*(B) = \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \cap \mathbf{C}A)$$

(в случае $\mu^*(B) < +\infty$ рассмотреть такое интегрируемое множество B_1, что $B \subset B_1$ и $\mu^*(B) = \mu(B_1)$ (§ 4, упр. 7b))). Обратно, показать, что если множество A удовлетворяет этому условию, то оно измеримо (ср. § 4, упр. 6e)).

14) Пусть (A_n) — такая последовательность подмножеств из X, что для каждого индекса n существует измеримое множество $B_n \supset A_n$, причем множества B_n не имеют попарно общих точек. Показать, что

$$\mu^*\Big(\bigcup_n A_n\Big) = \sum_n \mu^*(A_n),$$

$$\mu_*\Big(\bigcup_n A_n\Big) = \sum_n \mu_*(A_n).$$

15) Пусть μ — положительная мера на X. Определенная на X (конечная или нет) числовая функция f называется *квазиинтегрируемой*, если она измерима и если $\mu^*(f) = \mu_*(f)$ (§ 4, упр. 5). В этом случае полагают $\mu(f) = \mu^*(f) = \mu_*(f)$; вместо $\mu(f)$ пишут еще $\int f\,d\mu$.

a) Показать, что если f и g квазиинтегрируемы и если сумма $\mu(f) + \mu(g)$ определена, то функция $f + g$ определена почти всюду, квазиинтегрируема и $\mu(f + g) = \mu(f) + \mu(g)$.

b) Вывести из a), что для того, чтобы f была квазиинтегрируемой, необходимо и достаточно, чтобы f была измерима и чтобы по крайней мере одно из чисел $\mu^*(f^+)$ и $\mu^*(f^-)$ было конечно; тогда $\mu(f) = \mu^*(f^+) - \mu^*(f^-)$.

°16) Пусть X — компактное пространство и μ — положительная мера на X. Говорят, что ограниченная на X числовая функция f непрерывна почти всюду (относительно меры μ) на X, если дополнение множества точек из X, в которых f непрерывна (относительно X), имеет меру нуль.

a) Указать пример такой непрерывной почти всюду функции f, для которой не существует ни одной непрерывной функции g, равной f почти всюду.

b) Допустим, что носитель меры μ совпадает с X. Показать, что для того, чтобы ограниченная на X числовая функция f была почти всюду равна функции, непрерывной почти всюду на X, необходимо и достаточно, чтобы существовало подмножество H из X, имеющее пренебрежимое дополнение и такое, что сужение f на H непрерывно

(для доказательства достаточности заметить, что H всюду плотно в X и что продолжение функции $f \mid H$ на X, полунепрерывное снизу на X (Общая топ., гл. IV, § 6, предл. 4), является непрерывной (относительно X) функцией в каждой точке из H). Вывести отсюда, что f измерима.

c) Вывести из b), что если X, кроме того, *метризуемо*, то для любой ограниченной функции f, почти всюду равной непрерывной почти всюду на X функции, существует последовательность (f_n) непрерывных на X функций, сходящаяся в *каждой* точке из X, и имеющая предел, почти всюду равный f (ср. § 4, упр. 4c))(заметить, что утверждение справедливо для полунепрерывной снизу функции f).

d) Пусть A —совершенное множество без внутренних точек, содержащееся в X и имеющее строго положительную меру (ср. § 4, упр. 4a)). Показать, что не существует ни одной непрерывной почти всюду на X функции, почти всюду равной полунепрерывной сверху функции φ_A.

°17) Пусть X — компактное пространство и μ — положительная мера на X. Говорят, что множество $\mathscr{P}$ конечных разбиений пространства X на интегрируемые множества, фильтрующиеся по отношению «ω менее мелкое, чем ω'», *фундаментально*, если для всякого окружения V равномерной структуры пространства X существует разбиение $\omega = (A_i)$ пространства X, принадлежащее $\mathscr{P}$ и такое, что все A_i малы порядка V. Для всякого конечного разбиения $\omega = (A_k)$, принадлежащего $\mathscr{P}$, и любой ограниченной на X числовой функции f положим $s_\omega(f) = \sum_k \inf_{x \in A_k} f(x) \cdot \mu(A_k)$ и $S_\omega(f) = \sum_k \sup_{x \in A_k} f(x) \cdot \mu(A_k)$ («римановы суммы» для функции f и разбиения ω).

a) Показать, что $s_\omega(f) \leqslant \mu_*(f) \leqslant \mu^*(f) \leqslant S_\omega(f)$ для любого разбиения $\mathscr{P}$ и что и $s_\omega(f)$, и $S_\omega(f)$ стремятся к пределу по упорядоченному фильтрующемуся множеству $\mathscr{P}$.

b) Показать, что если $\mathscr{P}$ есть (фундаментальное) множество *всех* конечных разбиений пространства X, состоящих из интегрируемых множеств, то для любой интегрируемой ограниченной функции f суммы $s_\omega(f)$ и $S_\omega(f)$ стремятся к $\int f\,d\mu$ по множеству $\mathscr{P}$.

c) Если f — ограниченная функция, непрерывная почти всюду на X, то $s_\omega(f)$ и $S_\omega(f)$ стремятся к $\int f\,d\mu$ по *любому* фундаментальному множеству $\mathscr{P}$ конечных разбиений пространства X на интегрируемые множества (для любого $\varepsilon > 0$ рассмотреть замкнутое множество A точек, в которых колебание функции f больше или равно ε, и для всякого разбиения $\omega \in \mathscr{P}$, множества которого малы порядка V, рассмотреть отдельно те множества из ω, которые пересекаются с $V(A)$, и те, которые не пересекаются). Показать, что если f ограничена и полунепрерывна снизу на X, то $s_\omega(f)$ стремится к $\int f\,d\mu$ по *любому*

фундаментальному множеству $\mathscr{P}$ конечных разбиений пространства X на интегрируемые множества (представить f как верхнюю огибающую непрерывных функций).

d) Множество $A \subset X$ называется *квадрируемым* (относительно μ), если его характеристическая функция непрерывна почти всюду или, что сводится к тому же, если его граница μ-пренебрежима. Показать, что всякая точка $x_0 \in X$ обладает фундаментальной системой квадрируемых открытых окрестностей (для любой окрестности V точки x_0 через f обозначить непрерывную функцию со значениями в $[0, 1]$, равную 1 в точке x_0 и 0 на $\complement V$; рассмотреть множества тех x, в которых $f(x) > \alpha$ для $0 < \alpha < 1$). Вывести отсюда, что существует такое фундаментальное множество $\mathscr{P}$ конечных разбиений пространства X, что всякое разбиение $\omega \in \mathscr{P}$ состоит из открытых и из пренебрежимых множеств.

e) Пусть $\mathscr{P}$ — такое фундаментальное множество конечных разбиений пространства X на интегрируемые множества, что всякое разбиение $\omega \in \mathscr{P}$ состоит из открытых и из пренебрежимых множеств. Для любой ограниченной на X функции f через g обозначим наибольшую из функций, полунепрерывных снизу на X и не превосходящих f (Общая топ., гл. IV, § 6, предл. 4); показать, что для любого разбиения $\omega \in \mathscr{P}$ $s_\omega(f) = s_\omega(g)$.

Вывести отсюда, что для того, чтобы $s_\omega(f)$ и $S_\omega(f)$ стремились к одному и тому же пределу по $\mathscr{P}$, необходимо, чтобы f была непрерывна почти всюду на X.

f) С помощью e) построить пример такой пренебрежимой функции f и такого фундаментального множества $\mathscr{P}$ конечных разбиений пространства X на интегрируемые множества, что $s_\omega(f)$ и $S_\omega(f)$ не стремятся к одному и тому же пределу по $\mathscr{P}$ (взять в качестве X интервал $[0, 1]$ из $\mathbf{R}$, а в качестве μ — меру Лебега).

°18) Пусть X — такое локально компактное пространство, что в X замыкание любого относительно компактного открытого множества снова является открытым множеством (*стоуново* пространство; ср. гл. II, § 1, упр. 13); пусть $\mu \geqslant 0$ — мера на X с носителем, совпадающим с X, и такая, что всякая интегрируемая ограниченная на X числовая функция эквивалентна непрерывной конечной функции (§ 4, упр. 10).

a) Показать, что в X всякое нигде не плотное множество N локально пренебрежимо (для всякого компактного множества K рассмотреть непрерывную функцию, эквивалентную $\varphi_{K \cap \overline{N}}$).

b) Пусть f — (конечная или бесконечная) измеримая числовая функция на X, и пусть g — наибольшая из функций, полунепрерывных снизу на X и не превосходящих f. Показать, что f и g равны между собой локально почти всюду (заметить, что если сужение функции f на компактное множество K непрерывно, то f и g равны между собой во внутренности K, и применить a)).

c) Вывести из b), что в X всякое локально пренебрежимое относительно μ множество является нигде не плотным множеством. В частности, всякое тощее в X множество будет нигде не плотным.

19) Пусть μ — положительная мера на локально компактном пространстве X и пусть f — μ-измеримое отображение пространства X в полное метрическое пространство F. Для того чтобы функция f могла на компактном множестве K из X быть равномерно приближена измеримыми размещенными функциями, необходимо и достаточно, чтобы множество $f(K)$ было относительно компактно в F.

20) Пусть X — компактное пространство, μ — положительная мера на X и (f_n) — последовательность μ-измеримых числовых функций. Показать, что следующие свойства эквивалентны:

(i) существует подпоследовательность (f_{n_k}) последовательности (f_n), стремящаяся к 0 почти всюду на X;

(ii) существует такая последовательность (λ_n) конечных действительных чисел, что $\limsup_{n\to\infty} |\lambda_n| > 0$ и что ряд с общим членом $\lambda_n f_n(x)$ сходится почти всюду на X;

(iii) существует такая последовательность (λ_n) конечных действительных чисел, что $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| = +\infty$ и что ряд с общим членом $\lambda_n f_n(x)$ абсолютно сходится почти всюду на X.

(Чтобы показать, что (i) влечет (ii) и (iii), воспользоваться теоремой Егорова. Чтобы показать, что из (iii) следует (i), установить, что (iii) влечет существование такой возрастающей последовательности (A_n) измеримых подмножеств из X и такой подпоследовательности (f_{n_k}) последовательности (f_n), что $\mu(A_n)$ стремится к $\mu(X)$ и что $\int |f_{n_k}\varphi_{A_k}|\, d\mu$ стремится к 0.)

21) Пусть X — локально компактное пространство, μ — положительная мера на X и $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ — открытое покрытие X. Для любого $\alpha \in A$ обозначим через f_α отображение U_α в некоторое множество G. Предположим, что для любой пары индексов α, β множество тех точек $x \in U_\alpha \cap U_\beta$, для которых $f_\alpha(x) \neq f_\beta(x)$, локально μ-пренебрежимо. Показать, что существует такое отображение f пространства X в G, что для любого $\alpha \in A$ множество тех $x \in U_\alpha$, для которых $f(x) \neq f_\alpha(x)$, локально μ-пренебрежимо. (Рассмотреть вначале случай, когда X компактно, покрывая X конечным числом множеств U_α; перейти к общему случаю при помощи предл. 14 п. 9.)

22) Показать, что если положительная мера μ такова, что существуют открытые множества сколь угодно малой строго положительной меры, то для любого $a > 0$ топология, индуцируемая на множестве тех $f \in \mathscr{L}^p_F$, для которых $N_p(f) \leqslant a$, топологией сходимости по мере,

является строго более слабой, чем топология сходимости в среднем порядка p.

23) Пусть (f_n) — такая последовательность функций из $\mathscr{S}_F$, что для любого интегрируемого множества A и любой подпоследовательности (f_{n_k}) последовательности (f_n) найдется подпоследовательность последовательности (f_{n_k}), сходящаяся к 0 почти всюду на A; показать, что (f_n) сходится по мере к 0. (Рассуждать от противного.)

°24) Пусть X — интервал $[0, 1]$ из $\mathbf{R}$ и μ — мера Лебега на X. Показать, что для любого банахова пространства F всякая непрерывная линейная форма на $\mathscr{S}_F$ есть тождественный нуль. (Для любой окрестности V элемента 0 в $\mathscr{S}_F$ показать, что найдется такое целое $n > 0$, что $V + V + \ldots + V$ (n раз) содержит прямую.)

25) a) Для того чтобы подмножество H из $\mathscr{S}_F$ было предкомпактно, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ и любого интегрируемого множества $A \subset X$ существовали такое компактное множество $M \subset F$ и такое разбиение A на конечное число интегрируемых множеств A_i, что для любого $f \in H$ найдется интегрируемое множество $B \subset A$ меры $\mu(B) \leqslant \varepsilon$, обладающее следующими свойствами: 1° всякая точка из $f(A - B)$ находится от M на расстоянии $\leqslant \varepsilon$; 2° на каждом из множеств $A_i \cap \complement B$ колебание отображения f не превосходит ε.

b) Показать, что для того чтобы подмножество H из $\mathscr{L}^1_F$ было относительно квазикомпактным, необходимо и достаточно, чтобы оно было предкомпактным в $\mathscr{S}_F$ и равностепенно интегрируемым.

c) Показать, что для того чтобы последовательность (f_n) функций из $\mathscr{L}^1_F$ была последовательностью Коши относительно топологии сходимости в среднем, необходимо и достаточно, чтобы (f_n) была последовательностью Коши в топологии сходимости по мере и чтобы множество функций f_n было равностепенно интегрируемым.

d) Распространить эти свойства на пространства $\mathscr{L}^p_F$, $p > 1$.

26) Пусть f — числовая функция на $\mathbf{R}$. Показать, что если для любого $x \in \mathbf{R}$ имеем $\liminf\limits_{y \to x,\ y \geqslant x} f(y) \geqslant f(x)$, то f μ-измерима для любой меры μ на $\mathbf{R}$.

°27) Пусть X — локально компактное пространство, μ — действительная мера на X, K — компактное подмножество из X и (f_n) — последовательность ограниченных μ-измеримых числовых функций на K, *отделяющая* точки из K. Показать, что для любой μ-измеримой ограниченной числовой функции g на K и любого $\varepsilon > 0$ найдутся такой полином $h = P((f_n))$ относительно f_n и такое компактное подмножество K_1 из K, что $\| h \| \leqslant 2 \| g \|$, $|\mu|(K - K_1) \leqslant \varepsilon$ и для любого $x \in K_1$ выполняется $|h(x) - g(x)| \leqslant \varepsilon$. (Рассмотреть отображение $x \mapsto (f_n(x))$ компакта K в $\mathbf{R}^N$ и замыкание его образа, и применить надлежащим образом теорему Вейерштрасса — Стоуна.) Вывести

отсюда, что для $1 \leqslant p < +\infty$ множество полиномов относительно f_n плотно в $\mathscr{L}^p(K)$. Сохраняются ли эти свойства при замене последовательности (f_n) несчетным семейством измеримых ограниченных функций, отделяющим точки из K?

28) Пусть X — локально компактное пространство, μ — положительная мера на X и P — множество (конечных или нет) μ-измеримых числовых функций $f \geqslant 0$ на X. И пусть $\lambda \geqslant 0$ — (конечная или нет) функция на P, положительно однородная, возрастающая, выпуклая (ср. гл. I; п. 1) и такая, что: 1° $\lambda(f) = 0$ для любой μ-пренебрежимой функции $f \geqslant 0$; 2° $\lambda(\sup_n f_n) = \sup_n \lambda(f_n)$ для любой возрастающей последовательности (f_n) функций из P. Для любого банахова пространства F через $\mathscr{L}^\lambda_F$ обозначим множество таких μ-измеримых отображений f пространства X в F, что $\lambda(|f|)$ конечна. Показать, что $\lambda(|f|)$ есть полунорма на $\mathscr{L}^\lambda_F$ и что $\mathscr{L}^\lambda_F$ полно относительно топологии, определяемой этой полунормой.

°29) Пусть μ — мера на локально компактном пространстве X. Для любой μ-измеримой числовой функции $f \geqslant 0$ на X отображение $f^*_\mu\colon t \mapsto |\mu|^*(f^{-1}(]t, +\infty])$ полупрямой $\mathbf{R}_+$ в $\overline{\mathbf{R}}_+$ убывает и непрерывно справа. Если ν — мера на другом локально компактном пространстве Y и $g \geqslant 0$ — ν-измеримая числовая функция на Y, то говорят, что f и g *равноизмеримы* (соотв. относительно μ и ν), если $f^*_\mu = g^*_\nu$. Обозначим через f^* (или f^*_μ) функцию на $\mathbf{R}_+$, равную при любом $s \in \mathbf{R}_+$ верхней грани в $\overline{\mathbf{R}}_+$ множества чисел a, для которых $f^*_\mu(a) \geqslant s$ (в случае пустого множества верхняя грань равна 0).

a) Показать, что функция f^* убывает, непрерывна слева на $\mathbf{R}_+$ и равноизмерима с f (относительно меры μ и меры Лебега на $\mathbf{R}_+$); говорят, что f^* есть *убывающая перестановка* функции f.

b) Показать, что если $0 \leqslant f \leqslant g$ — две измеримые функции на X, то $f^* \leqslant g^*$. Показать, что если (f_n) — возрастающая последовательность μ-измеримых положительных функций на X и $f = \sup_n f_n$, то $f^*(s) = \sup_n f_n^*(s)$ во всех точках, где f^* непрерывна.

c) Показать, что для любой μ-измеримой числовой функции $f \geqslant 0$ справедливо равенство $|\mu|^*(f) = \int^* f^*(s)\,ds$. (Рассмотреть сначала случай размещенной функции, а затем использовать b).)

d) Пусть w — конечная убывающая числовая функция (кроме, быть может, точки $s = 0$) на $\mathbf{R}_+$. Для любой числовой μ-измеримой функции $f \geqslant 0$ на X положим

$$\lambda(f) = \left(\int^* w(s)\,(f^*(s))^p\,ds\right)^{1/p} \quad (1 \leqslant p < +\infty)$$

Показать, что эта функция удовлетворяет условиям упр. 28. (Для доказательства выпуклости рассмотреть вначале случай, когда w —

убывающая ступенчатая функция, используя при этом c), а затем перейти к пределу для получения общего случая.)

e) Используя обозначения из d), будем писать $\mathscr{L}_F^{p,w}$ вместо $\mathscr{L}_F^{\lambda}$ и положим $N_{p,w}(f) = \lambda(|f|)$ для любого μ-измеримого отображения f X в F. Показать, что если $f \in \mathscr{L}_F^{p,w}$ и если для любого n обозначить через f_n функцию, равную f для $|f| \leqslant n$ и $nf/|f|$ для $|f| > n$, то последовательность $(|f_n|^*)$ сходится почти всюду к $|f|^*$ и $\lim\limits_{n\to 0} N_{p,w}(f - f_n) = 0$. Если f μ-пренебрежима, то $N_{p,w}(f) = 0$.

°30) Пусть $\Phi(t, u, v)$ — непрерывная конечная числовая функция, определенная для $0 \leqslant t \leqslant 1$, $u \geqslant 0$, $v \geqslant 0$. Для любой числовой функции $f \geqslant 0$ на $I = [0, 1]$, измеримой относительно меры Лебега, обозначим через f^* ее убывающую перестановку (упр. 29). Для того чтобы для любой пары функций $f \geqslant 0$, $g \geqslant 0$, измеримых (относительно меры Лебега) и ограниченных на I, выполнялось неравенство

$$\int_0^1 \Phi(t, f(t), g(t))\, dt \leqslant \int_0^t \Phi(t, f^*(t), g^*(t))\, dt, \tag{1}$$

необходимо и достаточно, чтобы функция Φ удовлетворяла следующим трем условиям:

$$\Phi(t, u+h, v+h) - \Phi(t, u+h, v) - \Phi(t, u, v+h) + \Phi(t, u, v) \geqslant 0 \tag{2}$$

при любых $t \in I$, $u \geqslant 0$, $v \geqslant 0$ и $h \geqslant 0$;

$$\int_0^{\delta} (\Phi(a+\delta+t, u, v) - \Phi(a+\delta+t, u+h, v) + \Phi(a+t, u+h, v) - \Phi(a+t, u, v))\, dt \geqslant 0, \tag{3}$$

$$\int_0^{\delta} (\Phi(a+\delta+t, u, v) - \Phi(a+\delta+t, u, v+h) + \Phi(a+t, u, v+h) - \Phi(a+t, u, v))\, dt \geqslant 0 \tag{4}$$

при любых a, h, δ, таких, что $0 \leqslant a \leqslant 1 - 2\delta$, $h \geqslant 0$.

(Для доказательства необходимости (3) и (4) взять в качестве f и g надлежащие ступенчатые функции; затем вывести (2) из (3) и (4). Для получения достаточности вывести сначала из (2), используя непрерывность Φ, что

$$\Phi(t, u+h, v+k) - \Phi(t, u+h, v) - \Phi(t, u, v+k) + \Phi(t, u, v) \geqslant 0 \tag{5}$$

для любых $t \in I$, $u \geqslant 0$, $v \geqslant 0$, $h \geqslant 0$, $k \geqslant 0$. Используя затем (3) и (4), доказать (1), когда f и g — ступенчатые функции, у которых все точки разрыва имеют вид r/n $(0 \leqslant r \leqslant n)$, сравнивая для этого

последовательно интегралы

$$\int_0^1 \Phi(t, f_i(t), g_i(t))\,dt, \qquad \int_0^1 \Phi(t, f_j(t), g_j(t))\,dt,$$

где f_i и g_i отличаются от f_j и g_j лишь на двух последовательных интервалах $[(r-1)/n, r/n]$ и $[r/n, (r+1)/n]$. Затем, для получения (1) в общем случае, перейти надлежащим образом к пределу.)

Если Φ дважды непрерывно дифференцируема, то условия (2), (3) и (4) эквивалентны соответственно условиям

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial u\,\partial v} \geqslant 0, \quad \frac{\partial^2\Phi}{\partial t\,\partial u} \leqslant 0, \quad \frac{\partial^2\Phi}{\partial t\,\partial v} \leqslant 0.$$

Обобщить на функции $\Phi(t, u_1, \ldots, u_m)$ произвольного числа переменных.

§ 6. Неравенства выпуклости

1. Теорема о выпуклости

Теорема 1. *Пусть X — локально компактное пространство, μ — положительная мера на X, F — действительное банахово пространство, D — выпуклое замкнутое множество в F и f — такая функция на X, что $f(X) \subset D$. Для всякой интегрируемой числовой функции $g \geqslant 0$, не пренебрежимой и такой, что функция fg интегрируема, точка $\dfrac{\int f g\,d\mu}{\int g\,d\mu}$ принадлежит D.*

В самом деле, пусть F' — сопряженное к F пространство и $\langle z, a' \rangle \leqslant \alpha$ ($a' \in F'$, $\alpha \in \mathbf{R}$) — соотношение, определяющее *замкнутое полупространство*, содержащее D. Поскольку fg интегрируема, то интегрируема и числовая функция $\langle fg, a' \rangle = \langle f, a' \rangle g$, и мы имеем $\int \langle fg, a' \rangle\,d\mu = \langle \int fg\,d\mu, a' \rangle$ (§ 4, п. 2, следствие 1 из теоремы 1); но, по условию, $\langle f(x), a' \rangle \leqslant \alpha$ для всех $x \in X$, и значит, $\langle f(x)\,g(x), a' \rangle \leqslant \alpha g(x)$; интегрируя это неравенство, получаем

$$\left\langle \int fg\,d\mu, a' \right\rangle \leqslant \alpha \int g\,d\mu.$$

Тем самым показано, что точка $\int f g\,d\mu \Big/ \int g\,d\mu$ принадлежит любому замкнутому полупространству, содержащему D; но, согласно теореме Хана — Банаха, D является пересечением содержащих

его замкнутых полупространств (Топ. вект. пр-ва, гл. II (2-е изд.), § 5, п. 3, следствие 1 из предл. 4), откуда и следует теорема.

Следствие. *Если мера* $\mu \geqslant 0$ *имеет полную массу, равную* 1, *и если функция* f *интегрируема, то* $\int f\,d\mu$ *принадлежит замкнутой выпуклой оболочке множества* $f(X)$ *в* F.

Достаточно взять в качестве g постоянную, равную 1.

2. *Неравенство о среднем*

Мы уточним теорему 1 для измеримых *числовых* функций (конечных или нет).

Определение 1. *Пусть* X *— локально компактное пространство и* μ *— мера на* X. *Если задана (конечная или нет) числовая функция* f, *определенная локально почти всюду на* X, *то максимумом по мере или* μ-*максимумом* (соотв. *минимумом по мере или* μ-*минимумом*) *функции* f *называется и обозначается через* $M_\infty(f)$ (соотв. $m_\infty(f)$) *нижняя* (соотв. *верхняя*) *грань множества тех чисел* α, *для которых* $f(x) \leqslant \alpha$ (соотв. $f(x) \geqslant \alpha$) *локально почти всюду* (*относительно* μ).

Из определения сразу же вытекает, что $m_\infty(f) = -M_\infty(-f)$, и, значит, из всякого свойства максимума по мере вытекает соответствующее свойство минимума по мере.

Для любого $\alpha > M_\alpha(f)$ множество тех $x \in X$, в которых $f(x) > \alpha$, локально пренебрежимо; но множество тех $x \in X$, для которых $f(x) > M_\infty(f)$, является объединением множеств, на которых $f(x) > r_n$, когда r_n пробегает множество рациональных чисел, превосходящих $M_\infty(f)$; следовательно, $f(x) \leqslant M_\infty(f)$ локально почти всюду (§ 5, п. 2). Точно так же $f(x) \geqslant m_\infty(f)$ локально почти всюду, откуда вытекает, что $m_\infty(f) \leqslant M_\infty(f)$, если мера μ не нулевая; при этом соотношение $m_\infty(f) = M_\infty(f)$ равносильно тому, что f *локально почти всюду равна постоянной*. Ясно, что если мера μ не нулевая, то

$$\inf_{x\in X} f(x) \leqslant m_\infty(f) \leqslant M_\infty(f) \leqslant \sup_{x\in X} f(x).$$

Если две функции f и g локально почти всюду равны, то $m_\infty(f) = m_\infty(g)$ и $M_\infty(f) = M_\infty(g)$.

Наконец, если f и g — такие две функции, что $f+g$ определена локально почти всюду, то из определения 1 сразу получаем, что

$$M_\infty(f+g) \leqslant M_\infty(f) + M_\infty(g), \tag{1}$$

если правая часть определена; точно так же, если обе функции f и g положительны и таковы, что fg определена локально почти всюду, то

$$M_\infty(fg) \leqslant M_\infty(f)\, M_\infty(g), \tag{2}$$

если правая часть определена.

Если $M_\infty(f) < +\infty$, то $f(x) < +\infty$ локально почти всюду, но не обязательно почти всюду. Говорят, что числовая функция f *ограничена по мере* (относительно меры μ), если она *определена и конечна почти всюду* и если при этом конечны оба числа $m_\infty(f)$ и $M_\infty(f)$ (последнее условие сводится к тому, что $M_\infty(|f|) < +\infty$).

Предложение 1 (неравенство о среднем). *Пусть f — измеримая, ограниченная по мере числовая функция. Для любой интегрируемой числовой функции $g \geqslant 0$ функция fg (определенная почти всюду) интегрируема и*

$$m_\infty(f)\int g\,d|\mu| \leqslant \int fg\,d|\mu| \leqslant M_\infty(f)\int g\,d|\mu|. \tag{3}$$

При этом два из трех членов в формуле (3) *могут быть равны только в том случае, если f на множестве тех $x \in X$, в которых $g(x) \neq 0$, равна почти всюду $M_\infty(f)$ или равна почти всюду $m_\infty(f)$.*

В самом деле, функция fg измерима (§ 5, п. 3, следствие 5 из теоремы 1) и неравенства $m_\infty(f)\,g(x) \leqslant f(x)g(x) \leqslant M_\infty(f)g(x)$ выполняются не только локально почти всюду, но даже почти всюду, так как множество тех точек $x \in X$, в которых $g(x) \neq 0$, является счетным объединением интегрируемых множеств (§ 5, п. 6, лемма 1). Из этого выводим, что fg интегрируема (§ 5, п. 6, теорема 5) и что справедливы неравенства (3). С другой стороны, функция $M_\infty(f)\,g - fg$ определена почти всюду и равна $(M_\infty(f) - f)\,g$; следовательно, она положительна почти всюду на X; а поскольку соотношение $M_\infty(f)\int g\,d|\mu| = \int fg\,d|\mu|$ равносильно соотношению $\int (M_\infty(f) - f)\,g\,d|\mu| = 0$, то оно

может иметь место лишь тогда, когда функция $(M_\infty(f) - f)\,g$ пренебрежима, что и завершает доказательство.

Формула (3), за исключением тривиального случая, когда $\int g d\,|\,\mu\,| = 0$, выводится из теоремы 1, п. 1, примененной к интервалу $D = [m_\infty(f),\ M_\infty(f)]$. Можно внести в теорему 1, п. 1 дополнения, аналогичные содержащимся в предложении 1, которые уточняют, в каком случае точка $\left(\int fg\,d\mu\right)\Big/\left(\int g\,d\mu\right)$ принадлежит границе множества D (упр. 2).

3. *Пространства* $\mathscr{L}^\infty_F$

Определение 2. *Для всякого отображения f пространства X в банахово пространство F положим $N_\infty(f) = M_\infty(|f|)$; говорят, что f ограничено по мере* (относительно меры μ), *если $N_\infty(f)$ конечно. Множество измеримых и ограниченных по мере отображений пространства X в F обозначается $\mathscr{L}^\infty_F(X, \mu)$* (а также $\mathscr{L}^\infty_F(\mu)$ или просто $\mathscr{L}^\infty_F$).

Функция f из $\mathscr{L}^\infty_F$ может быть, таким образом, охарактеризована тем свойством, что существует *измеримая и ограниченная* функция, равная f локально почти всюду.

Из формулы (1) сразу же вытекает, что $N_\infty(f+g) \leqslant N_\infty(f) + N_\infty(g)$, а с другой стороны, $N_\infty(\alpha f) = |\,\alpha\,|\,N_\infty(f)$ для любого скаляра α. Таким образом, множество $\mathscr{L}^\infty_F$ является *векторным подпространством* пространства всех отображений пространства X в F, а $N_\infty(f)$ есть полунорма на этом векторном пространстве. Пусть (f_n) — последовательность функций из $\mathscr{L}^\infty_F$, сходящаяся к $f \in \mathscr{L}^\infty_F$ в топологии, определенной полунормой $N_\infty(f)$; для любого целого m найдутся локально пренебрежимое множество H_m и такое целое n_0, что при любом целом $n \geqslant n_0$ и любом $x \notin H_m$ выполняется неравенство $|f(x) - f_n(x)| \leqslant 1/m$ (поскольку всякое счетное объединение локально пренебрежимых множеств локально пренебрежимо); объединение H множеств H_m локально пренебрежимо, и мы видим, что $f_n(x)$ *равномерно* стремится к $f(x)$ на дополнении локально пренебрежимого множества H; верно, очевидно, и обратное.

Ясно, что любая функция, равная локально почти всюду некоторой функции из $\mathscr{L}_F^\infty$, сама принадлежит $\mathscr{L}_F^\infty$. В частности, *локально пренебрежимые* функции, определенные на X и принимающие значения в F, образуют векторное подпространство $\mathscr{N}_F^\infty$ пространства $\mathscr{L}_F^\infty$, характеризующееся соотношением $N_\infty(f)=0$ (замыкание нуля в топологии, определенной при помощи $N_\infty(f)$). Через $L_F^\infty(X, \mu)$ (а также $L_F^\infty(\mu)$ или L_F^∞) обозначается отделимое пространство, ассоциированное с $\mathscr{L}_F^\infty$, т. е. факторпространство $\mathscr{L}_F^\infty/\mathscr{N}_F^\infty$; его топология определяется *нормой*, полученной из N_∞ факторизацией; норма класса $\dot{f} \in L_F^\infty$ обозначается $N_\infty(\dot{f})$ или $\|\dot{f}\|_\infty$. Если $F = \mathbf{R}$ (соотв. $\mathbf{C}$), то вместо $\mathscr{L}_\mathbf{R}^\infty$ и $L_\mathbf{R}^\infty$ (соотв. $\mathscr{L}_\mathbf{C}^\infty$ и $L_\mathbf{C}^\infty$) пишут $\mathscr{L}^\infty$ и L^∞, если это не вызывает путаницы.

Предложение 2. *Пространство $\mathscr{L}_F^\infty$ полно; пространство L_F^∞ есть банахово пространство.*

В самом деле, пусть (f_n) — последовательность Коши в $\mathscr{L}_F^\infty$; для любого целого n существует такое целое k_n, что при $r \geqslant k_n$ и $s \geqslant k_n$ имеет место неравенство $N_\infty(f_r - f_s) \leqslant 1/n$; следовательно, существует такое локально пренебрежимое множество A_{rs}, что $|f_r(x) - f_s(x)| \leqslant 1/n$ при всех $x \notin A_{rs}$. Если A_n есть объединение множеств A_{rs} (по $r \geqslant k_n$ и $s \geqslant k_n$), то A_n локально пренебрежимо и для любого $x \notin A_n$ неравенство $|f_r(x) - f_s(x)| \leqslant 1/n$ справедливо при всех индексах $r \geqslant k_n$, $s \geqslant k_n$. Обозначим через A локально пренебрежимое множество, являющееся объединением множеств A_n, и положим $g_n(x) = f_n(x)$ для $x \notin A$ и $g_n(x) = 0$ для $x \in A$; g_n принадлежит пространству $\mathscr{L}_F^\infty$ и, по определению множества A, последовательность (g_n) *равномерно* сходится на X к функции g. Отсюда следует, что функция g измерима (§ 5, п. 4, теорема 2); кроме того, g ограничена на множестве тех $x \in X$, в которых $|g_{k_1}(x)| \leqslant N_\infty(g_{k_1})$, а поскольку дополнение этого множества локально пренебрежимо, то g принадлежит пространству $\mathscr{L}_F^\infty$. Легко видеть, что в $\mathscr{L}_F^\infty$ последовательность (g_n) имеет пределом g, и то же самое имеет место для последовательности (f_n), ибо $N_\infty(f_n - g_n) = 0$ для всех n. Вторая часть предложения непосредственно вытекает из первой.

Замечания. 1) Всякая *непрерывная и ограниченная* на X функция f со значениями в F принадлежит $\mathscr{L}_F^\infty$, и

$$N_\infty(f) \leqslant \| f \| = \sup_{x \in X} | f(x) |.$$

Для того чтобы для всякой непрерывной и ограниченной функции f имело место равенство $N_\infty(f) = \| f \|$, необходимо и достаточно, чтобы носитель меры μ был *равен* X. В самом деле, если существует пренебрежимая и не равная тождественно нулю непрерывная функция f с компактным носителем, то $N_\infty(f) = 0$ и $\| f \| > 0$. Обратно, если носитель меры μ равен X, то для любой непрерывной и ограниченной функции f и любого числа $\alpha < \| f \|$ множество тех $x \in X$, в которых $| f(x) | > \alpha$, открыто и не пусто и, значит, имеет строго положительную внешнюю меру; отсюда вытекает, что $N_\infty(f) = \| f \|$.

Следовательно, если носитель меры μ равен X, то можно *идентифицировать* нормированное пространство $\mathscr{C}^b(X; F)$ непрерывных и ограниченных на X функций со значениями в F и некоторое подпространство пространства $\mathscr{L}_F^\infty$. А поскольку $\mathscr{L}_F^\infty$, вообще говоря, не отделимо, то подпространство $\mathscr{C}^b(X; F)$ в общем случае не замкнуто в $\mathscr{L}_F^\infty$, но его канонический образ в L_F^∞ является замкнутым подпространством пространства L_F^∞ (которое, впрочем, в рассматриваемом случае можно отождествить с $\mathscr{C}^b(X; F)$). Вообще говоря, $\mathscr{C}^b(X; F)$ *отлично* от L_F^∞, т. е. для произвольной измеримой и ограниченной функции f в общем случае не существует *непрерывной* функции g, равной f локально почти всюду (§ 5, упр. 12). Это влечет за собой тот факт, что пространство $\mathscr{K}(X; F)$ непрерывных отображений пространства X в F с компактным носителем, вообще говоря, *не будет всюду плотным в* L_F^∞, хотя оно всюду плотно в каждом из пространств L_F^p при $1 \leqslant p < +\infty$ (§ 3, п. 4, опр. 2).

2) Легко видеть, что топология, определяемая полунормой N_∞, является более сильной, чем топология, индуцируемая на $\mathscr{L}_F^\infty$ топологией сходимости по мере (§ 5, п. 11).

4. Неравенство Гёльдера

В этом пункте через p и q будут обозначаться два действительных числа, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, $1 \leqslant q \leqslant +\infty$, связанные соотношением $1/p + 1/q = 1$; значит, $q = p/(p-1)$, если $1 < p < +\infty$, $q = +\infty$, если $p = 1$, и $q = 1$, если $p = +\infty$; p и q будут называться *сопряженными показателями*. Заметим, что соотношение $1 \leqslant p \leqslant 2$ равносильно соотношению $2 \leqslant q \leqslant +\infty$; равенство $p = q$ имеет место лишь в том случае, если p и q равны 2.

ТЕОРЕМА 2 (неравенство Гёльдера). *Пусть f и g — две числовые функции, конечные почти всюду и такие, что f равна почти всюду некоторой функции из $\mathscr{L}^p$, а g — некоторой функции из $\mathscr{L}^q$. Тогда функция fg (определенная почти всюду) интегрируема и*

$$N_1(fg) \leqslant N_p(f) N_g(g). \tag{4}$$

Пусть f_1 (соотв. g_1) — функция из $\mathscr{L}^p$ (соотв. $\mathscr{L}^q$), которой равна почти всюду функция f (соотв. g); функция fg почти всюду равна всюду определенной и конечной функции $f_1 g_1$, которая измерима, как произведение двух измеримых функций (§ 5, теоремы 1 и 5). Если $1 < p < +\infty$, то неравенство Гёльдера для верхнего интеграла (гл. I, п. 3, предел. 4) приводит к неравенству (4), и тогда соотношение $N_1(fg) < +\infty$ показывает, что функция fg интегрируема (§ 5, п. 6, теорема 5). Если $p = 1$, $q = +\infty$, то неравенство (4) и интегрируемость функции fg вытекают непосредственно из неравенства о среднем (п. 2, предл. 1); таким образом, теорема доказана для всех случаев.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Пусть F, G, H — три банаховых пространства, $(u, v) \mapsto \Phi(u, v)$ — такое непрерывное билинейное отображение произведения $F \times G$ в H, что $|\Phi(u, v)| \leqslant |u| \cdot |v|$. Если $f \in \mathscr{L}^p_F$ и $g \in \mathscr{L}^q_G$, то функция $\Phi(f, g)$ интегрируема и*

$$\left|\int \Phi(f, g)\, d\mu\right| \leqslant \int |\Phi(f, g)|\, d|\mu| \leqslant N_p(f) N_q(g). \tag{5}$$

Действительно, $\Phi(f, g)$ измерима (§ 5, п. 3, следствие 5 из теоремы 1); а поскольку $|\Phi(f, g)| \leqslant |f| \cdot |g|$, то доказываемое следствие вытекает из теоремы 2 и критерия интегрируемости (§ 5, п. 6, теорема 5).

Для приложений важны два частных случая следствия 1:

СЛЕДСТВИЕ 2. *Пусть F — действительное* (соотв. *комплексное*) *банахово пространство, F' — к нему сильно сопряженное* (Топ. вект. пр-ва, гл. IV, § 3), *и пусть $(z, z') \mapsto \langle z, z' \rangle$ — каноническая билинейная форма на $F \times F'$. Если $f \in \mathscr{L}^p_F$ и $g \in \mathscr{L}^q_{F'}$, то числовая* (соотв. *комплексная*) *функция $\langle f, g \rangle$ интегрируема и*

$$\left|\int \langle f, g\rangle\, d\mu\right| \leqslant \int |\langle f, g\rangle|\, d|\mu| \leqslant N_p(f) N_q(g). \tag{6}$$

Действительно, $|\langle z, z' \rangle| \leqslant |z| \cdot |z'|$.

Если F — действительное или комплексное *гильбертово пространство*, то, как мы знаем, его можно канонически отождествить с его сопряженным F' (Топ. вект. пр-ва, гл. V, § 1, п. 6). А поскольку пространство L^2_F полно, то мы имеем следующий результат:

Следствие 3. *Пусть* μ — *положительная мера на* X *и* F — *действительное* (соотв. *комплексное*) *гильбертово пространство. Симметрическая* (соотв. *эрмитова*) *форма*

$$(\widetilde{f}, \widetilde{g}) \mapsto \int \langle f, g \rangle \, d\mu$$

определяет в L^2_F *структуру гильбертова пространства с нормой, равной* $\|\widetilde{f}\|_2$.

Следствие 4. *Пусть* F — *банахово пространство,* f — *функция из* $\mathscr{L}^p_F$ *и* g — *числовая функция, принадлежащая* $\mathscr{L}^q$; *тогда функция* fg *интегрируема и*

$$\left| \int fg \, d\mu \right| \leqslant \int |fg| \, d|\mu| \leqslant N_p(f) \, N_q(g). \tag{7}$$

Следствие 5. *Пусть* $f_1, f_2, \ldots, f_n$ — *интегрируемые положительные функции и* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — *такие строго положительные числа, что* $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$; *при этих условиях функция* $f_1^{\alpha_1} f_2^{\alpha_2} \ldots f_n^{\alpha_n}$ *интегрируема и*

$$\int f_1^{\alpha_1} f_2^{\alpha_2} \ldots f_n^{\alpha_n} d|\mu| \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int f_1 d|\mu| \right)^{\alpha_1} \left(\int f_2 d|\mu| \right)^{\alpha_2} \ldots \left(\int f_n d|\mu| \right)^{\alpha_n}. \tag{8}$$

В самом деле, произведение $f_1^{\alpha_1} f_2^{\alpha_2} \ldots f_n^{\alpha_n}$, будучи произведением измеримых функций, измеримо (§ 5, теоремы 5 и 1); поскольку неравенство (8) справедливо для верхних интегралов (гл. I, п. 2, следствие из предл. 2), то функция $f_1^{\alpha_1} f_2^{\alpha_2} \ldots f_n^{\alpha_n}$ интегрируема (§ 5, п. 6, теорема 5), откуда и вытекает следствие.

Следствие 2 из теоремы 2 уточняется следующим предложением.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Пусть* μ — *положительная мера на* X, F — *действительное или комплексное банахово пространство*, F' — *к нему сильно сопряженное и* $(z, z') \mapsto \langle z, z' \rangle$ — *каноническая билинейная форма на* $F \times F'$.

1° *Для любой функции* $f \in \mathscr{L}^p_F$ $(1 \leqslant p \leqslant +\infty)$

$$N_p(f) = \sup \left| \int \langle f, g \rangle \, d\mu \right|, \tag{9}$$

когда g *пробегает множество функций из* $\mathscr{L}^q_F$, *для которых* $N_q(g) \leqslant 1$.

2° *Для любой функции* $g \in \mathscr{L}^q_F$ $(1 \leqslant q \leqslant +\infty)$

$$N_q(g) = \sup \left| \int \langle f, g \rangle \, d\mu \right|, \tag{10}$$

когда f *пробегает множество функций из* $\mathscr{L}^p_F$, *для которых* $N_p(f) \leqslant 1$.

Докажем сначала формулу (9); будем различать два случая.

1° $1 \leqslant p < +\infty$. Поскольку при $N_p(f) = 0$ соотношение (9) становится тривиальным (ибо тогда f и $\langle f, g \rangle$ пренебрежимы), то можно всегда, домножив f на некоторый скаляр, предположить, что $N_p(f) = 1$. Допустим сначала, что f есть интегрируемая *размещенная* функция, $f = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_{A_k}$, где A_k не имеют попарно общих точек (§ 4, п. 8, лемма 1). Имеем, по предложению, $\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p \mu(A_k) = 1$. Для любого $\varepsilon > 0$ существует (для любого индекса k) такой вектор $a'_k \in F'$, что $|a'_k|^q = |a_k|^p$, если $p > 1$ (соотв. $|a'_k| = 1$, если $p = 1$) и $\langle a_k, a'_k \rangle \geqslant (1 - \varepsilon) |a_k| \cdot |a'_k|$ (Топ. вект. пр-ва, гл. IV, § 5, п. 1). Если положить $g = \sum_{k=1}^{n} a'_k \varphi_{A_k}$, то $\sum_{k=1}^{n} |a'_k|^q \mu(A_k) = 1$, если $p > 1$ (соотв. $\sup_{1 \leqslant k \leqslant n} |a'_k| = 1$, если $p = 1$), и, следовательно, $N_q(g) = 1$; с другой стороны,

$$\int \langle f, g \rangle \, d\mu = \sum_{k=1}^{n} \langle a_k, a'_k \rangle \mu(A_k) \geqslant (1 - \varepsilon) \sum_{k=1}^{n} |a_k| \cdot |a'_k| \mu(A_k),$$

а поскольку $|a'_k| = |a_k|^{p/q} = |a_k|^{p-1}$, если $p > 1$ (соотв.

$|a'_k| = 1$, если $p = 1$), то

$$\int \langle f, g\rangle d\mu \geqslant (1-\varepsilon) \sum_{k=1}^{n} |a_k|^p \mu(A_k) = (1-\varepsilon) N_p(f) = 1-\varepsilon,$$

и формула (9) для данного случая доказана.

Перейдем к случаю, когда f есть произвольный элемент пространства $\mathscr{L}^p_F$, удовлетворяющий условию $N_p(f) = 1$. Для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая размещенная функция $f_1 \in \mathscr{L}^p_F$, что $N_p(f - f_1) \leqslant \varepsilon$ (§ 4, п. 10, следствие из предл. 19). Согласно установленному выше существует функция $g \in \mathscr{L}^p_F$, для которой $N_q(g) = 1$ и $\int \langle f_1, g\rangle d\mu \geqslant N_p(f_1) - \varepsilon \geqslant 1 - 2\varepsilon$. Но

$$\int \langle f, g\rangle d\mu = \int \langle f_1, g\rangle d\mu + \int \langle f - f_1, g\rangle d\mu,$$

и, в силу (6),

$$\left|\int \langle f - f_1, g\rangle d\mu\right| \leqslant N_p(f - f_1) N_q(g),$$

откуда

$$\left|\int \langle f, g\rangle d\mu\right| \geqslant 1 - 3\varepsilon,$$

чем и доказана формула (9).

2° $p = +\infty$. Можно снова ограничиться случаем, когда $N_\infty(f) > 0$. Пусть α — произвольное число, удовлетворяющее неравенствам $0 < \alpha < N_\infty(f)$; по условию множество тех $x \in X$, в которых $|f(x)| > \alpha$, измеримо и не является локально пренебрежимым, а значит, содержит компактное множество K строго положительной меры. Поскольку f измерима, то существует компактное множество $K_1 \subset K$, имеющее строго положительную меру и такое, что сужение функции f на K_1 непрерывно. Из этого следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует разбиение множества K_1 на конечное число интегрируемых множеств, на каждом из которых колебание функции f не превосходит ε; по крайней мере одно из этих множеств, которое мы обозначим через A, имеет строго положительную меру. Через a обозначим одно из значений функции f на A; тогда $|a| > \alpha$ и $|f(x) - a| \leqslant \varepsilon$ для всех $x \in A$. Найдется такой вектор $a' \in F'$, что $|a'| = 1$ и $|\langle a, a'\rangle| \geqslant$

$\geqslant |a| - \varepsilon$; функция $g = \varphi_A \cdot a'/\mu(A)$ интегрируема, и $N_1(g) = 1$; с другой стороны,

$$\int \langle f, g\rangle d\mu = \frac{1}{\mu(A)} \int \langle f, a'\rangle \varphi_A d\mu.$$

Но мы можем написать, что

$$\int \langle f, a'\rangle \varphi_A d\mu = \langle a, a'\rangle \mu(A) + \int \langle f - a, a'\rangle \varphi_A d\mu,$$

а так как

$$|\langle f - a, a'\rangle \varphi_A| \leqslant \varepsilon \varphi_A,$$

то

$$\left|\int \langle f, g\rangle d\mu\right| \geqslant |\langle a, a'\rangle| - \varepsilon \geqslant |a| - 2\varepsilon > \alpha - 2\varepsilon;$$

поскольку же ε произвольно и α — любое число, меньшее, чем $N_\infty(f)$, то формула (9) доказана и в этом случае.

Точно так же рассуждаем для доказательства соотношения (10), рассмотрев отдельно случаи $1 \leqslant q < +\infty$ и $q = +\infty$ и использовав тот факт, что по определению нормы на F' для любого $z' \in F'$ выполняется равенство $|z'| = \sup_{|z| \leqslant 1} |\langle z, z'\rangle|$.

Замечания. 1) Пусть $\mathscr{C}$ — всюду плотное векторное подпространство пространства $\mathscr{L}^q_{F'}$; тогда формула (9) остается справедливой, если g пробегает пересечение подпространства $\mathscr{C}$ с множеством B тех функций из $\mathscr{L}^q_{F'}$, для которых $N_q(g) \leqslant 1$. В самом деле, достаточно заметить, что внутренность $\mathring{B}$ множества B плотна относительно B и что пересечение $\mathring{B} \cap \mathscr{C}$ плотно относительно $\mathring{B}$, ибо $\mathring{B}$ открыто. Это замечание применимо, в частности, к множеству $\mathscr{C} = \mathscr{K}(X; F')$ непрерывных функций с компактным носителем (со значениями в F'), когда $1 \leqslant q < +\infty$, т. е. когда $1 < p \leqslant +\infty$. Но в этом случае формула (9) верна, если g пробегает $B \cap \mathscr{K}(X; F')$, даже для $p = 1$. Действительно, можно, как и выше, ограничиться случаем, когда f будет размещенной. В этом случае показано, что если $N_1(f) = 1$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая размещенная функция $g \in \mathscr{L}^\infty_F$, что $|g(x)| \leqslant 1$ при всех $x \in X$ и что $\left|\int \langle f, g\rangle d\mu\right| \geqslant 1 - \varepsilon$. Существует конечное число компактных множеств K_i, не имеющих попарно общих точек, таких, что на каждом из K_i функция g имеет постоянное значение a'_i и что если K есть объединение множеств K_i, то $\int |f| \varphi_{\complement K} d\mu \leqslant \varepsilon$. Обозначим через U_i такую окрестность множества K_i, чтобы множества U_i не имели попарно общих точек, а через h_i — непрерыв

ное отображение пространства X в $[0, 1]$ с носителем в U_i и равное 1 на K_i. Если положить $h = \sum a_i' h_i$, то $\boldsymbol{h}(x) = \boldsymbol{g}(x)$ на K и $|\boldsymbol{h}(x)| \leqslant 1$ на X, и, значит,

$$\int |\langle f, \boldsymbol{h}\rangle| \varphi_{CK}\, d\mu \leqslant \varepsilon;$$

следовательно, $\left|\int \langle f, \boldsymbol{h}\rangle\, d\mu\right| \geqslant 1 - 3\varepsilon$, чем и доказано наше утверждение. Аналогичные замечания могут быть сделаны для формулы (10).

2) Пусть μ — положительная мера на X, $f \geqslant 0$ — измеримая (конечная или нет) функция, носитель которой содержится в счетном объединении компактных множеств K_n. Тогда для любого p, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, имеет место равенство

$$N_p(f) = \sup \int^* |fg|\, d\mu, \tag{11}$$

когда g пробегает множество функций из $\mathscr{K}(X; \mathbf{R})$, для которых $N_q(g) \leqslant 1$. Действительно, формула (11) представляет собой частный случай формулы (9), когда $N_p(f) < +\infty$, потому что тогда f эквивалентна некоторой функции из $\mathscr{L}^p$ (§ 5, п. 6, теорема 5). Если $N_p(f) = +\infty$, то для любого целого $n > 0$ положим $f_n = \inf(n, f\varphi_{K_n})$. Тогда

$$N_p(f_n) = \sup \int^* |f_n g|\, d\mu \leqslant \sup \int^* |fg|\, d\mu,$$

откуда, переходя к пределу (§ 1, п. 3, теорема 3), получаем, что $\sup \int^* |fg|\, d\mu = +\infty$.

Следствие. *Пусть μ — положительная мера на X, F — банахово пространство, F' — к нему сильно сопряженное и $\boldsymbol{g}$ — произвольная функция из $\mathscr{L}^q_{F'}$. Линейная форма на L^p_F, полученная факторизацией из линейной формы $f \mapsto \int \langle f, \boldsymbol{g}\rangle\, d\mu$ на $\mathscr{L}^p_F$, непрерывна и имеет норму $N_q(\boldsymbol{g})$.*

5. Приложение: соотношения между пространствами L^p_F $(1 \leqslant p \leqslant +\infty)$

Предложение 4. *Пусть f — измеримая функция со значениями в банаховом пространстве F; множество I тех чисел p, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, для которых $N_p(f)$ конечно, либо пусто, либо составляет интервал прямой $\overline{\mathbf{R}}$. Если I не пусто, то сужение на I отображения $p \mapsto N_p(f)$ непрерывно; при этом, если f не пренебрежима, то $\log N_p(f)$ есть выпуклая функция от $1/p$ на $\overline{I}$.*

Мы уже знаем (гл. I, п. 3, предл. 5), что множество J тех *конечных* чисел $p \geqslant 1$, для которых $N_p(f) < +\infty$, либо пусто, либо есть интервал, и что $\log N_p(f)$ есть выпуклая функция от $1/p$ на J (если f не пренебрежима); это, разумеется, влечет непрерывность функции $p \mapsto N_p(f)$ на J.

Если J пусто, то $I = \varnothing$ или $I = \{+\infty\}$, и предложение в этом случае очевидно; будем всюду в дальнейшем предполагать, что J не пусто. Предложение очевидно также в случае, когда f пренебрежима; будем предполагать, что f не пренебрежима. Если $s \in J$, то для любого конечного числа $p > s$ имеем $|f|^p = |f|^s |f|^{p-s}$, и неравенство о среднем показывает, что

$$N_p(f) \leqslant (N_s(f))^{s/p} (N_\infty(f))^{(p-s)/p}. \tag{12}$$

Устремляя p к $+\infty$, получаем

$$\limsup_{p \to +\infty} N_p(f) \leqslant N_\infty(f). \tag{13}$$

Это показывает, что если $+\infty \in I$, то J содержит сколь угодно большие числа; значит, I есть интервал из $\overline{\mathbf{R}}$, и $\overline{I} = \overline{J}$. Предложение будет доказано, если мы покажем, что $p \mapsto N_p(f)$ непрерывно на J, и это достаточно установить на концах J. Кроме того, можно предположить, что J не сводится к точке. Пусть r и s — начало и конец интервала J ($r < s \leqslant +\infty$). И пусть A — (измеримое) множество тех $x \in X$, для которых $|f(x)| \geqslant 1$; имеем

$$\int |f|^p d|\mu| = \int |f|^p \varphi_A d|\mu| + \int |f|^p \varphi_{\complement A} d|\mu|.$$

Когда $p \in J$ стремится к r, $|f|^p \varphi_A$ стремится к $|f|^r \varphi_A$ убывая, а $|f|^p \varphi_{\complement A}$ стремится к $|f|^r \varphi_{\complement A}$ возрастая. Следовательно, $\int |f|^p \varphi_{\complement A} d|\mu|$ стремится к $\int^* |f|^r \varphi_{\complement A} d|\mu|$ (§ 1, п. 3, теорема 3). С другой стороны, $|f|^p \varphi_A$ интегрируема для $p \in J$, и $\int |f|^p \varphi_A d|\mu|$ стремится к $\int |f|^r \varphi_A d|\mu|$ (§ 4, п. 3, предл. 4). Стало быть, $\int |f|^p d|\mu|$ стремится к $\int^* |f|^r d|\mu|$, чем доказана непрерывность в r отображения $p \mapsto N_p(f)$.

Точно такое же рассуждение применяется к точке s, если $s < +\infty$. Предположим, наконец, что $s = +\infty$. Учитывая (13), достаточно доказать, что $\liminf_{p \to +\infty} N_p(f) \geqslant N_\infty(f)$. Итак,

пусть a — такое число, что $0 < a < N_\infty(f)$. Так как по условию существуют конечные значения p, при которых $N_p(f) < +\infty$, то множество A тех $x \in X$, для которых $|f(x)| \geqslant a$, являясь множеством измеримым и не пренебрежимым, интегрируемо в силу неравенства $\varphi_A \leqslant (|f|/a)^p$; кроме того, из этого неравенства выводим, что $N_p(f) \geqslant a\,(|\mu|(A))^{1/p}$; устремляя теперь p к $+\infty$, получаем $\liminf\limits_{p \to +\infty} N_p(f) \geqslant a$, что и завершает доказательство.

Следствие. *Если r, s, p — три числа, удовлетворяющие условиям $1 \leqslant r < p < s \leqslant +\infty$, то пересечение $\mathscr{L}^r_F \cap \mathscr{L}^s_F$ содержится в $\mathscr{L}^p_F$.*

Отметим, что, вообще, топологии, индуцированные в пересечении $\mathscr{L}^r_F \cap \mathscr{L}^s_F$ топологиями из $\mathscr{L}^p_F$ ($r < p < s$), *различны*. Если не накладывать никакого дополнительного условия на μ, то топологии, индуцированные в $\mathscr{L}^r_F \cap \mathscr{L}^s_F$ топологиями из $\mathscr{L}^r_F$ и $\mathscr{L}^s_F$, вообще говоря, будут *не сравнимы* (иными словами, отношение $N_r(f)/N_s(f)$ может принимать сколь угодно большие и сколь угодно малые значения на $\mathscr{L}^r_F \cap \mathscr{L}^s_F$; ср. упр. 8).

В случае *ограниченной* меры μ предложение 4 может быть уточнено:

Предложение 5. *Пусть μ — ограниченная мера, и пусть f — μ-измеримая функция со значениями в банаховом пространстве F. Множество I чисел p, заключенных в пределах $1 \leqslant p \leqslant +\infty$ и таких, что $N_p(f)$ конечно, либо пусто, либо составляет интервал с началом $p=1$, содержащий эту точку; кроме того, $(\mu(X))^{-1/p} N_p(f)$ есть возрастающая функция от p на I.*

Это есть непосредственное следствие предложения 4 из этого пункта и следствия из предложения 4 гл. I, п. 3.

Следствие. *Если мера μ ограничена, то отношение $r < s$ влечет $\mathscr{L}^s_F \subset \mathscr{L}^r_F$; при этом топология сходимости в среднем порядка s будет более сильной, чем топология сходимости в среднем порядка r (в $\mathscr{L}^s_F$).*

Можно показать, что, вообще говоря, топология сходимости в среднем порядка s будет *строго более сильной*, чем топология сходимости в среднем порядка r (упр. 8).

Предложение 6. *Пусть X — дискретное пространство и μ — мера на X, определенная при помощи массы $+1$, расположенной в каждой точке из X. Если f есть отображение пространства X в банахово пространство F, то множество I чисел p, заключенных в пределах $1 \leqslant p \leqslant +\infty$ и таких, что $N_p(f)$ конечно, либо пусто, либо составляет интервал, имеющий концом $+\infty$ и содержащий эту точку; при этом $N_p(f)$ есть убывающая функция от p на I.*

В самом деле, $\mu^*(|f|) = \sum_{x \in X} |f(x)|$ для любой функции f (§ 1, п. 1, пример) и $N_\infty(f) = \|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$; если существует такое число $\alpha > 0$, что $|f(x)| \geqslant \alpha$ для бесконечного множества значений $x \in X$, то $N_p(f) = +\infty$ при любом конечном p; в противном случае найдется такое $x_0 \in X$, что $|f(x_0)| = \|f\|$, откуда $N_\infty(f) = |f(x_0)| \leqslant N_p(f)$ при любом конечном p. А поскольку функция $\log N_p(f)$ выпукла относительно $1/p$ и принимает наименьшее значение в точке $+\infty$, то она необходимо будет убывающей функцией от p на I (Функции действ. перем., гл. I, § 4, п. 3, предл. 5), что и завершает доказательство.

Следствие. *Если X дискретно и если мера μ определена при помощи массы $+1$ в каждой точке из X, то отношение $r < s$ влечет $\mathscr{L}^r_F \subset \mathscr{L}^s_F$; при этом топология сходимости в среднем порядка r будет более сильной, чем топология сходимости в среднем порядка s (в $\mathscr{L}^r_F$).*

Упражнения

1) Пусть f и g — такие две измеримые числовые функции, что $a = M_\infty(f)$ и $b = M_\infty(g)$ конечны; показать, что для того, чтобы $M_\infty(f+g) = M_\infty(f) + M_\infty(g)$, необходимо и достаточно, чтобы для любой пары действительных чисел α, β, удовлетворяющих условиям $\alpha < a$, $\beta < b$, множество тех $x \in X$, которых одновременно $\alpha \leqslant f(x)$ и $\beta \leqslant g(x)$, не было локально пренебрежимым.

2) Пусть D — выпуклое замкнутое множество в банаховом пространстве F с непустой внутренностью, и пусть f — такая измеримая функция со значениями в F, что $f(X) \subset D$. Пусть $g \geqslant 0$ — интегрируемая функция, не пренебрежимая и такая, что fg интегрируема. Предположим, что точка $c = \int fg\,d\mu \Big/ \int g\,d\mu$ является граничной для D; показать, что если V есть пересечение всех замкнутых опорных гиперплоскостей множества D в точке c, то $f(x) \in V \cap D$ почти всюду на множестве тех точек x, в которых $g(x) > 0$ (свести к случаю, когда

F есть пространство счетного типа (то есть содержит счетное всюду плотное множество), применив теорему 4 из § 5; после этого заметить, что V есть пересечение счетного семейства опорных гиперплоскостей множества D в точке c).

Показать, что если F конечномерно и если A есть грань точки c относительно D (Топ. вект. пр-ва, гл. II, § 4, упр. 4), то сделанное предположение влечет, что $f(x) \in A$ почти всюду на множестве тех точек x, в которых $g(x) > 0$ (провести индукцию по размерности пространства F).

3) Пусть μ — такая мера на компактном пространстве X, для которой X служит носителем. Показать, что если любая измеримая и ограниченная по мере числовая функция равна почти всюду непрерывной функции, то X является стоуновым пространством (ср. гл. II, § 1, упр. 13) (рассмотреть характеристическую функцию компактного множества). Обратно, если X есть стоуново пространство, то для того, чтобы всякая измеримая и ограниченная по мере функция была равна почти всюду некоторой непрерывной функции, необходимо и достаточно, чтобы всякое нигде не плотное множество в X было пренебрежимым (ср. § 5, упр. 14).

4) Пусть $\varphi(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ — конечная числовая функция, удовлетворяющая условиям предложения 1 из главы I. Показать, что если $f_1, f_2, \ldots, f_n$ суть n конечных положительных числовых функций, интегрируемых и не пренебрежимых, то функция $\varphi(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ интегрируема и

$$\int \varphi(f_1, f_2, \ldots, f_n)\, d\mu \leqslant \varphi\left(\int f_1\, d\mu, \int f_2\, d\mu, \ldots, \int f_n\, d\mu\right).$$

При этом для того, чтобы имело место равенство

$$\int \varphi(f_1, \ldots, f_n)\, d\mu = \varphi\left(\int f_1\, d\mu, \ldots, \int f_n\, d\mu\right),$$

необходимо и достаточно, чтобы для почти всех $x \in X$ точка из $\mathbf{R}^n$ с координатами $\xi_i = f_i(x)/\varphi(f_1(x), \ldots, f_n(x))$ принадлежала грани относительно K точки с координатами $\alpha_i = \int f_i\, d\mu \Big/ \int \varphi(f_1, \ldots, f_n)\, d\mu$ (рассуждать, как в упр. 2). В частности, если p и q означают два сопряженных показателя, причем $1 < p < +\infty$, то:

1. Для того чтобы две положительные числовые функции $f \in \mathscr{L}^p$ и $g \in \mathscr{L}^q$ удовлетворяли равенству $\int fg\, d\mu = N_p(f) N_q(g)$, необходимо и достаточно, чтобы существовали такие два числа α, β, не равные одновременно нулю, что равенство $\alpha (f(x))^p = \beta (g(x))^q$ справедливо почти всюду.

2. Для того чтобы две положительные числовые функции $f \in \mathscr{L}^p$ и $g \in \mathscr{L}^q$ удовлетворяли равенству $N_p(f + g) = N_p(f) + N_p(g)$, необходимо и достаточно, чтобы существовали такие два числа α, β,

не равные одновременно 0 что равенство $\alpha f(x) = \beta g(x)$ выполняется почти всюду.

5) a) Пусть μ — мера Лебега на интервале $X =]0, +\infty[$. Для любого числа p в пределах $0 < p \leqslant +\infty$ указать примеры таких измеримых функций $f \geqslant 0$ на X, чтобы множество чисел r $(0 < r \leqslant +\infty)$, для которых $N_r(f) = \left(\int f^r \, d\mu\right)^{1/r}$ конечно, составляло бы один из интервалов $]0, p[$, $]0, p]$, $]p, +\infty]$, $[p, +\infty]$ (взять в качестве f функции вида $x^\alpha (\log x)^\beta$ в окрестности 0 или $+\infty$); вывести отсюда, что для всякого интервала I, содержащегося в $]0, +\infty]$, существует такая измеримая функция $f \geqslant 0$, что I совпадает с множеством тех $r > 0$, для которых $N_r(f) < +\infty$ (рассмотреть сумму двух функций, для которых I является одним из указанных выше четырех интервалов).

b) Для меры Лебега на интервале $]0, 1[$ указать также примеры таких функций f, чтобы множество I чисел $r > 0$, для которых $N_r(f) < +\infty$, составляло произвольный интервал с началом в 0, содержащийся в $]0, +\infty]$.

6) Показать, что для любой измеримой не пренебрежимой числовой функции $f \geqslant 0$ $N_r(f)$ есть функция от r, бесконечно дифференцируемая в каждой внутренней точке интервала, на котором она конечна. Вывести отсюда, что внутри интервала, на котором $N_r(f)$ конечна, $\log N_r(f)$ есть строго выпуклая функция от $1/r$, если только f не является почти всюду постоянной на множестве тех $x \in X$, в которых $f(x) \neq 0$.

°7) Пусть f — положительная, измеримая, не пренебрежимая числовая функция.

a) Показать, что если для конечного числа $r > 0$ функция f^r интегрируема, то функция $\log f$ квазиинтегрируема (§ 5, упр. 11).

b) Предположим, что f^r интегрируема для $0 < r < r_0$. Пусть A — множество тех $x \in X$, в которых $f(x) > 0$; показать, что если $\mu^*(A) > 1$, то $N_r(f)$ стремится к $+\infty$, когда r стремится к 0; если $\mu(A) < 1$, то $N_r(f)$ стремится к 0 одновременно с r (использовать предл. 4 из гл. I).

c) Показать, что если $\mu(A) = 1$, то $\int f^r \, d\mu$ стремится к 1, когда r стремится к 0, и имеет в этой точке правую производную, равную $\int \log f \, d\mu$ (использовать упр. 8 из § 5); вывести отсюда, что когда r стремится к 0, $N_r(f)$ стремится к

$$G(f) = \exp\left(\int \log f \, d\mu\right).$$

d) Показать, что если $\mu(X) = 1$ и f^r и $\log f$ интегрируемы, то $G(f) \leqslant N_r(f)$, причем равенство достигается лишь в том случае, когда f постоянна почти всюду (использовать упр. 4).

e) Показать, что если $\mu(X) = 1$ и f и g — такие две измеримые положительные функции, что $G(f)$ и $G(g)$ определены, то определено

$G(f+g)$ и $G(f)+G(g) \leqslant G(f+g)$, причем равенство имеет место лишь в том случае, если найдутся такие два числа α, β, не равные одновременно нулю, что $\alpha f(x) = \beta g(x)$ почти всюду, или если $G(f+g) = 0$ (использовать d) (рассмотреть функции $f/(f+g)$ и $g/(f+g)$).

8) Пусть μ — мера Лебега на интервале $X = [0, +\infty[$.

a) Пусть $k > 1$ и $h < k$ — два действительных числа. Показать, что для любого $n \geqslant 1$ и любого числа p в пределах $1 \leqslant p \leqslant +\infty$ функции $f_n(x) = n^h/(x+n)^k$ принадлежат $\mathscr{L}^p$; показать, что при $p > 1/(k-h)$ последовательность $N_p(f_n)$ стремится к 0 вместе с $1/n$, а при $p < 1/(k-n)$ будет неограниченной.

b) Пусть число $k < 1$; показать, что для любого $n > 1$ и любого числа p в пределах $1 \leqslant p \leqslant +\infty$ функции $g_n(x) = n^k e^{-nx}$ принадлежат $\mathscr{L}^p$; показать, что при $p < 1/k$ последовательность $N_p(g_n)$ стремится к 0 вместе с $1/n$, а при $p > 1/k$ будет неограниченной.

Вывести из a) и b), что если $1 \leqslant p < q \leqslant +\infty$, то топологии, индуцируемые на $\mathscr{L}^p \cap \mathscr{L}^q$ топологиями из $\mathscr{L}^p$ и $\mathscr{L}^q$, не сравнимы.

c) Показать, что если μ есть мера Лебега на интервале $[0, 1]$ и если $p < q$, то топология сходимости в среднем порядка q будет строго более сильной, чем топология сходимости в среднем порядка p (в $\mathscr{L}^q$).

9) Пусть X — бесконечное дискретное пространство и μ — мера на X, носитель которой равен X.

a) Показать, что для $1 \leqslant p \leqslant +\infty$ пространство $\mathscr{L}^p(\mu)$ является топологическим векторным пространством, изоморфным пространству $\mathscr{L}^p(\mu_0)$, где μ_0 есть мера на X, определенная при помощи массы $+1$ в каждой точке из X.

b) Показать, что если $1 \leqslant p < q \leqslant +\infty$, то топология сходимости в среднем порядка p будет строго более сильной, чем топология сходимости в среднем порядка q (в $\mathscr{L}^p$).

°10) a) Пусть $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — такие два вектора в банаховом пространстве F, что $|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}| = 1$. Показать, что для любого числа t в пределах $0 \leqslant t \leqslant 1$ и любого числа p в пределах $1 \leqslant p < +\infty$ выполняются неравенства

$$|\boldsymbol{a} - t\boldsymbol{b}|^p \leqslant 2^p |\boldsymbol{a} - t^p \boldsymbol{b}|, \tag{1}$$

$$|\boldsymbol{a} - t^p \boldsymbol{b}| \leqslant 3p |\boldsymbol{a} - t\boldsymbol{b}| \tag{2}$$

(выразить $\boldsymbol{a} - t^p\boldsymbol{b}$ в виде линейной комбинации векторов $\boldsymbol{a} - t\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ и заметить, что для $0 \leqslant \rho \leqslant 1$ справедливы неравенства $|\boldsymbol{a} - \rho\boldsymbol{b}| \geqslant 1 - \rho$ и $|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}| \leqslant 2|\boldsymbol{a} - \rho\boldsymbol{b}|$). Вывести отсюда, что если $\boldsymbol{y}$ и $\boldsymbol{z}$ — произвольные два вектора из F, то

$$|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}|^p \leqslant 2^p \left| |\boldsymbol{y}|^{p-1}\cdot\boldsymbol{y} - |\boldsymbol{z}|^{p-1}\cdot\boldsymbol{z} \right|, \tag{3}$$

$$\left| |\boldsymbol{y}|^{p-1}\cdot\boldsymbol{y} - |\boldsymbol{z}|^{p-1}\cdot\boldsymbol{z} \right| \leqslant 3p\, |\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}| \left(|\boldsymbol{y}| + |\boldsymbol{z}|\right)^{p-1}. \tag{4}$$

b) Показать, что отображение $f \mapsto |f|^{(1/p)-1} \cdot f$ есть биективное равномерно непрерывное отображение пространства $\mathscr{L}^1_F$ на $\mathscr{L}^p_F$ (использовать неравенство (3)).

c) Показать, что отображение $f \mapsto |f|^{p-1} \cdot f$ пространства $\mathscr{L}^p_F$ на $\mathscr{L}^1_F$ равномерно непрерывно на любом ограниченном подмножестве пространства $\mathscr{L}^p_F$ (использовать неравенство (4) и неравенство Гёльдера). Вывести отсюда, что топологические пространства $\mathscr{L}^1_F$ и $\mathscr{L}^p_F$ гомеоморфны.

11) Пусть g — положительная числовая функция, принадлежащая $\mathscr{L}^p$ $(1 \leqslant p < +\infty)$. Обозначим через I_g множество тех функций $f \in \mathscr{L}^p_F$, для которых $|f| \leqslant g$.

a) Показать, что в I_g топология сходимости в среднем порядка p совпадает с топологией сходимости по мере.

b) Показать, что если $p \leqslant q < r$ (соотв. $q < r \leqslant p$), то в множестве $I_g \cap \mathscr{L}^q_F \cap \mathscr{L}^r_F$ топология сходимости в среднем порядка q будет менее сильной (соотв. более сильной), чем топология сходимости в среднем порядка r (заметить, что для двух функций f, f_0, принадлежащих этому множеству, $|f-f_0|^q \leqslant |f-f_0|^s (2g)^{q-s}$, и применить неравенство Гёльдера, выбрав надлежащим образом s и пару сопряженных показателей). Показать на примерах, что эти топологии могут быть различны (ср. упр. 8).

c) Пусть μ — мера Лебега на $X =]0, +\infty[$; функция $g(x) = (x(\log^2 x + 1))^{-1/p}$ принадлежит $\mathscr{L}^p$, но не принадлежит никакому $\mathscr{L}^q$ для $q \neq p$. Показать, что если $q \neq p$, то топология сходимости в среднем порядка q в множестве $I_g \cap \mathscr{L}^q$ отлична от топологии сходимости по мере.

12) Пусть $h \geqslant 0$ — такая числовая функция, что h и h^2 интегрируемы; пусть I_h — множество измеримых числовых функций f, для которых $|f| \leqslant h$. Показать, что отображение $(f, g) \mapsto fg$ произведения $I_h \times I_h$ в $\mathscr{L}^1$ непрерывно в топологии сходимости в среднем (в I_h и в $\mathscr{L}^1$).

°13) Для любого числа p в пределах $0 < p < 1$ обозначим через $\mathscr{L}^p_F$ множество таких измеримых отображений f пространства X в банахово пространство F, что $N_p(f) < +\infty$.

a) Показать, что $\mathscr{L}^p_F$ есть векторное пространство и что если через Ba обозначено множество тех $f \in \mathscr{L}^p_F$, для которых $N_p(f) \leqslant a$, то множества Ba при a, пробегающем множество строго положительных чисел, образуют фундаментальную систему окрестностей 0 в метризуемой топологии, согласующейся со структурой векторного пространства в $\mathscr{L}^p_F$.

b) Показать, что отображение $f \mapsto |f|^{p-1} \cdot f$ есть равномерно непрерывное отображение пространства $\mathscr{L}^p_F$ на $\mathscr{L}^1_F$ и что обратное

отображение равномерно непрерывно на любом ограниченном подмножестве из $\mathscr{L}^1_F$ (ср. упр. 10). Вывести отсюда, что пространство $\mathscr{L}^p_F$ полно и что множество $\mathscr{K}_F(X)$ всюду плотно в $\mathscr{L}^p_F$.

c) Если мера μ ограничена, то $\mathscr{L}^1_F \subset \mathscr{L}^p_F$, и топология сходимости в среднем будет более сильной, чем топология, индуцируемая в $\mathscr{L}^1_F$ топологией из $\mathscr{L}^p_F$.

d) Возьмем в качестве μ меру Лебега на $X = [0, 1]$. Показать, что для любой непрерывной функции $f \geqslant 0$ существует представление $f = \frac{1}{2}(f_1 + f_2)$, где $f_1 \geqslant 0$, и $f_2 \geqslant 0$ — такие две функции из $\mathscr{L}^p$, что $N_p(f_1) = N_p(f_2) = 2^{1-(1/p)} N_p(f)$. Вывести отсюда, что в $\mathscr{L}^p$ замкнутая выпуклая оболочка любой окрестности B_a есть все пространство $\mathscr{L}^p$ и что, значит, всякая непрерывная линейная форма на $\mathscr{L}^p$ тождественно равна нулю.

°14) Пусть $p > 0$ и $q > 0$ — произвольные конечные действительные числа, и пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — непрерывная числовая функция, определенная на $\mathbf{R}^n$.

a) Пусть μ — мера Лебега на $X = [0, 1]$. Чтобы для любой системы n функций $g_k \in \mathscr{L}^p$ функция $f(g_1, g_2, \ldots, g_n)$ принадлежала $\mathscr{L}^q$, необходимо и достаточно, чтобы существовало такое число $a > 0$, что $|f(x_1, \ldots, x_n)|^q \leqslant a(1 + |x_1| + \ldots + |x_n|)^q$.

(Необходимость доказать от противного, допустив, что при любом целом $m > 0$ существует такая точка $(x_{1m}, \ldots, x_{nm})$ из $\mathbf{R}^n$, что

$$|f(x_{1m}, \ldots, x_{nm})|^q \geqslant m(1 + |x_{1m}| + \ldots + |x_{nm}|)^q.$$

После этого показать, что в X существует такая последовательность (A_m) интервалов попарно без общих точек, что если положить $g_k(t) = x_{km}$ для любого $t \in A_m$ и $g_k(t) = 0$ для любой точки t, не принадлежащей никакому A_m, то каждая из функций g_k будет принадлежать $\mathscr{L}^p$, но $f(g_1, \ldots, g_n)$ не будет принадлежать $\mathscr{L}^q$).

b) Пусть μ — мера Лебега на $\mathbf{R}$. Чтобы для любой системы n функций $g_k \in \mathscr{L}^p$ функция $f(g_1, \ldots, g_n)$ принадлежала $\mathscr{L}^q$, необходимо и достаточно, чтобы существовало такое число $b > 0$, что $|f(x_1, \ldots, x_n)|^q \leqslant b(|x_1|^p + |x_2| + \ldots + |x_n|)^p$ (тот же метод).

°15) Пусть X — компактное пространство и μ — положительная мера на X. Для функций f и g из $\mathscr{L}^2_{\mathbf{C}}$ положим $(f \mid g) = (\widetilde{f} \mid \widetilde{g}) = \int f\bar{g}\, d\mu$. Последовательность функций $f_n \in \mathscr{L}^2_{\mathbf{C}}$ называется *ортонормированной*, если последовательность, составленная из $\widetilde{f}_n$, ортонормирована в гильбертовом пространстве $L^2_{\mathbf{C}}$, т. е. (Гоп. вект. пр-ва, гл. V, § 2) если $(f_m \mid f_n) = \delta_{mn}$ (символ Кронекера) для любой пары индексов. Для любой функции $g \in \mathscr{L}^2_{\mathbf{C}}$ комплексные числа $c_n = (g \mid f_n)$

называются *компонентами* функции g относительно ортонормированной последовательности (f_n); имеем $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 \leqslant \int |g|^2 d\mu$.

Для любой пары точек x, y из X и любого целого $n \geqslant 0$ положим $K_n(x, y) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)\overline{f_k(y)}$ (*ядро порядка* n для ортонормированной последовательности (f_n)); для всякой функции $g \in \mathscr{L}^2_{\mathbf{C}}$ имеем

$$s_n(g) = \sum_{k=0}^{n} (g \mid f_k) f_k(x) = \int K_n(x, y) g(y) d\mu(y).$$

Положим $H_n(x) = \int |K_n(x, y)| d\mu(y)$ (*функция Лебега порядка* n для ортонормированной последовательности (f_n)).

а) Пусть (α_n) — такая убывающая последовательность строго положительных чисел, что ряд с общим членом α_n сходится. Показать, что для почти всех $x \in X$ выполняется соотношение $\sum_{k=0}^{n} |f_k(x)|^2 = o(1/\alpha_n)$ (используя предл. 6 из § 3, показать, что ряд с общим членом $\alpha_n |f_n(x)|^2$ сходится почти всюду, и применить упр. 10 из Общей топ., гл. IV, § 7). Вывести отсюда, что $H_n(x) = o(1/\sqrt{\alpha_n})$ для почти всех $x \in X$.

b) Пусть x_0 — точка из X. Чтобы для *любой* комплекснозначной функции g, определенной и непрерывной на X, частичные суммы $s_n(g)$ были ограничены в точке x_0 (числом, зависящим от g и от x_0), необходимо и достаточно, чтобы множество чисел $H_n(x_0)$ было ограничено (использовать предл. 3 и тот факт, что в пространстве, сопряженном к банахову, всякое слабо ограниченное множество сильно ограничено)

c) Чтобы для *любой* комплекснозначной функции g, определенной и непрерывной на X, ряд с общим членом $(g \mid f_n) f_n(x)$ равномерно сходился на X и имел сумму $g(x)$, необходимо и достаточно, чтобы: 1° всякая непрерывная на X функция с комплексными значениями могла быть равномерно приближена линейными комбинациями функций f_k; 2° существовала такая постоянная a, что $|H_n(x)| \leqslant a$ при любом n и любых $x \in X$. (Заметить, что для любого n справедливо тождество $f_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (f_n \mid f_m) f_m(x)$; с другой стороны, для доказательства необходимости условия 2° заметить, что для любой возрастающей последовательности (n_k) целых чисел и любой последовательности (x_k) точек из X последовательность чисел $\int K_{n_k}(x_k, y) g(y) d\mu(y)$ ограничена (числом, зависящим от g), и рассуждать, как в b).)

16) Пусть μ — мера Лебега на $X = [0, 2\pi]$. Последовательность функций f_n, где

$$f_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \qquad f_{2n-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx,$$

$$f_{2n}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx \qquad (n \geqslant 1),$$

есть ортонормированная тотальная последовательность в пространстве $\mathscr{L}^2_{\mathbf{C}}$ (см. Общая топ., гл. X, § 5, предл. 8). Показать, что соответствующая функция Лебега $H_n(x)$ не зависит от x и что $H_n \sim (4/\pi) \log n$.

°17) Пусть μ — мера Лебега на $X = [0, 1]$. Определим следующим образом последовательность (f_n) ступенчатых функций на X: f_0 — постоянная, равная 1; пусть для любого целого $n > 0$ через m обозначено наибольшее целое число, при котором $2^m \leqslant n$, и пусть $n = 2^m + k$; f_n есть функция, равная $2^{m/2}$ на интервале $\left[\frac{2k}{2^{m+1}}, \frac{2k+1}{2^{m+1}}\right[$, $-2^{m/2}$ на интервале $\left[\frac{2k+1}{2^{m+1}}, \frac{2k+2}{2^{m+1}}\right[$ и 0 в остальных точках из X.

a) Показать, что последовательность (f_n) ортонормирована («*ортонормированная система Хаара*»).

b) Пусть V_n — векторное подпространство пространства $\mathscr{L}^2_{\mathbf{C}}$ (над $\mathbf{C}$), порожденное функциями f_k с индексами $k \leqslant n$. Показать, что существует разбиение интервала $[0, 1[$ на $n+1$ полуоткрытых интервалов, на каждом из которых всякая функция, принадлежащая V_n, будет постоянна. Вывести отсюда, что и обратно, для любой функции g, постоянной на каждом из этих $n+1$ интервалов, существует функция из V_n, равная g на $[0, 1[$ (заметить, что V_n имеет размерность $n+1$).

c) Пусть g — произвольная функция из $\mathscr{L}^2_{\mathbf{C}}$; вывести из b), что если h есть единственная функция из V_n, для которой $N_2(g - h)$ достигает минимума, то на любом интервале $[\alpha, \beta[$, на котором h постоянна,

$$h(x) = \frac{1}{\beta - \alpha} \int_\alpha^\beta g(t)\, dt.$$

d) Показать, что для любой комплекснозначной функции g, определенной и непрерывной на X, ряд с общим членом $(g \mid f_n) f_n(x)$ равномерно сходится на $[0, 1[$ и имеет сумму $g(x)$ (использовать c)). Вывести отсюда, что последовательность (f_n) тотальна.

°18) Пусть X — локально компактное пространство, μ — положительная мера на X и f — μ-измеримая числовая функция.

a) Пусть $(a_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ — последовательность действительных чисел и λ — конечное действительное число; для любого $n \in \mathbf{Z}$ положим

$$u_n(x) = a_{n + [\lambda \log |f(x)|]} f(x), \quad \text{если} \quad f(x) \neq 0, \quad \text{и} \quad f(x) \neq \pm\infty,$$

$u_n(x) = 0$ для остальных значений $x \in X$ ($[t]$ означает целую часть конечного действительного числа t). Показать, что u_n μ-измеримы и что для любого конечного действительного c, удовлетворяющего условию $c\lambda < 1$,

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \int^* |u_n(x)|\, e^{cx}\, d\mu(x) \leqslant e^{|c|} \int^* |f(x)|^{1-c\lambda}\, d\mu(x) \left(\sum_{-\infty}^{\infty} e^{cn} |a_n| \right).$$

b) Пусть $p' > 0$, $p'' > 0$ — конечные числа, t — действительное число, $0 < t < 1$, и p — действительное число, определяемое равенством $1/p = (1-t)/p' + t/p''$. Для любого $\alpha > 0$ положим

$$\frac{1}{K_\alpha} = \inf \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |e^{\alpha t n} a_n|^{p''} \right)^{(1-t)/p'} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |e^{-\alpha(1-t)n} a_n|^{p''} \right)^{t/p''},$$

где нижняя грань берется по всем абсолютно сходящимся рядам $(a_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ конечных действительных чисел, для которых $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n = 1$.

Показать, что

$$N_p(f) \leqslant K_\alpha \cdot \inf F(u), \qquad (*)$$

$$N_p(f) \geqslant K_\alpha e^{-\alpha} \cdot \inf F(u), \qquad (**)$$

где $u = (u_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ пробегает множество последовательностей функций из $\mathscr{L}^{p'} \cap \mathscr{L}^{p''}$, для которых ряд $(u_n(x))_{n\in\mathbf{Z}}$ абсолютно сходится почти всюду и имеет сумму $f(x)$; здесь для любой последовательности u, обладающей этими свойствами,

$$F(u) = \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (N_{p'}(e^{\alpha t n} u_n))^{p'} \right)^{p'} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (N_{p''}(e^{-\alpha(1-t)n} u_n))^{p''} \right)^{t/p''},$$

и в формулах (*) и (**) нижняя грань берется в множестве последовательностей $u = (u_n)$, обладающих сформулированными выше свойствами. (Для доказательства (*) использовать неравенство Гёльдера; чтобы доказать (**), применить дважды а) с надлежащим выбором c и λ.) В частности, K_α конечно при любом $\alpha > 0$.

c) Пусть p', p'', q', q'' — конечные числа, $\geqslant 1$, t — число, удовлетворяющее условиям $0 < t < 1$, и пусть

$$\frac{1}{p} = \frac{1-t}{p'} + \frac{t}{p''}, \qquad \frac{1}{q} = \frac{1-t}{q'} + \frac{t}{q''}.$$

Пусть Y — другое локально компактное пространство, ν — положительная мера на Y и пусть w — линейное отображение $\mathscr{K}(X; \mathbf{R})$ в векторное (не топологическое) пространство $\mathscr{S}(Y, \nu; \mathbf{R})$ ν-измеримых конечных числовых функций на Y. Предположим, что: 1° w отображает $\mathscr{K}(X; \mathbf{R})$ в $\mathscr{L}^{q'}(Y; \mathbf{R}) \cap \mathscr{L}^{q''}(Y; \mathbf{R})$; 2° для любой функции

$f \in \mathscr{K}(X; \mathbf{R})$

$$N_{q'}(w(f)) \leqslant M' N_{p'}, \qquad (f),\ N_{q''}(w(f)) \leqslant M'' N_{p''}(f).$$

Отсюда заключить, что w отображает также $\mathscr{K}(X; \mathbf{R})$ в $\mathscr{L}^q(Y; \mathbf{R})$ и что

$$N_q(w(f)) \leqslant M \cdot N_p(f),$$

где

$$M \leqslant M'^{1-t} + M''^{t}$$

(*неравенство М. Рисса*). (Записать f в виде $\sum_n u_n$, как в b), и рассмотреть ряд с общим членом $w(u_n)$; использовать неравенства (*) и (**) из b).)

19) Пусть $f \geqslant 0$ — числовая функция на $\mathbf{R}_+^* =]0, +\infty[$, интегрируемая с p-й степенью относительно меры Лебега ($1 < p < +\infty$). Положим $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ для любого $x > 0$.

a) Показать, что для x, стремящегося к 0 или к $+\infty$,

$$F(x) = o(x^{(p-1)/p})$$

(использовать неравенство Гёльдера).

b) Показать, что функция $F(x)/x$ интегрируема с p-й степенью на $\mathbf{R}_+^*$ и что (*неравенство Харди*)

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{F(x)}{x}\right)^p dx \leqslant \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^{+\infty} (f(x))^p\,dx.$$

(Рассмотреть вначале случай, когда $f \in \mathscr{K}(\mathbf{R}_+^*)$; для любого компактного интервала $[a, b] \subset \mathbf{R}_+^*$ мажорировать интеграл

$$\int_a^b \left(\frac{F(t)}{t}\right)^p dt,$$

интегрируя по частям и используя неравенство Гёльдера.)

20) a) Пусть Y — метрическое пространство; для любого $y \in Y$ и любого $r > 0$ обозначим через $B(y; r)$ открытый шар в Y с центром y и радиусом r. Пусть $\mathfrak{S}$ — множество открытых шаров в Y с диаметрами, образующими *ограниченное* множество в $\mathbf{R}$, такое, что для любой последовательности $(B(y_n; r_n))$ шаров, принадлежащих $\mathfrak{S}$ и попарно не пересекающихся, $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$. Показать, что если M есть объединение шаров $B \in \mathfrak{S}$, то найдется последовательность шаров $B(y_n; r_n) \in \mathfrak{S}$, попарно не пересекающихся и таких, что шары $B(y_n; 4r_n)$ образуют покрытие M. (Если $k > 0$ есть мажоранта множества радиусов шаров $B \subset \mathfrak{S}$, то определить по индукции по h последовательность семейств $(\mathfrak{F}_h)$ шаров $B(y_{hj}; r_{hj}) \in \mathfrak{S}$, так, чтобы $\mathfrak{F}_h$ было максимальным среди (конечных) семейств шаров, принадлежащих $\mathfrak{S}$, попарно

не пересекающихся и не пересекающихся с шарами, принадлежащими семействам $\mathfrak{F}_i$ для $i < h$ и с радиусами, заключенными между $(2/3)^{h+1}k$ и $(2/3)^h k$.)

b) Пусть X — метризуемое локально компактное пространство и d — расстояние в X, согласующееся с его топологией; обозначим снова через $B(x; r)$ открытый шар с центром x и радиусом $r > 0$ относительно этого расстояния, а через $\delta(A)$ — диаметр подмножества A из X относительно расстояния d. Пусть μ — положительная мера на X, удовлетворяющая следующим условиям: 1° всякий открытый шар μ-интегрируем; 2° $\mu(B(x; 4r)) \leqslant K \cdot \mu(B(x; r))$, где $K > 1$ — постоянная, не зависящая от x и r; 3° если последовательность (B_n) открытых шаров такова, что $\lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = 0$, то $\lim_{n\to\infty} \delta(B_n) = 0$; 4° если последовательность (B_n) открытых шаров такова, что $\lim_{n\to\infty} \delta(B_n) = +\infty$, то $\lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = +\infty$.

Пусть $f \in \mathscr{L}^p(X; \mu)$ — функция со значениями $\geqslant 0$ $(1 < p < \infty)$; для любого $x \in X$ полагаем

$$\tilde{f}(x) = \sup \frac{1}{\mu(B)} \int_B f(y)\, d\mu(y),$$

где B пробегает множество открытых шаров с центром x. Показать, что $\tilde{f}$ конечна и полунепрерывна снизу на X.

c) Пусть f^* — убывающая перестановка f (§ 5, упр. 29); для $t > 0$ положим

$$\beta_f(t) = \frac{1}{t} \int_0^t f^*(s)\, ds;$$

это — убывающая непрерывная функция, такая, что $f^* \leqslant \beta_f$; имеем $\beta_f(t) = o(t^{-1/p})$ для t, стремящегося к 0 или к $+\infty$ (упр. 19a)). Наконец, обозначим через γ_f функцию, обратную к β_f, определенную на интервале $]0, \beta_f(0+)[$ и продолженную 0 вне этого интервала, если $\beta_f(0+)$ конечно.

Для любого $t > 0$ обозначим через M_t множество тех $x \in X$, для которых $\tilde{f}(x) > t$. Показать, что $\mu(M_t) \leqslant K \cdot \gamma_f(t)$. (Пусть для любого $x \in M_t$ через B_x обозначен такой открытый шар с центром x, что $\int_{B_x} f(y)\, d\mu(y) \geqslant t \cdot \mu(B_x)$; применить a) к семейству шаров B_x.)

d) Вывести из c), что

$$\int (\tilde{f}(x))^p\, d\mu(x) \leqslant K \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int (f(x))^p\, d\mu(x).$$

(Заметить, что левая часть записывается также в виде $\int_0^{+\infty} pt^{p-1} (\mu(M_t))\, dt$, и использовать неравенство Харди (упр. 19).)

§ 7. Барицентры

1. Определение барицентров

Пусть E — отделимое локально выпуклое пространство над $\mathbf{R}$, E' — его сопряженное, E'^* — алгебраическое сопряженное пространство E', причем E канонически отождествляется с векторным подпространством пространства E'^*. Пусть K — компактное подмножество из E; поскольку каноническое вложение K в E непрерывно и имеет компактный носитель, то для любой меры μ на K интеграл $\int x d\mu(x)$ определен и является элементом из E'^* (гл. III, § 3, п. 1). Кроме того, топология, индуцированная в K слабой топологией $\sigma(E'^*, E')$, совпадает с исходной топологией. Наконец, если C — замкнутая выпуклая оболочка множества K в E'^*, наделенная топологией $\sigma(E'^*, E')$, то $C \cap E$ есть замкнутая выпуклая оболочка множества K в E относительно исходной топологии (или ослабленной топологии $\sigma(E, E')$.

Определение 1. *Пусть K — компактное подмножество отделимого локально выпуклого пространства E. Для любой положительной меры μ на K с полной массой, равной* 1, *назовем барицентром меры μ вектор $b_\mu = \int x d\mu(x)$ (принадлежащий E'^*).*

Пример. Пусть μ — *дискретная* мера на K, положительная и имеющая полную массу 1; стало быть, она имеет вид $\mu = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varepsilon_{x_i}$, где $x_i \in K$, а λ_i — такие действительные числа, что $\lambda_i \geqslant 0$ для любого i и $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$. Поскольку $\int x d\varepsilon_y(x) = y$ (гл. III, § 3, п. 1, пример 3), то $b_\mu = \int x\, d\mu(x) = \sum_i \lambda_i x_i$. В частности, любое $x \in K$ является барицентром меры ε_x.

Предложение 1. *Пусть E — отделимое локально выпуклое пространство, K — компактное подмножество из E и C — замкнутая выпуклая оболочка множества K в E. Тогда множество C будет состоять из точек пространства E, являющихся барицентрами по крайней мере одной положительной меры на K с массой* 1.

Это есть не что иное, как предложение 5 из главы III, § 3, п. 2, примененное к каноническому вложению K в E.

Следствие. *Если замкнутая выпуклая оболочка C множества K в E компактна, то барицентр любой положительной меры на K с массой 1 принадлежит E.*

В самом деле, в этом случае C является также замкнутой выпуклой оболочкой множества K в E'^*, наделенном слабой топологией $\sigma(E'^*, E')$, и достаточно применить к каноническому вложению K в E предл. 4, гл. III, § 3, п. 2.

Замечание. Следствие из предложения 1 применимо, в частности, когда K выпукло или когда E квазиполно.

Предложение 2. *Пусть K — выпуклое компактное подмножество отделимого локально выпуклого пространства E, μ — положительная мера на K с массой 1 и $\boldsymbol{b}_\mu$ — ее барицентр. Для любой выпуклой числовой функции $f \geqslant 0$, полунепрерывной снизу на K, имеем*

$$f(\boldsymbol{b}_\mu) \leqslant \int^* f\, d\mu.$$

Мы знаем (Топ. вект. пр-ва, гл. II (2-е изд.), § 5, п. 4, предл. 5), что f есть верхняя огибающая семейства сужений на K непрерывных аффинных линейных функций h_α: $x \mapsto c_\alpha + \langle x, z'_\alpha\rangle$. Следовательно,

$$\int h_\alpha(x)\, d\mu(x) \leqslant \int^* f(x)\, d\mu(x)$$

для любого α; но $\int h_\alpha(x)\, d\mu(x) = c_\alpha + \int \langle x, z'_\alpha\rangle\, d\mu(x)$, поскольку μ имеет полную массу 1; а по определению барицентра, $\int \langle x, z'_\alpha\rangle\, d\mu(x) = \langle \boldsymbol{b}_\mu, z'_\alpha\rangle$. Таким образом, $\sup\limits_\alpha \int h_\alpha(x)\, d\mu(x) = \sup\limits_\alpha h_\alpha(\boldsymbol{b}_\mu) = f(\boldsymbol{b}_\mu)$, откуда и получаем требуемое утверждение.

В случае, когда μ — *положительная дискретная мера на K* с полной массой 1, предложение 2 дает неравенство, определяющее выпуклые функции на K.

Следствие. *Для любой выпуклой ограниченной числовой функции g, полунепрерывной снизу на K, $g(b_\mu) \leqslant \int g\, d\mu$.*

Достаточно заметить, что $\inf_{x \in K} g(x) = a$ конечен, и применить к $g - a$ предложение 2.

2. Экстремальные и точки барицентры

Предложение 3. *Пусть K — выпуклое компактное подмножество отделимого локально выпуклого пространства E и x — точка из K. Всякая положительная мера μ на K с полной массой 1, имеющая x в качестве барицентра, есть широкий элемент прикосновения множества дискретных положительных мер с полной массой 1, имеющих x в качестве барицентра.*

Пусть U — окрестность меры μ в широкой топологии; можно предположить, что U состоит из таких мер ν на K, что

$$|\mu(f_i) - \nu(f_i)| \leqslant \delta \tag{1}$$

для конечного числа функций $f_i \in \mathscr{C}(K; \mathbf{C})$ $(1 \leqslant i \leqslant p)$ и некоторого числа $\delta > 0$. Для любого $a \in K$ в E найдется такая замкнутая выпуклая окрестность V_a точки 0, что

$$|f_i(y) - f_i(a)| \leqslant \delta/2 \tag{2}$$

для $1 \leqslant i \leqslant p$ и для любого $y \in W_a = K \cap (a + V_a^\circ)$. В силу компактности K найдется конечное число таких точек a_j $(1 \leqslant j \leqslant r)$ из K, что W_{a_j} образуют покрытие K $(1 \leqslant j \leqslant r)$. Рассмотрим непрерывное разбиение единицы $(g_j)_{1 \leqslant j \leqslant r}$ на K, подчиненное покрытию (W_{a_j}), и положим $\alpha_j = \mu(g_j)$ для любого j; если $\alpha_j \neq 0$, то положим $\mu_j = \alpha_j^{-1} g_j \mu$, а если $\alpha_j = 0$, то положим $\mu_j = \varepsilon_{a_j}$. Каждая из мер μ_j положительна, имеет полную массу 1 и ее носитель содержится в компактном выпуклом множестве W_{a_j}; кроме того, по определению,

$$\mu = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j \mu_j, \tag{3}$$

поскольку $g_j \cdot \mu = 0$, если $\mu(g_j) = 0$; при этом все $\alpha_j \geqslant 0$, и мы имеем

$$\sum_{j=1}^{r} \alpha_j = \sum_{j=1}^{r} \mu(g_j) = \mu\Big(\sum_{j=1}^{r} g_j\Big) = \mu(1) = 1.$$

Пусть x_j — барицентр меры μ_j; он принадлежит W_{a_j} (п. 1, предл. 1); рассмотрим дискретную меру $\nu = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j \varepsilon_{x_j}$; она положительна и имеет полную массу 1, а ее барицентр $\sum_{j=1}^{r} \alpha_j x_j$ является также, в силу (3), барицентром меры μ, и значит, равен x. Кроме того, согласно (2) имеем $|f_i(y) - f_i(a)| \leqslant \delta/2$ для любого $y \in W_{a_j}$ и любого i, откуда, в силу того, что $\operatorname{supp}(\mu_j) \subset W_{a_j}$, получаем $|\mu_j(f_i) - f_i(a_j)| \leqslant \delta/2$ для $1 \leqslant i \leqslant p$. С другой стороны, поскольку $x_j \in W_{a_j}$, то мы имеем также

$$|\varepsilon_{x_j}(f_i) - f_i(a_j)| \leqslant \delta/2$$

для $1 \leqslant i \leqslant p$, откуда $|\mu_j(f_j) - \varepsilon_{x_j}(f_i)| \leqslant \delta$ для любых i, j. Но $\alpha_j \geqslant 0$ и в сумме составляют 1, стало быть, из (3) и из определения ν следует, что ν удовлетворяет неравенству (1).

Следствие. *Пусть K' — такое компактное подмножество из K, что K служит замкнутой выпуклой оболочкой множества K'. Для того чтобы точка $x \in K$ была экстремальной точкой множества K, необходимо и достаточно, чтобы ε_x была единственной положительной мерой на K' с полной массой 1, имеющей x в качестве барицентра.*

Предположим, что x — экстремальная точка множества K; чтобы доказать, что ε_x — единственная положительная мера на K' с полной массой 1, имеющая x в качестве барицентра, достаточно, в силу предложения 3, убедиться в том, что множество *дискретных* положительных мер ν на K' с полной массой 1, имеющих x своим барицентром, сводится к ε_x. Но такая мера ν имеет вид $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \varepsilon_{x_i}$, где $\lambda_i > 0$ для $1 \leqslant i \leqslant r$ и $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i = 1$; предположение о том, что x_i — барицентр меры ν, записывается в виде $x = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i$. А поскольку x — экстремальная точка, то это влечет $x_i = x$ для любого i, откуда $\nu = \varepsilon_x$.

Обратно, предположим, что ε_x — единственная положительная мера на K с полной массой 1, имеющая x своим барицентром,

и покажем, что x — экстремальная точка. Допустим, что это не так; тогда найдутся такие две различные точки x', x'' из K и такое действительное число λ, что $0 < \lambda < 1$ и

$$x = \lambda x' + (1 - \lambda)\, x''.$$

Согласно предложению 1, x' (соотв. x'') есть барицентр положительной меры μ' (соотв. μ'') с полной массой 1 на K'. Тогда x будет барицентром меры $\lambda\mu + (1 - \lambda)\,\mu''$. Стало быть, $\lambda\mu' + (1 - \lambda)\,\mu'' = \varepsilon_x$. Следовательно, μ' и μ'' пропорциональны ε_x, откуда вытекает, что $x' = x'' = x$, что противоречит допущению

Теорема 1 (Шоке). *Пусть E — отделимое локально выпуклое пространство над* $\mathbf{R}$, *K — компактное выпуклое метризуемое подмножество из E и M — множество экстремальных точек множества K. Множество M есть пересечение счетного семейства открытых подмножеств из K, и любая точка из K является барицентром меры μ на K, удовлетворяющей условию $\mu(K - M) = 0$.*

Для доказательства первого утверждения обозначим через I интервал $[0, 1]$ из $\mathbf{R}$; поскольку K компактно и метризуемо, то теми же свойствами обладает и $K \times K \times I$; подмножество U из $K \times K \times I$, состоящее из таких троек (x, y, λ), что $x \neq y$ и $0 < \lambda < 1$, открыто в $K \times K \times I$, и значит, в $K \times K \times I$ найдется последовательность (F_n) замкнутых множеств, объединение которых составляет U (Общая топ., гл. IX (2-е изд.), § 2, п. 5, предл. 7). Отображение $q : K \times K \times I \to K$, определенное как $q(x, y, \lambda) = \lambda x + (1 - \lambda)\, y$, непрерывно и, по определению экстремальных точек, $K - M = q(U) = \bigcup_n q(F_n)$; но F_n компактно, поскольку оно замкнуто в $K \times K \times I$, и значит, $q(F_n)$ тоже компактно, а стало быть, и замкнуто в K; следовательно, множество $U_n = K - q(F_n)$ открыто в K, и мы имеем $M = \bigcap_n U_n$.

На протяжении доказательства мы будем обозначать через u непрерывную *выпуклую* числовую функцию на K, через $G \subset E \times \mathbf{R}$ — график функции u, через S — *замкнутую выпуклую оболочку* множества G в $E \times \mathbf{R}$.

Лемма 1. *Пусть $\bar{u}$ — нижняя огибающая непрерывных линейных аффинных функций на E, которые не меньше u на K. Тогда S*

есть множество таких точек $(a, b) \in E \times \mathbf{R}$, *что*

$$a \in K \text{ и } u(a) \leqslant b \leqslant \bar{u}(a).$$

По теореме Хана — Банаха, для того чтобы (a, b) принадлежала S, необходимо и достаточно, чтобы $h(a, b) \geqslant 0$ для любой непрерывной линейной аффинной функции h на $E \times \mathbf{R}$, такой, что $h(x, u(x)) \geqslant 0$ для $x \in K$. Полагая $h(x, t) = f(x) - \lambda t$, где f — непрерывная линейная аффинная функция на E, видим, что соотношение $(a, b) \in S$ эквивалентно следующему свойству: соотношение

$$f(x) \geqslant \lambda u(x) \text{ для любого } x \in K \tag{4}$$

влечет

$$f(a) \geqslant \lambda b. \tag{5}$$

Прежде всего возьмем $\lambda = 0$; тот факт, что (4) влечет (5) для любой непрерывной линейной аффинной функции f на E, эквивалентен, в силу теоремы Хана — Банаха, соотношению $a \in K$. Затем возьмем $\lambda = -1$ и заменим f на $-f$; тогда из соотношения $f(x) \leqslant u(x)$ на K должно следовать $f(a) \leqslant b$. Но u выпукла и непрерывна на K, и поэтому $u(a)$ равно верхней грани значений $f(a)$ для непрерывных линейных аффинных функций f на E, удовлетворяющих условию $f(x) \leqslant u(x)$ на K (Топ. вект. пр-ва, гл. II (2-е изд.), § 5, п. 3, следствие 6 из предл. 4); таким образом, получаем соотношение $b \geqslant u(a)$. Наконец, возьмем $\lambda = 1$; тогда утверждение, что (4) влечет (5) означает, по определению, что $b \leqslant \bar{u}(a)$. Этим лемма доказана, ибо соотношение (4) (соотв. (5)) эквивалентно тому, которое получается умножением обеих частей на скаляр > 0.

Лемма 2. *Если* u — *строго выпуклая функция на* K, *то* $u(x) < \bar{u}(x)$ *для любой точки* x *из* K, *не являющейся экстремальной точкой.*

В самом деле, тогда в K найдутся такие две различные точки y, z, что $x = (y + z)/2$, откуда $u(x) < (u(y) + u(z))/2$, поскольку u строго выпукла. Если f — линейная аффинная функция на E, то $f(x) = (f(y) + f(z))/2$; применяя это соотношение к непрерывным линейным аффинным функциям f, большим или равным u на K, получаем

$$\bar{u}(x) \geqslant (\bar{u}(y) + \bar{u}(z))/2 \geqslant (u(y) + u(z))/2 > u(x).$$

После того как установлены эти леммы, мы, следовательно (лемма 1), для любого $a \in K$ имеем $(a, \overline{u}(a)) \in S$. А поскольку G, как образ K при непрерывном отображении $x \mapsto (x, u(x))$, компактно, то в силу предложения 1, п. 1 существует положительная мера ν на G с полной массой 1, имеющая $(a, \overline{u}(a))$ в качестве барицентра. Поскольку сужение на G проекции pr_1 есть гомеоморфизм G на K, то мера ν может быть подвергнута этому гомеоморфизму, что даст нам меру μ на K (положительную и с полной массой 1), такую, что

$$a = \int x \, d\mu(x) \quad \text{и} \quad \overline{u}(a) = \int u(x) \, d\mu(x). \tag{6}$$

Первое из соотношений (6) означает, что a есть барицентр меры μ. Функция $\overline{u}$ полунепрерывна сверху и ограничена на K, и значит, μ-интегрируема (§ 4, п. 4, следствие 1 из предл. 5); далее, так как функция $-\overline{u}$ по определению выпукла то в силу следствия из предложения 2, п. 1 имеем

$$\overline{u}(a) \geqslant \int \overline{u}(x) \, d\mu(x), \tag{7}$$

откуда сравнивая это со второй формулой (6), получаем

$$\int u(x) \, d\mu(x) \geqslant \int \overline{u}(x) \, d\mu(x). \tag{8}$$

Но $u(x) \leqslant \overline{u}(x)$ на K, и значит, из (8) следует, что $u(x) = \overline{u}(x)$ *почти всюду относительно* μ. Принимая во внимание лемму 2, видим, что теорема 1 будет доказана, как только будет установлена следующая лемма.

Лемма 3. *Пусть E — отделимое локально выпуклое пространство над* $\mathbf{R}$ *и K — выпуклое компактное метризуемое подмножество из E. Тогда существует строго выпуклая числовая функция на K.*

В самом деле, банахово пространство $\mathscr{C}(K; \mathbf{R})$ есть пространство счетного типа (Общая топ., гл. X (2-е изд.), § 3, п. 3, теорема 1), и значит, то же самое верно и для подпространства $\mathscr{A}$ из $\mathscr{C}(K; \mathbf{R})$, состоящего из сужений на K *непрерывных линейных аффинных функций на* E. Итак, пусть (h_n) — всюду плотная в $\mathscr{A}$ последовательность и пусть $\alpha_n > \sup_{x \in K} |h_n(x)|$. Тогда каждая из функций $h_n^2/n^2\alpha_n^2$ выпукла на K (Топ. вект. пр-ва, гл. II (2-е изд.), § 2, п. 8, примеры), и ряд с общим членом $h_n^2/n^2\alpha_n^2$ нормально сходит-

ся, и стало быть, его сумма u непрерывна и выпукла на K. Остается показать, что u строго выпукла, а для этого достаточно доказать, что для различных двух точек x, x' из K найдется такое целое n, что сужение функций h_n^2 на отрезок с концами x, x' строго выпукло; но для этого достаточно, чтобы $h_n(x) \neq h_n(x')$ (там же). Но, как известно, существует такая функция $h \in \mathscr{A}$, что $h(x) \neq h(x')$ (Топ. векст. пр-ва, гл. II (2-е изд.), § 4, п. 1, следствие 1 из предл. 2), а поскольку последовательность (h_n) плотна в $\mathscr{A}$, то найдется такое n, что $h_n(x) \neq h_n(x')$.

Следствие. *Пусть E — отделимое локально выпуклое пространство над* $\mathbf{R}$, *C — выступающий выпуклый конус в E с вершиной* 0, *полный и метризуемый относительно равномерной структуры, индуцируемо ослабленной равномерной структурой пространства E. И пусть M — объединение экстремальных образующих конуса C. Тогда для любого $x \in C$ найдутся такое компактное подмножество K из C и такая мера $\lambda \geqslant 0$ на K с массой* 1, *что K — $(M \cap K)$ λ-пренебрежимо и что барицентр меры λ равен x.*

В самом деле, x принадлежит шапочке конуса C (Топ. векст. пр-ва, гл. II (2-е изд.), § 7, п. 2, предл. 5) и $M \cap K$ содержит множество экстремальных точек множества K (там же, следствие 1 из предл. 4). Достаточно, стало быть, применить теорему 1.

3. *Приложения: I. Векторные пространства непрерывных действительных функций*

Пусть X — непустое компактное пространство и $\mathscr{H}$ — векторное подпространство банахова пространства $\mathscr{C}(X; \mathbf{R})$, которое содержит константы и *отделяет* точки из X (Общая топ., гл. X (2-е изд.), § 4, п. 1, опр. 1). Наделим $\mathscr{H}$ топологией нормированного пространства, индуцируемой топологией из $\mathscr{C}(X; \mathbf{R})$, и обозначим через $\mathscr{H}'$ *сопряженное* к этому нормированному пространству. Для любого $x \in X$ отображение $f \mapsto f(x)$ есть непрерывная линейная форма на $\mathscr{H}$ (сужение на $\mathscr{H}$ меры Дирака ε_x), а значит, является элементом из $\mathscr{H}'$, который мы обозначим $i_{\mathscr{H}}(x)$, и тогда

$$\langle f,\ i_{\mathscr{H}}(x) \rangle = f(x) \tag{9}$$

для любой функции $f \in \mathscr{H}$ и любого $x \in X$.

Отображение $i_{\mathscr{H}}$ пространства X в $\mathscr{H}'$ *инъективно* и *непрерывно*, если наделить $\mathscr{H}'$ слабой топологией $\sigma(\mathscr{H}', \mathscr{H})$; второе утверждение следует сразу же из определений и из (9); что же касается первого, то мы отметим, что если x и x' — различные точки из X, то по условию существует такая функция $h \in \mathscr{H}$, что $h(x) \neq h(x')$, и значит, на основании (9) $\langle h, i_{\mathscr{H}}(x)\rangle \neq \langle h, i_{\mathscr{H}}(x')\rangle$ и тем более $i_{\mathscr{H}}(x) \neq i_{\mathscr{H}}(x')$. Стало быть, образ $i_{\mathscr{H}}(X)$ есть *компактное* подмножество из $\mathscr{H}'$ (в слабой топологии), и $i_{\mathscr{H}}$ есть *гомеоморфизм* X на $i_{\mathscr{H}}(X)$.

Предложение 4. (i) *Замкнутая выпуклая оболочка C множества $i_{\mathscr{H}}(X)$ в $\mathscr{H}'$ (относительно слабой топологии $\sigma(\mathscr{H}', \mathscr{H})$) компактна.*

(ii) *Для того чтобы точка $i_{\mathscr{H}}(x)$ была экстремальной точкой множества C, необходимо и достаточно, чтобы единственная положительная мера λ на X, удовлетворяющая условию*

$$h(x) = \int h\,d\lambda \tag{10}$$

для любой функции $h \in \mathscr{H}$ (откуда, в частности, следует, что λ имеет полную массу 1, поскольку $1 \in \mathscr{H}$), *была мерой Дирака ε_x.*

Функция $z' \mapsto \langle h, z'\rangle$ на C достигает своей верхней грани по крайней мере в одной экстремальной точке множества C (Топ. вект. пр-ва, гл. II (2-е изд.), § 7, п. 1, предл. 1), и эта точка принадлежит $i_{\mathscr{H}}(X)$ (там же, следствие из предл. 2).

(i) Согласно (9) имеем $\|i_{\mathscr{H}}(x)\| \leqslant 1$ в нормированном пространстве $\mathscr{H}'$; иными словами, $i_{\mathscr{H}}(X)$ ограничено, и утверждение вытекает из того, что $\mathscr{H}'$, наделенное слабой топологией $\sigma(\mathscr{H}', \mathscr{H})$, *квазиполно* (Топ. вект. пр-ва, гл. IV, § 2, п. 2, следствие 2 из теоремы 1).

(ii) Всякая положительная мера μ массы 1 на $i_{\mathscr{H}}(X)$ получается переносом структуры посредством гомеоморфизма $i_{\mathscr{H}}$ из положительной меры λ массы 1 на X; при этом мера Дирака $\varepsilon_{i_{\mathscr{H}}(x)}$ получается из ε_x. Утверждение, что μ имеет $i_{\mathscr{H}}(x)$ в качестве барицентра, означает, по определению, что

$$\int_X \langle h, i_{\mathscr{H}}(z)\rangle\, d\lambda(z) = \langle h, i_{\mathscr{H}}(x)\rangle$$

для любой функции $h \in \mathscr{H}$. Если учесть (9), то утверждение (ii) есть не что иное, как переформулирование критерия из п. 2 (следствие из предложения 3), чтобы $i_{\mathscr{H}}(x)$ была экстремальной точкой множества C.

Будем говорить, что точка $x \in X$, удовлетворяющая условию (ii) предложения 4, есть *H-экстремальная точка*; мы будем обозначать множество этих точек $\mathrm{Ch}_{\mathscr{H}}(X)$ (или просто $\mathrm{Ch}(X)$), а *замыкание* этого множества в X — через $\check{S}_{\mathscr{H}}(X)$ (или просто $\check{S}(X)$).

Предложение 5. *Всякая функция $h \in \mathscr{H}$ достигает своей верхней грани по крайней мере в одной $\mathscr{H}$-экстремальной точке.*

Пусть x — точка из X и h — функция из $\mathscr{H}$. Соотношение $h(z) \leqslant h(x)$ для любого $z \in X$ записывается в виде $\langle h, i_{\mathscr{H}}(z)\rangle \leqslant \langle h, i_{\mathscr{H}}(x)\rangle$ для любого $z \in X$ и означает, стало быть, что слабо замкнутая гиперплоскость из $\mathscr{H}'$ с уравнением $\langle h, t'\rangle = \langle h, i_{\mathscr{H}}(x)\rangle$ есть *опорная гиперплоскость* множества $i_{\mathscr{H}}(X)$. Известно (Топ. векг. пр-ва, гл. II (2-е изд.), § 7, п. 1, следствие 1 из предл. 1), что такая гиперплоскость содержит по крайней мере одну экстремальную точку множества $i_{\mathscr{H}}(X)$, и такая точка $i_{\mathscr{H}}(y)$ по определению служит образом $\mathscr{H}$-экстремальной точки y; следовательно, $h(y)$ равно верхней грани функции h на X.

Предложение 6. *Для любой точки $x \in X$ следующие свойства эквивалентны:*

a) *x есть $\mathscr{H}$-экстремальная точка.*

b) *Для любой открытой окрестности U точки x в X и любого $\varepsilon > 0$ в $\mathscr{H}$ найдется такая функция $h \geqslant 0$, что $h(x) \leqslant \varepsilon$ и $h(y) \geqslant 1$ для любого $y \in X - U$.*

Пусть x — произвольная точка из X и f — функция из $\mathscr{C}(X; \mathbf{R})$; известно (Топ. векг. пр-ва, гл. II (2-е изд.), § 3, п. 1, предл. 1), что нижняя грань чисел $\lambda(f)$ для всех положительных мер на X, таких, что $\lambda(h) = h(x)$ при любой функции $h \in \mathscr{H}$, равна верхней грани чисел $h(x)$, где h пробегает множество функций $h \in \mathscr{H}$, удовлетворяющих неравенству $h \leqslant f$. Предположим, что x $\mathscr{H}$-экстремальна; тогда из предложения 4, (ii) вытекает, что

для любой функции $f \in \mathscr{C}(X; \mathbf{R})$

$$f(x) = \sup_{h \in \mathscr{H},\, h \leqslant f} h(x). \tag{11}$$

Чтобы показать, что a) влечет b), возьмем в качестве f непрерывное отображение X в $[0, 1]$, имеющее носитель в U и такое, что $f(x) = 1$; стало быть, согласно (11), найдется такая функция $h' \in \mathscr{H}$, что $h' \leqslant f$ и $h'(x) \geqslant 1 - \varepsilon$. А поскольку $1 \in \mathscr{H}$, то функция $h = 1 - h'$ удовлетворяет условиям из b).

Обратно, допустим, что выполнено b); отсюда следует, что $1 - h \leqslant \varphi_U$; значит, для любой положительной меры λ на X, удовлетворяющей условию (7), имеем

$$\lambda(U) = \lambda(\varphi_U) \geqslant \lambda(1-h) = 1-h(x) \geqslant 1 - \varepsilon.$$

Но по условию это соотношение имеет место для любого $\varepsilon > 0$ и любой открытой окрестности U точки x; поэтому

$$\lambda(\{x\}) = \inf_U \lambda(U) \geqslant 1 - \varepsilon$$

для любого $\varepsilon > 0$, и стало быть, $\lambda(\{x\}) = 1$. А так как λ положительна и имеет полную массу 1, то обязательно $\lambda = \varepsilon_x$, чем и доказано, согласно предложению 4, (ii), что x $\mathscr{H}$-экстремальна.

Предложение 7. *Пусть F — замкнутое подмножество из X. Следующие свойства эквивалентны:*

a) *F содержит $\check{S}_{\mathscr{H}}(X)$.*

b) *Для любой функции $h \in \mathscr{H}$ множество F пересекается с множеством точек из X, на которых h достигает своей верхней грани.*

c) *Для любой точки $x \in X$ существует такая положительная мера на X с массой 1, что $\operatorname{supp}(\mu) \subset F$ и $h(x) = \int h\, d\mu$ для любой функции $h \in \mathscr{H}$.*

Пусть $G = i_{\mathscr{H}}(F)$. Условие a) означает, что G содержит множество экстремальных точек множества C. Условие b) означает, что G пересекает пересечение $i_{\mathscr{H}}(X)$ с каждой из замкнутых опорных гиперплоскостей множества $i_{\mathscr{H}}(X)$. Наконец, условие c) означает, что любая точка из $i_{\mathscr{H}}(X)$ есть барицентр некоторой меры с носителем, содержащимся в G; в силу предложения 1, п. 1 это эквивалентно также утверждению, что замкнутая выпуклая оболочка

множества $i_{\mathscr{H}}(X)$ равна замкнутой выпуклой оболочке множества G.

Таким образом, эквивалентность условий a), b) и c) следует из (Топ. вект. пр-ва, гл. II (2-е изд.), § 7, п. 1, следствие 2 из предл. 2).

Предложение 8. *Предположим, что X метризуемо. Тогда множество $\mathrm{Ch}_{\mathscr{H}}(X)$ $\mathscr{H}$-экстремальных точек X есть пересечение счетного семейства открытых множеств в X, и для любого $x \in X$ существует такая положительная мера μ с массой 1 на X, что*

$$\mu(X - \mathrm{Ch}_{\mathscr{H}}(X)) = 0 \text{ и } \int h\, d\mu = h(x)$$

для любого $h \in \mathscr{H}$.

Это есть переформулирование теоремы 1, п. 2 посредством переноса структуры при помощи гомеоморфизма $x \mapsto i_{\mathscr{H}}(x)$, как и в предложении 5.

Некоторые результаты этого пункта распространяются на случай, когда $\mathscr{H}$ заменяется множеством $\mathscr{P}$ функций, определенных на X, принимающих значения в $\mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ и полунепрерывных снизу, причем $\mathscr{P}$ предполагается содержащим константы и таким, что $\mathscr{P} + \mathscr{P} \subset \mathscr{P}$ (упр. 2).

*Пример. Возьмем в качестве X единичный шар $\|x\| \leqslant 1$ в $\mathbf{R}^3$ и пусть $\mathscr{H}$ есть векторное пространство непрерывных функций на X, содержащее сужения на X аффинных линейных функций на $\mathbf{R}^3$ и удовлетворяющее «*принципу максимума*», т. е. для любой отличной от постоянной функции $h \in H$ множество точек из X, на которых h достигает своей верхней грани, содержится в сфере S_2. Тогда из предложений 5 и 7 легко следует, что $\mathrm{Ch}_{\mathscr{H}}(X) = \check{S}_{\mathscr{H}}(X) = S_2$. Важным примером векторного пространства $\mathscr{H}$, удовлетворяющего сформулированным выше условиям, является множество функций, непрерывных на X и *гармонических* на открытом шаре $\|x\| < 1$. Для этих функций доказывается, что положительная мера μ с массой 1, такая, что $\mathrm{supp}(\mu) \subset S_2$ и $h(x) = \int h\, d\mu$ для любого $h \in \mathscr{H}$, задается при $\|x\| < 1$ формулой Пуассона

$$d\mu(z) = \frac{1 - \|z\|^2}{\|z - x\|^3}\, d\sigma(z),$$

где σ — мера на S_2, инвариантная относительно ортогональной группы и такая, что $\sigma(S_2) = 1$ (гл. VII, § 3, упр. 8).*

4. *Приложения: II. Векторные пространства непрерывных комплексных функций*

Пусть X — непустое компактное пространство и $\mathscr{H}$ — векторное подпространство комплексного банахова пространства $\mathscr{C}(X; \mathbf{C})$, содержащее константы и отделяющее точки из X. Множество действительных частей $\mathrm{Re}(f)$ функций $f \in \mathscr{H}$ есть векторное подпространство $\mathscr{H}_r$ действительного векторного пространства $\mathscr{C}(X; \mathbf{R})$; для любой функции $f \in \mathscr{H}$ множество $\mathscr{H}_r$ содержит также $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Re}(-if)$; отсюда следует, что $\mathscr{H}_r$ *отделяет* точки из X, поскольку соотношение $h(x) = h(y)$ для любого $h \in \mathscr{H}_r$ влечет $\mathrm{Re}(f(x)) = \mathrm{Re}(f(y))$ и $\mathrm{Im}(f(x)) = \mathrm{Im}(f(y))$, а значит, $f(x) = f(y)$ для любого $f \in \mathscr{H}$. $\mathscr{H}_r$-экстремальные точки из X называются также *$\mathscr{H}$-экстремальными*, и их множество обозначается $\mathrm{Ch}_{\mathscr{H}}(X)$, а его замыкание обозначается $\check{S}_{\mathscr{H}}(X)$. Аналогами предложений 5 и 7 являются следующие предложения.

Предложение 9. *Для любой функции $f \in \mathscr{H}$ множество $\mathrm{Ch}_{\mathscr{H}}(X)$ пересекается с множеством точек, на которых $|f|$ достигает своей верхней грани.*

Можно ограничиться случаем, когда f отлична от константы 0. Пусть a — точка из X, в которой $|f|$ достигает своей верхней грани, и пусть $g = f/f(a)$; имеем $g(a) = 1$ и $|g(x)| \leqslant 1$ для любого $x \in X$, откуда $\mathrm{Re}(g(a)) = 1$ и $\mathrm{Re}(g(x)) \leqslant 1$ для любого $x \in X$. На основании предложения 5, п. 3, примененного к $\mathscr{H}_r$, существует точка $b \in \mathrm{Ch}_{\mathscr{H}}(X)$, в которой $\mathrm{Re}(g(x))$ достигает своей верхней грани 1, откуда $|g(b)| = 1$, поскольку $|g(b)| \leqslant 1$; отсюда заключаем, что $|f(b)| = |f(a)| \geqslant |f(x)|$ для любого $x \in X$.

Предложение 10. *Пусть F — замкнутое подмножество из X. Следующие свойства эквивалентны:*

a) *F содержит $\check{S}_{\mathscr{H}}(X)$.*

b) *Для любой функции $f \in \mathscr{H}$ множество F пересекается с множеством точек из X, на которых $|f|$ достигает своей верхней грани.*

c) *Для любой точки* $x \in X$ *существует такая положительная мера на* X *с полной массой* 1, *что* $\operatorname{supp}(\mu) \subset F$ *и что* $f(x) = \int f d\mu$ *для любой функции* $f \in \mathscr{H}$.

Докажем эквивалентность условий a) и c): пусть $f = f_1 + if_2$ с f_1, f_2 из $\mathscr{H}_r$; соотношение $f(x) = \int f d\mu$ эквивалентно двум соотношениям: $f_1(x) = \int f_1 d\mu$ и $f_2(x) = \int f_2 d\mu$; значит, достаточно применить к $\mathscr{H}_r$ эквивалентность условий a) и c) предложения 7, п. 3. Тот факт, что a) влечет b), вытекает из предложения 9. Покажем, что b) влечет a); речь идет о том, чтобы показать, что если b) выполнено, то для любого $h \in \mathscr{H}_r$ множество F пересекается с множеством точек, на которых h достигает своей нижней грани на X. Условие b) влечет, что F не пусто; а поскольку F компактно, то найдется такое $a \in F$, что $h(a) \leqslant h(y)$ для любого $y \in F$. Пусть функция $f \in \mathscr{H}$ такова, что $h = \operatorname{Re}(f)$; для любого $\varepsilon > 0$ функция $g = f - h(a) + \varepsilon$ принадлежит $\mathscr{H}$, и мы имеем

$$\operatorname{Re}(g(y)) = h(y) - h(a) + \varepsilon \geqslant \varepsilon$$

для любого $y \in F$. Обозначим через c верхнюю грань функции $|g|$ на X и положим $b = c^2/2\varepsilon$; для любого $y \in F$ имеем

$$|g(y) - b|^2 = |g(y)|^2 - 2b \operatorname{Re}(g(y)) + b^2 \leqslant$$
$$\leqslant c^2 - 2b\varepsilon + b^2 = b^2;$$

иными словами, верхняя грань на F функции $|g - b|$ будет $\leqslant b$. А поскольку $g - b \in \mathscr{H}$, то в силу сделанного предположения относительно F получаем $|g - b| \leqslant b$, откуда

$$b^2 \geqslant |g - b|^2 = |g|^2 - 2b \operatorname{Re}(g) + b^2,$$

и следовательно, $\operatorname{Re}(g) \geqslant |g|^2/2b \geqslant 0$; но $\operatorname{Re}(g) = h - h(a) + \varepsilon$, а $\varepsilon > 0$ произвольно, поэтому $h \geqslant h(a)$, и стало быть, $h(a)$ есть нижняя грань функции h на X, чем и завершается доказательство.

Замечание. Если f — непрерывная *действительная* функция, то точка, в которой $|f|$ достигает своей верхней грани, есть точка, в которой достигает своей верхней грани одна из

функций f и $-f$. Следовательно, для векторного пространства $\mathscr{H}$ непрерывных *действительных* функций, удовлетворяющих условиям п. 3, предложения 9 и 10 являются тривиальными следствиями соответственно предложений 5 и 7.

5. *Приложения: III. Алгебры непрерывных функций*

Лемма 4. *Пусть X — компактное пространство и $\mathscr{H}$ — замкнутое векторное подпространство банахова пространства $\mathscr{C}(X; \mathbf{C})$ (соотв. $\mathscr{C}(X; \mathbf{R})$). Пусть, далее, a — точка из X, обладающая счетной фундаментальной системой окрестностей; предположим, что для любых чисел c и d, таких, что $0 < c < d < 1$, и любой открытой окрестности U точки a существует такая функция $f \in \mathscr{H}$, что*

$$|f| \leqslant 1, \quad |f(a)| \geqslant d, \quad |f(x)| \leqslant c \text{ для любого } x \in X - U. \tag{12}$$

Тогда существует такая функция $u \in \mathscr{H}$, что $|u(x)| < |u(a)|$ для любого $x \neq a$.

Пусть (V_n) $(n \geqslant 1)$ — фундаментальная система окрестностей точки a и пусть λ, μ, ε — такие числа что

$$0 < \lambda < 1, \quad 1 < \mu < \mu + \varepsilon \leqslant 1 + \lambda.$$

Таким образом, $0 < \lambda/\mu < 1/\mu < 1$. Индукцией по n $(n \geqslant 1)$ мы определим такую убывающую последовательность (U_n) открытых окрестностей точки a, что $U_n \subset V_n$ для любого n, и последовательность (h_n) функций из $\mathscr{H}$, удовлетворяющую соотношениям:

$$|h_n(x)| \leqslant \mu \text{ для любого } x \in X, \tag{13$_n$}$$

$$h_n(a) = 1, \tag{14$_n$}$$

$$|h_n(x)| \leqslant \lambda \text{ для любого } x \in X - U_n, \tag{15$_n$}$$

$$\Big|\sum_{j=1}^{n} \lambda^j h_j(y)\Big| < \sum_{j=1}^{n+1} \lambda^j \text{ для любого } y \in X. \tag{16$_n$}$$

Предположим, что h_m и U_m определены для $1 \leqslant m < n$ и удовлетворяют предыдущим четырем условиям (где n заменяется на m); положим также $U_0 = X$. Функция $\sum_{j=1}^{n-1} \lambda^j h_j$ (равная 0 при $n = 1$) непрерывна и принимает в точке a значение $\sum_{j=1}^{n-1} \lambda^j$; значит, найдется открытая окрестность U_n точки a, содержащаяся в $U_{n-1} \cap V_n$

и такая, что

$$|\sum_{j=1}^{n-1}\lambda^j h_j(y)|<\sum_{j=1}^{n-1}\lambda^j+\varepsilon\lambda^n \text{ для любого } y\in U_n. \qquad (17)$$

По условию, существует такая функция $f\in\mathscr{B}$, что

$$|f(x)|\leqslant 1 \text{ для любого } x\in X, \qquad |f(a)|\geqslant 1/\mu,$$
$$|f(x)|\leqslant\lambda/\mu \text{ для } x\in X-U_n.$$

Положим $h_n=f/f(a)$; для h_n выполняются соотношения (13_n), (14_n) и (15_n); положим

$$g=\sum_{j=1}^{n}\lambda^j h_j=\sum_{j=1}^{n-1}\lambda^j h_j+\lambda^n h_n.$$

В силу (17) и (13_n) для любого $y\in U_n$ имеем

$$|g(y)|<\sum_{j=1}^{n-1}\lambda^j+\varepsilon\lambda^n+\mu\lambda^n\leqslant\sum_{j=1}^{n+1}\lambda^j,$$

поскольку $\varepsilon+\mu\leqslant 1+\lambda$; для $x\in X-U_n$ имеем $|h_p(x)|\leqslant\lambda$ для $1\leqslant p\leqslant n$, откуда снова

$$|g(x)|\leqslant\sum_{j=2}^{n+1}\lambda^j<\sum_{j=1}^{n+1}\lambda^j,$$

чем и завершается доказательство (16_n).

Таким образом, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^n h_n$ нормально сходится на X, так как $\lambda<1$ и $|h_n(x)|\leqslant\mu$ для любого n и любого $x\in X$; пусть u — его сумма; она принадлежит $\mathscr{B}$, ибо $\mathscr{B}$ замкнуто. Из соотношения (14_n) получаем $u(a)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^n$; с другой стороны, если $x\neq a$, то найдется такое целое n, что $x\notin U_{n+1}$; стало быть, в силу (15_n) $|h_{n+k}(x)|\leqslant\lambda$ для любого $k\geqslant 1$; отсюда, используя (16_n), получаем:

$$|u(x)|\leqslant|\sum_{j=1}^{n}\lambda^j h_j(x)|+|\sum_{j=n+1}^{\infty}\lambda^j h_j(x)|<$$
$$<\sum_{j=1}^{n+1}\lambda^j+\lambda\sum_{j=n+1}^{\infty}\lambda^j=\sum_{j=1}^{\infty}\lambda^j=|u(a)|.$$

Теорема 2 (Е. Бишоп). *Пусть X — компактное пространство и $\mathscr{A}$ — замкнутая подалгебра комплексной банаховой алгебры*

$\mathscr{C}(X; \mathbf{C})$. *Предположим, что* $\mathscr{A}$ *содержит константы и отделяет точки из* X. *Пусть* a — *точка из* X; *следующие условия эквивалентны:*

a) *Существует такая функция* $f \in \mathscr{A}$, *что* $|f(x)| < |f(a)|$ *для любого* $x \neq a$.

b) *Точка* a $\mathscr{A}$*-экстремальна и обладает счетной фундаментальной системой окрестностей.*

a) $\Rightarrow$ b): Пусть $f \in \mathscr{A}$ такова, что $|f(a)| > |f(x)|$ для $x \neq a$; в силу предложения 9, п. 4 точка a $\mathscr{A}$-экстремальна. С другой стороны, если U_n — множество тех $x \in X$, в которых $|f(x)| > |f(a)| - 1/n$, то U_n есть открытая окрестность точки a, и пересечение множеств U_n сводится к a; а поскольку X компактно, U_n образуют фундаментальную систему окрестностей точки a (Общая топ., гл. I (3-е изд.), § 9, п. 1, теорема 1).

b) $\Rightarrow$ a): Достаточно убедиться в том, что b) влечет выполнение условий леммы 4. Положим, в обозначениях этой леммы, $\varepsilon = \log d/\log c$; имеем $0 < \varepsilon < 1$. Поскольку точка a $\mathscr{A}_\tau$-экстремальна, то существует такая функция $g \in \mathscr{A}$, что

$$\mathrm{Re}\,(g) \geqslant 0, \quad \mathrm{Re}\,(g(a)) \leqslant \varepsilon, \quad \mathrm{Re}\,(g(x)) \geqslant 1 \quad \text{для } x \in X - U$$

(п. 3, предл. 6b)). Положим $f = c^g$; так как f есть сумма нормально сходящегося ряда $\sum_{n=0}^{\infty} (\log c)^n g^n/n!$, то $f \in \mathscr{A}$ и $|f| \leqslant 1$, $|f(a)| \geqslant c^\varepsilon = d$, $|f(x)| \leqslant c$ для $x \in X - U$.

Следствие. *Предположим дополнительно, что* X *метризуемо. Тогда следующие свойства эквивалентны:*

a) a *есть* $\mathscr{A}$*-экстремальная точка из* X.

b) *Существует такая функция* $u \in \mathscr{A}$, *что* $|u(x)| < |u(a)|$ *для любого* $x \neq a$.

c) *Пусть* $\mathfrak{M}$ — *множество таких подмножеств* M *из* X, *что* $|f|$ *для любой функции* $f \in \mathscr{A}$ *достигает своей верхней грани на* X *по крайней мере в одной точке из* M. *Тогда* a *принадлежит всем множествам* $M \in \mathfrak{M}$.

d) *Пусть* $\mathfrak{N}$ — *множество таких подмножеств* N *из* X, *что* $\mathrm{Re}\,(f)$ *для любой функции* $f \in \mathscr{A}$ *достигает своей верхней грани на* X *по крайней мере в одной точке из* N. *Тогда* a *принадлежит всем множествам* $N \in \mathfrak{N}$.

Иначе говоря,

$$\mathrm{Ch}_{\mathscr{A}}(X) = \bigcap_{M \in \mathfrak{M}} M = \bigcap_{N \in \mathfrak{N}} N. \tag{18}$$

Поскольку в метризуемом пространстве каждая точка обладает счетной фундаментальной системой окрестностей, то эквивалентность a) и b) вытекает из теоремы 2. Покажем, что b) влечет c): в самом деле, a — единственная точка, в которой $|u|$ достигает своей верхней грани; с другой стороны, c) влечет a), ибо $\mathrm{Ch}_{\mathscr{A}}(X)$ пересекается, для любой $f \in \mathscr{A}$, с множеством точек, в которых $|f|$ достигает своей верхней грани (п. 4, предл. 9). То же рассуждение с использованием предложения 5, п. 3, показывает, что d) влечет a). Наконец, чтобы показать, что b) влечет d), можно ограничиться случаем, когда X не сводится к точке a, а значит, $u(a) \neq 0$; тогда функция $v = u/u(a)$ принадлежит $\mathscr{A}$, и $v(a) = 1$ и $|v(x)| < 1$ для $x \neq a$, откуда $\mathrm{Re}(v(a)) = 1$ и $\mathrm{Re}(v(x)) < 1$ для $x \neq a$. Но так как функция $\mathrm{Re}(v)$ достигает своей верхней грани только в одной точке a, то $a \in N$ для любого $N \in \mathfrak{N}$.

*Примеры. Пусть X_1 — множество таких точек $(z_1, z_2) \in \mathbf{C}^2$, что $|z_1|^2 + |z_2|^2 \leqslant 1$ (единичный шар в $\mathbf{R}^4$), и пусть $\mathscr{A}'_1$ — множество сужений на X_1 голоморфных функций со значениями в $\mathbf{C}$, определенных в некоторой окрестности множества X_1 в $\mathbf{C}^2$ (окрестности, зависящей от рассматриваемой функции); пусть $\mathscr{A}_1$ — замыкание множества $\mathscr{A}'_1$ в $\mathscr{C}(X_1; \mathbf{C})$, которое, очевидно, является замкнутой комплексной подалгеброй алгебры $\mathscr{C}(X_1; \mathbf{C})$ и отделяет точки из X_1. Применение «принципа максимума» для голоморфных функций показывает, что $\mathrm{Ch}_{A_1}(X_1)$ есть сфера $\mathbf{S}_3$.

Заменим в предыдущем определении X_1 на «полидиск» X_2, определенный соотношениями $|z_1| \leqslant 1$ и $|z_2| \leqslant 1$, что дает нам подалгебры $\mathscr{A}'_2$ и $\mathscr{A}_2$ (замыкание $\mathscr{A}'_2$) в $\mathscr{C}(X_2; \mathbf{C})$. Здесь принцип максимума показывает, что $\mathrm{Ch}_{\mathscr{A}_2}(X_2)$ есть «тор», определяемый соотношениями $|z_1| = 1$ и $|z_2| = 1$.

Из этих результатов выводим, что не существует *аналитического изоморфизма* открытой окрестности множества X_1 на открытую окрестность множества X_2, *преобразующего* X_1 *в* X_2; в самом деле, если бы v было сужением на X_1 такого отображения, то мы имели бы $\mathscr{A}_2 = v\mathscr{A}_1 v^{-1}$, и значит, v переводило бы $\mathbf{S}_3$ в пространство, гомеоморфное $\mathbf{T}^2$, что невозможно, ибо $\mathbf{S}_3$ односвязно, а $\mathbf{T}^2$ — нет. Отметим, однако, что пространства X_1 и X_2 *гомеоморфны*, будучи оба ограниченными выпуклыми множествами в $\mathbf{R}^4$, имеющими внутренние точки. *

6. *Единственность интегральных представлений*

Пусть E — отделимое локально выпуклое пространство с ослабленной топологией и C — заостренный выступающий выпуклый конус в E. Известно, что C есть множество элементов $\geqslant 0$ из E относительно отношения порядка, согласующегося с векторной структурой пространства E. Когда мы будем говорить, что C — решетка, то речь будет идти, разумеется, о порядке, индуцируемом на C порядком из E.

Лемма 5. *Предположим, что C слабо компактно. Пусть $\mathscr{A}$ — множество сужений на C непрерывных линейных форм на E. И пусть $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ — конечное семейство элементов из $\mathscr{A}$ и $f = \sup(f_\lambda)$. Для любого $x \in C$ положим*

$$\overline{f}(x) = \sup(f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)),$$

где верхняя грань берется по множеству S_x таких последовательностей $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ элементов из C, что $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = x$. Положим $\operatorname{Card}\Lambda = p$. *Тогда найдутся такие $(y_1, \ldots, y_p) \in S_x$, что $\overline{f}(x) = f(y_1) + \ldots + f(y_p)$.*

Обозначим через $f_1, f_2, \ldots, f_p$ элементы семейства (f_λ), а через C_k для $k = 1, 2, \ldots, p$ — множество тех $y \in C$, для которых $f_1(y) < f(y)$, $f_2(y) < f(y)$, $\ldots$, $f_{k-1}(y) < f(y)$, $f_k(y) = f(y)$. Множества C_k являются непересекающимися выпуклыми конусами, объединение которых равно C. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — такие точки из C, что $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = x$. И пусть y_k — сумма тех x_i, которые принадлежат C_k. Имеем $y_1 + y_2 + \ldots + y_p = x$. Поскольку f аффинна на C_k, то $f(y_1) + \ldots + f(y_p) = f(x_1) + \ldots + f(x_n)$. Следовательно,

$$f(x) = \sup(f(y_1) + \ldots + f(y_p)), \tag{19}$$

где $(y_1, y_2, \ldots, y_p)$ пробегает множество таких последовательностей p точек из C, что $y_1 + y_2 + \ldots + y_p = x$. Положим $D = C \cap (x - C)$. Поскольку D компактно (Топ. вект. пр-ва, гл. II (2-е изд.), § 6, п. 8, следствие 2 из предл. 11), то таковым будет и множество тех элементов $(y_1, \ldots, y_p)$ из D^p, для которых $y_1 + \ldots + y_p = x$, так что верхняя грань (19) достигается

Лемма 6. *При тех же условиях и обозначениях, что и в лемме* 5, *предположим, что* f_λ *положительны. Функция* $\overline{f}$ *положительно однородна, вогнута и полунепрерывна сверху на* C. *Она аффинна, если* C *решеточно.*

Ясно, что $\overline{f}$ положительно однородна. Пусть x, y — точки из C. Если $x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n$ из C таковы, что $x_1 + \ldots + x_m = x$, $y_1 + \ldots + y_n = y$, то $x_1 + \ldots + x_m + y_1 + \ldots y_n = x + y$, и значит, $f(x_1) + \ldots + f(x_m) + f(y_1) + \ldots + f(y_m) \leqslant \overline{f}(x + y)$; отсюда выводим, что $\overline{f}(x) + \overline{f}(y) \leqslant \overline{f}(x + y)$, а стало быть, $\overline{f}$ вогнута. Пусть L (соотв. L_λ) — множество таких $(t, x) \in \mathbf{R} \times E$, что $x \in C$ и $0 \leqslant t \leqslant \overline{f}(x)$ (соотв. $0 \leqslant t \leqslant f_\lambda(x)$). Каждое из L_λ замкнуто в выступающем выпуклом слабо полном конусе $\mathbf{R}_+ \times C$, и значит, сумма $\sum_{\lambda \in \Lambda} L_\lambda$ замкнута (Топ. вект. пр-ва, гл. II (2-е изд.), § 6, п. 8, следствие 2 из предл. 11) Согласно лемме 5 эта сумма равна L. Следовательно, L замкнуто, чем доказано, что $\overline{f}$ полунепрерывна сверху. Наконец, предположим, что C решеточно, и докажем, что $\overline{f}$ выпукла. Пусть x, $y \in C$ и $\varepsilon > 0$. В C найдутся такие $z_1, z_2, \ldots, z_n$, что $f(z_1) + \ldots + f(z_n) \geqslant \overline{f}(x + y) - \varepsilon$ и $z_1 + \ldots + z_n = x + y$. Векторное пространство $C - C$ решеточно относительно порядка, индуцируемого порядком из E (Алгебра, гл. VI (2-е изд.), § 1, п. 9, предл. 8). По теореме о разложении (там же, п. 10, теорема 1) в C найдутся такие $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$, что $x_1 + y_1 = z_1, \ldots, x_n + y_n = z_n$, $x_1 + \ldots + x_n = x$, $y_1 + \ldots + y_n = y$. Тогда, в силу того, что f положительно однородна и выпукла, имеем

$$\overline{f}(x + y) \leqslant \varepsilon + f(z_1) + \ldots + f(z_n) \leqslant \varepsilon + f(x_1) + f(y_1) + \ldots + f(x_n) + f(y_n) \leqslant \varepsilon + \overline{f}(x) + \overline{f}(y).$$

А поскольку $\varepsilon > 0$ произвольно, то тем самым и доказано, что $\overline{f}$ выпукла.

Теорема 3 (Шоке). *Пусть* E — *отделимое локально выпуклое пространство с ослабленной топологией,* C — *слабо полный выступающий конус с вершиной* 0 *в* E, G — *объединение экстремальных образующих конуса* C, K — *выпуклое компактное подмножество*

из C, λ и λ' — положительные меры с массой 1 на K, имеющие один и тот же барицентр и такие, что $\lambda^*(K - (K \cap G)) = \lambda'^*(K - (K \cap G)) = 0$. Предположим, что C решеточно. Тогда для любой выпуклой полунепрерывной снизу положительно однородной функции $f \geqslant 0$ на C имеем $\lambda^*(f \mid K) = \lambda'^*(f \mid K)$.

Пусть $\mathscr{A}$ (соотв. $\mathscr{A}'$) — множество сужений на C непрерывных линейных форм (соотв. аффинных функций) на E. Известно (Топ. вект. пр-ва, гл. II (2-е изд.), § 5, п. 4, замечание 2), что f есть верхняя огибающая множества элементов из $\mathscr{A}$, мажорируемых функцией f. Множество функций вида $\sup(f_1, \ldots, f_p)$, где $f_1, \ldots, f_p$ принадлежат $\mathscr{A}$ и $f_1 \geqslant 0, \ldots, f_p \geqslant 0$, фильтруется по возрастанию и имеет f своей верхней огибающей. Принимая во внимание теорему 1, § 1, п. 1, достаточно убедиться в справедливости равенства $\lambda(f \mid K) = \lambda'(f \mid K)$, когда f удовлетворяет сформулированным выше условиям.

Определим $\overline{f}$, как в лемме 5. Ясно, что $\overline{f}(y) = f(y)$, если $y \in G$. Поскольку $\lambda^*(K - (K \cap G)) = 0$, то $\lambda(f \mid K) = \lambda(\overline{f} \mid K)$. В силу леммы 6 функция $\overline{f}$ аффинна и полунепрерывна сверху. Стало быть, $\overline{f} \mid K$ есть нижняя огибающая убывающего фильтрующегося множества сужений элементов из $\mathscr{A}$ на K (Топ. вект. пр-ва, гл. II (2-е изд.), § 5, п. 4, предл. 6). Пусть $x \in K$ — барицентр меры λ. Если $g \in \mathscr{A}$, то $\lambda(g \mid K) = g(x)$. Следовательно, $\lambda(\overline{f} \mid K) = \overline{f}(x)$ (§ 4, п. 4, следствие 2 из предл. 5). Таким образом, $\lambda(f \mid K) = \overline{f}(x)$ и, точно так же, ясно, что $\lambda'(f \mid K) = \overline{f}(x)$.

Следствие. *Пусть E — отделимое локально выпуклое пространство, C — выступающий выпуклый конус с вершиной 0 в E, имеющий компактное порождающее множество M, и G — объединение экстремальных образующих конуса C. Пусть $x \in M$. Если C решеточно, то существует по крайней мере одна положительная мера λ с массой 1 на M, такая, что $\lambda^*(M - (G \cap M)) = 0$ и что x — ее барицентр.*

Не ограничивая общности, можно считать, что E наделено ослабленной топологией (это не меняет топологии в M). Пусть λ и λ' — меры на M, обладающие сформулированными выше свойствами, и h — такая непрерывная линейная форма на E, что M является пересечением C и гиперплоскости с уравнением $h(x) = 1$.

Пусть $\mathscr{S}$ — подмножество из $\mathscr{C}(M)$, состоящее из сужений на M положительных ненулевых функций, положительно однородных и непрерывных на C. Конус C является слабо полным (Топ. вект. пр-ва, гл. II (2-е изд.), § 7, п. 3). В силу теоремы 3 имеем $\lambda(f) = \lambda'(f)$ для любого $f \in \mathscr{S}$.

Если f_1, f_2, f_3, f_4 принадлежат $\mathscr{S}$, то

$$\sup(f_1 - f_2, f_3 - f_4) = \sup(f_1 + f_4, f_3 + f_2) - (f_2 + f_4) \in \mathscr{S} - \mathscr{S},$$

$$\inf(f_1 - f_2, f_3 - f_4) = -\sup(f_2 - f_1, f_4 - f_3) \in \mathscr{S} - \mathscr{S}.$$

Поскольку $h \mid M \in \mathscr{S}$, то $\mathscr{S} - \mathscr{S}$ содержит постоянные функции. Если x и y — различные точки из M, то существует непрерывная линейная форма на E, отделяющая x и y, и эта форма является разностью двух положительных непрерывных линейных форм на C (Топ. вект. пр-ва, гл. II (2-е изд.), § 6, п. 8, лемма 1). Из изложенного выше следует, что для действительных α, β существует такая $f \in \mathscr{S} - \mathscr{S}$, что $f(x) = \alpha$, $f(y) = \beta$. Поэтому $\mathscr{S} - \mathscr{S}$ всюду плотно в $\mathscr{C}(M)$ относительно топологии равномерной сходимости (Общая топ., гл. X (2-е изд.), § 4, п. 1, следствие из предл. 2). А поскольку λ и λ' совпадают на $\mathscr{S} - \mathscr{S}$, то $\lambda = \lambda'$.

Упражнения

1) a) Пусть K — компактное выпуклое подмножество отделимого локально выпуклого пространства E, μ — положительная мера с массой 1 на K и $\boldsymbol{b}_\mu$ — ее барицентр. Показать, что для любой положительной вогнутой полунепрерывной снизу функции f на K $f(\boldsymbol{b}_\mu) \geqslant \int^* f\,d\mu$. (Заметить, что f ограничена (Топ. вект. пр-ва, гл. II (2-е изд.), § 2, упр. 32), и значит, $-f$ μ-интегрируема.) Отсюда заключить, что если f — полунепрерывная снизу (или сверху) функция на K, одновременно выпуклая и вогнутая, то $\int f\,d\mu = f(\boldsymbol{b}_\mu)$.

b) Пусть I — интервал $[0, 1]$ из $\mathbf{R}$, K — подмножество из $\mathscr{M}_+(I)$, состоящее из мер с полной массой 1, выпуклое и компактное в широкой топологии, и пусть $j : x \mapsto \varepsilon_x$ — конечная каноническая инъекция интервала I в K, являющаяся гомеоморфизмом I на подпространство из K. Для любой меры $\nu \in K$ положим $g(\nu) = \sum_{x \in I} \nu(\{x\})$; это есть одновременно выпуклая и вогнутая функция на K; кроме того, если $g_n(\nu)$ есть верхняя грань $\nu(A)$ для всех конечных подмножеств A из I, имеющих не более n элементов, то g_n полунепрерывна сверху на K, и $g(\nu) = \lim_{n \to \infty} g_n(\nu)$ для любого $\nu \in K$; значит, g λ-интегрируема

относительно любой меры λ на K. Пусть μ — такая мера на K, что $\int f\,d\mu = \int\limits_I f[j(x)]\,dx$ для $f \in \mathscr{K}(K; \mathbf{R})$; эта мера положительна и имеет полную массу 1; показать, что b_μ есть мера Лебега на I и $\int g\,d\mu \neq g(b_\mu)$.

°2) Пусть X — компактное пространство, $\mathscr{P}$ — множество полунепрерывных снизу числовых функций на X, принимающих значения в $]-\infty, +\infty]$. Предположим, что $\mathscr{P}$ содержит конечные постоянные; для любой функции $h \in \mathscr{P}$ и любой положительной меры μ на X $\mu^*(h)$ определено и $> -\infty$ (§ 4, упр. 5).

a) Для положительных мер μ, ν на X положим $\mu \prec \nu$, если $\mu^*(h) \leqslant \nu^*(h)$ для любой функции $h \in \mathscr{P}$. Показать, что отношение $\mu \prec \nu$ есть отношение предпорядка в $\mathscr{M}_+(X)$; оно влечет $\mu(1) = \nu(1)$, $c\mu \prec c\nu$ при любом $c > 0$, и $\mu + \lambda \prec \nu + \lambda$ для любой меры $\lambda \in \mathscr{M}_+(X)$.

b) Предположим, что $\mathscr{P} + \mathscr{P} \subset \mathscr{P}$ и что $c \cdot \mathscr{P} \subset \mathscr{P}$ для $c > 0$. Пусть μ — положительная мера на X и f — функция из $\mathscr{C}(X; \mathbf{R})$. Обозначим через Q_f множество функций $h \geqslant f$, принадлежащих $\mathscr{P}$, а через M_μ — множество таких мер $\lambda \in \mathscr{M}_+(X)$, что $\lambda \prec \mu$. Показать, что

$$\sup_{\lambda \in M_\mu} \lambda(f) = \inf_{h \in Q_f} \mu^*(h).$$

(Для любой функции $g \in \mathscr{C}(X; \mathbf{R})$ обозначим $p(g) = \inf\limits_{h \in Q_g} \mu^*(h)$. Показать, что

$$p(g + g') \leqslant p(g) + p(g') \text{ и } p(c \cdot g) = c \cdot p(g)$$

для g, g' из $\mathscr{C}(X; \mathbf{R})$ и $c > 0$; показать, с другой стороны, что M_μ совпадает с множеством таких мер $\lambda \in \mathscr{M}_+(X)$, что $\lambda(g) \leqslant p(g)$ для любой функции $g \in \mathscr{C}(X; \mathbf{R})$, и закончить, применив теорему Хана — Банаха.) Если функции из $\mathscr{P}$ непрерывны и $S_0(f)$ есть нижняя огибающая для Q_f, то имеем также $\mu(S_0(f)) = \sup\limits_{\lambda \in M_\mu} \lambda(f)$.

c) Если множество $\mathscr{P}_0$ функций из $\mathscr{P}$, непрерывных и конечных на X, тотально в $\mathscr{C}(X; \mathbf{R})$, то отношение $\mu \prec \nu$ есть отношение порядка в $\mathscr{M}_+(X)$. Если мера $\nu \in \mathscr{M}_+(X)$ максимальна для этого отношения порядка, то то же самое верно и относительно любой меры ν', $0 \leqslant \nu' \leqslant \nu$ (для обычного порядка) (рассуждать от противного, используя a)). Если $\mathscr{P}_0 = \mathscr{P}$ и если $\mathscr{P}$ тотально, то всякое множество, фильтрующееся по возрастанию относительно отношения порядка $\mu \prec \nu$, имеет в $\mathscr{M}_+(X)$ верхнюю грань относительно этого отношения; в частности, $\mathscr{M}_+(X)$ *индуктивно* относительно этого отношения.

d) Предположим, что функции из $\mathscr{P}$ непрерывны и конечны, что $\mathscr{P}$ тотально в $\mathscr{C}(X; \mathbf{R})$ и что $\mathscr{P} + \mathscr{P} \subset \mathscr{P}$ и $c \cdot \mathscr{P} \subset \mathscr{P}$ для любого $c > 0$. Для любой функции $f \in \mathscr{C}(X; \mathbf{R})$ обозначим через $S(f)$ нижнюю

огибающую таких функций $h \in -\mathscr{P}$, что $f \leqslant h$; для любого $\varepsilon > 0$ обозначим через $K_{f,\varepsilon}$ множество тех $x \in X$, для которых $S(f)(x) \geqslant f(x) + \varepsilon$. Показать, что следующие условия эквивалентны:

α) Мера $\mu \in \mathscr{M}_+(X)$ максимальна относительно отношения порядка $\lambda \prec \lambda'$.

β) $\mu(S(f)) = \mu(f)$ для любой функции $f \in \mathscr{C}(X; \mathbf{R})$.

β') $\mu(S(f)) = \mu(f)$ для любой функции $f \in \mathscr{P}$.

γ) $\mu(K_{f,\varepsilon}) = 0$ для любой функции $f \in \mathscr{C}(X; \mathbf{R})$ и любого $\varepsilon > 0$.

γ') $\mu(K_{f,\varepsilon}) = 0$ для любой функции $f \in \mathscr{P}$ и любого $\varepsilon > 0$. (Применить b) к $-\mathscr{P}$.)

e) Показать, в предположениях d), что если μ и μ' — положительные меры на X, максимальные относительно отношения $\prec$, то это имеет место и для $\mu + \mu'$. Вывести отсюда, что множество положительных мер, максимальных для этого отношения порядка, есть решетка для обычного отношения порядка $\leqslant$.

°3) Пусть X — непустое компактное пространство и $\mathscr{P}$ — множество полунепрерывных снизу числовых функций на X, со значениями в $]-\infty, +\infty]$; предположим, что $\mathscr{P}$ содержит конечные постоянные. Говорят, что точка $x \in X$ *$\mathscr{P}$-экстремальна*, если мера ε_x минимальна для отношения предпорядка $\mu \prec \nu$ *); обозначим множество $\mathscr{P}$-экстремальных точек через $\mathrm{Ch}_{\mathscr{P}}(X)$.

a) Показать, что если $\mathscr{P}'$ — множество линейных комбинаций $\sum_i c_i h_i$ функций из $\mathscr{P}$ с коэффициентами $\geqslant 0$, то $\mathscr{P}$-экстремальные точки совпадают с $\mathscr{P}'$-экстремальными.

b) Показать, что для точки $x \in X$ следующие условия эквивалентны:

α) x — $\mathscr{P}$-экстремальная точка.

β) Для любой функции $f \in \mathscr{C}(X; \mathbf{R})$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется такая функция $h \in \mathscr{P}'$, что $f \leqslant h$ и $h(x) \leqslant f(x) + \varepsilon$.

γ) Для любой открытой окрестности U точки x и любого $\varepsilon > 0$ в $\mathscr{P}'$ найдется такая функция $h \geqslant 0$, что $h(x) \leqslant \varepsilon$ и $h(y) \geqslant 1$ для любого $y \in X - U$. (Использовать упр. 2b).)

Кроме того, показать, что множество точек из $\mathrm{Ch}_{\mathscr{P}}(X)$, где по крайней мере одна функция из $\mathscr{P}$ достигает своей нижней грани на X, плотно в $\mathrm{Ch}_{\mathscr{P}}(X)$.

c) Говорят, что подмножество F из X *$\mathscr{P}$-устойчиво*, если оно замкнуто и из соотношений $\lambda \prec \mu$, $\mathrm{supp}(\mu) \subset F$ вытекает $\mathrm{supp}(\lambda) \subset F$. Показать, что если $u \in \mathscr{P}$ и F' есть множество точек из F, на которых u достигает своей нижней грани на F, то множество F' $\mathscr{P}$-устойчиво.

d) Предположим, кроме того, что $\mathscr{P}$ отделяет точки из X. Показать, что для любой функции $h \in \mathscr{P}$ множество S_h точек из X, на кото-

*) Определение максимального (или минимального) элемента в упорядоченном множестве (Теория множеств, гл. III, § 1, п. 6) непосредственно распространяется на предупорядоченные множества.

рых h достигает своей нижней грани на X, пересекается с $\mathrm{Ch}_{\mathscr{P}}(X)$. (Для доказательства того, что такое подмножество сводится к единственной точке, рассмотреть минимальное $\mathscr{P}$-устойчивое подмножество, содержащееся в S_h, и применить c).)

e) При тех же предположениях, что и в d), показать, что для того, чтобы замкнутое подмножество F из X содержало $\mathrm{Ch}_{\mathscr{P}}(X)$, необходимо и достаточно, чтобы для любой функции $h \in \mathscr{P}'$ множество F пересекалось с множеством S_h точек, в которых h достигает своей нижней грани на X (использовать b)). Вывести отсюда, что для того, чтобы $a \in X$ была точкой прикосновения для $\mathrm{Ch}_{\mathscr{P}}(X)$, необходимо и достаточно, чтобы для любой открытой окрестности U точки a существовали такие $h \in \mathscr{P}'$ и $b \in U$, что $h(b) < h(x)$ для любого $x \in X - U$ (иными словами, $S_h \subset U$).

f) При тех же предположениях, что и в d), говорят, что подмножество A из X является $\mathscr{P}$-граничным, если для любой функции $h \in \mathscr{P}'$ S_h пересекается с A. Возьмем в качестве X объединение в $\mathbf{R}^2$ двух кругов с центрами соответственно $(-1, 0)$ и $(1, 0)$ и радиусом 1, а в качестве $\mathscr{P}$ — множество сужений на X линейных аффинных функций на $\mathbf{R}^2$. Показать, что $\mathrm{Ch}_{\mathscr{P}}(X)$ состоит из точек (ξ, η) из X, для которых $|\xi| \geqslant 1$. Показать, что если a есть $\mathscr{P}$-экстремальная точка $(1, 1)$, то найдется такая окрестность U точки a, что не существует никакой функции $h \in \mathscr{P}'$, для которой $h \geqslant 0$, $h(a) = 0$ и $h(y) \geqslant 1$ на $X - U$. Если A и A' — соответственно дополнения в $\mathrm{Ch}_{\mathscr{P}}(X)$ точек $(1, 1)$ и $(-1, 1)$, то A и A' суть $\mathscr{P}$-граничные множества, но $A \cap A'$ таковым не является; значит, не существует наименьшего $\mathscr{P}$-граничного свойства.

g) Пусть Y — еще одно компактное пространство и $\mathscr{Q}$ — множество полунепрерывных снизу отображений Y в $]-\infty, +\infty]$, содержащее конечные постоянные. И пусть $\mathscr{H}$ — множество функций $h = f \otimes g$, где $f \in \mathscr{P}$ и $g \in \mathscr{Q}$; показать, что

$$\mathrm{Ch}_{\mathscr{H}}(X \times Y) = \mathrm{Ch}_{\mathscr{P}}(X) \times \mathrm{Ch}_{\mathscr{Q}}(Y).$$

°4) Пусть E — отделимое локально выпуклое пространство, X — компактное выпуклое множество в E и $\mathscr{P}$ — множество конечных непрерывных выпуклых функций на X; обозначим через $\mu \prec \nu$ отношение предпорядка, определяемое в $\mathscr{M}_+(X)$ при помощи $\mathscr{P}$ (упр. 2).

a) Показать, что $\mu \prec \nu$ есть отношение порядка в $\mathscr{M}_+(X)$ (использовать упр. 29, Топ. векг. пр-ва, гл. II (2-е изд.), § 5) и что для любого $x \in X$ соотношение $\varepsilon_x \prec \mu$ равносильно утверждению, что μ имеет массу 1 и что x есть барицентр для μ. Стало быть, для любой максимальной (для предыдущего отношения порядка) меры μ с массой 1 найдется такая, и притом единственная, точка $x \in X$, что $\varepsilon_x \prec \mu$. Обратно, всякая точка $x \in X$ есть барицентр по крайней мере одной

максимальной меры. Для того чтобы $x \in X$ была экстремальной точкой для X, необходимо и достаточно, чтобы ε_x была максимальной мерой.

b) Пусть μ — максимальная мера на X и f — функция из $\mathscr{C}_+(X)$. Показать, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая непрерывная выпуклая функция на X, что $0 \leqslant g \leqslant f$ и $\mu(g) \geqslant \mu(f) - \varepsilon$ (использовать упр. 3b) и 2d)). Вывести отсюда, что носитель меры μ содержится в замыкании множества экстремальных точек X.

c) Пусть μ — максимальная мера на X и $(f_n)_{n \geqslant 1}$ — убывающая последовательность функций из $\mathscr{C}_+(X)$. Показать, что если для любой *экстремальной* точки $x \in X$ последовательность $(f_n(x))$ стремится к 0, то $\lim_{n \to \infty} \mu(f_n) = 0$ (используя b), построить убывающую последовательность (g_n) таких непрерывных выпуклых функций, что $0 \leqslant g_n \leqslant f_n$ при любом n и $\mu(g_n) \geqslant \mu(f_n) - \varepsilon$, и показать, что $(g_n(y))$ стремится к 0 для любого $y \in X$.

d) Вывести из c), что если $A \subset X$ не содержит ни одной экстремальной точки и является объединением последовательности (K_n) компактных подмножеств из X, каждое из которых есть счетное пересечение открытых множеств из X, то $\mu(A) = 0$ для любой максимальной меры μ.

e) Пусть $\mathscr{A}$ — векторное пространство непрерывных функций на X, являющихся сужениями на X непрерывных линейных аффинных функций на E. Из соотношения $\lambda \prec \mu$ следует $\lambda(h) = \mu(h)$ для любой функции $h \in \mathscr{A}$; для любой функции $f \in \mathscr{C}(X; \mathbf{R})$ нижняя огибающая $S(f)$ функций $h \in A$, таких, что $f \leqslant h$, тоже есть нижняя огибающая таких функций $g \in -\mathscr{P}$, что $f \leqslant g$. Для любого $x \in X$ соотношение $\varepsilon_x \prec \mu$ эквивалентно соотношению $h(x) = \langle h, \mu \rangle$ для любого $h \in A$; экстремальные точки в X совпадают с $\mathscr{A}$-экстремальными. Если $f \in \mathscr{P}$, то для любого $x \in X$

$$S(f)(x) = \sup_{\varepsilon_x \prec \mu} \int f(y)\, d\mu(y) \qquad (*)$$

(использовать упр. 2b)). Эта формула не обязательно верна, если предположить только, что f выпукла и полунепрерывна сверху на X (в обозначениях упр. 1b) рассмотреть функцию f, равную 1 на образе интервала I в K и 0 в остальных точках).

f) Показать, что формула (*) по-прежнему справедлива, если ограничиться в правой части дискретными мерами μ, имеющими x в качестве барицентра.

°5) Приняв обозначения упр. 4e), обозначим через $\mathscr{A}'$ сопряженное к нормированному пространству $\mathscr{A}$, наделенное структурой порядка, полученной из структуры в $\mathscr{A}$ (гл. II, § 2). С другой стороны, обозначим через C выпуклый конус с вершиной 0, порожденный множеством $X \times \{1\}$ в пространстве $E \times \mathbf{R}$.

a) Показать, что следующие свойства эквивалентны:

(i) Всякая точка $x \in X$ есть барицентр единственной максимальной меры β_x на X с массой 1.

(ii) Векторное пространство F, порожденное C, есть решетка относительно структуры порядка, имеющей C в качестве множества положительных элементов (иными словами, X есть *симплекс* (Топ. векг. пр-ва, гл. II (2-е изд.), § 2, упр. 41)).

(iii) $S(f)$ при любой функции f одновременно выпукла и вогнута.

(iv) Если μ и ν — такие максимальные меры, что $\mu(h) = \nu(h)$ для любого $h \in \mathscr{A}$, то $\mu = \nu$.

(v) Векторное пространство $\mathscr{A}'$ есть пространство Рисса.

(vi) Если f, g — функции из $\mathscr{P}$, то $S(f+g) = S(f) + S(g)$.

(Сначала доказать, что (i) влечет следующее свойство:

(vii) Отображение $x \mapsto \beta_x$ единственным образом продолжается до биективного линейного отображения F на подпространство из $\mathscr{M}(X)$, порожденное максимальными мерами, и это отображение переводит C в конус максимальных мер.

Вывести затем (ii) из (vii), используя 2e). Для получения (iii) из (ii) применить лемму о разбиении в пространстве Рисса F и упр. 4f). Чтобы вывести (iv) из (iii), использовать тот факт, что если $g \in \mathscr{C}(X; \mathbf{R})$ одновременно выпукла и вогнута, то множество тех $h \in \mathscr{A}$, для которых $h(x) > g(x)$ при любых $x \in X$, фильтруется по убыванию (Топ. векг. пр-ва, гл. II (2-е изд.), § 5, предл. 6) и имеет g в качестве нижней огибающей; применить затем упр. 4e). Для вывода (v) из (iv) заметить (при помощи упр. 4e)), что $\mathscr{A}'$ отождествляется с подпространством из $\mathscr{M}(X)$, порожденным максимальными мерами. Для получения (vi) из (v) применить лемму о разбиении в пространстве Рисса $\mathscr{A}'$ и упр. 4f). Наконец, чтобы вывести (i) из (vi), рассмотреть отображение $f \mapsto S(f)(x)$ для $f \in \mathscr{P}$ и $x \in X$ и использовать упр. 4e).)

b) При выполнении условий a) показать, что для любой функции $f \in \mathscr{C}(X; \mathbf{R})$ отображение $x \mapsto \beta_x(f)$ есть элемент прикосновения в топологии равномерной сходимости на X множества ограниченных функций на X, являющихся разностями двух полунепрерывных сверху функций (использовать тот факт, что $\mathscr{P}$ тотально в $\mathscr{C}(X; \mathbf{R})$); следовательно, это отображение измеримо относительно любой меры на X. *Для любой положительной меры μ на X единственная максимальная мера $\nu \succ \mu$ задается равенством $\nu = \int \beta_x \, d\mu(x)$ (ср. гл. V).*

c) Показать, что если выполнены условия из a) и при этом X *метризуемо*, то β_x для любого $x \in X$ есть единственная положительная мера μ с массой 1, имеющая барицентр x и такая, что $\mu(X - L) = 0$, где L — множество $\mathrm{Ch}_{\mathscr{A}}(X)$ экстремальных точек (рассуждать, как в теореме 1).

d) Показать, что при выполнении условий из a) следующие свойства эквивалентны:

α) Множество $L = \mathrm{Ch}_{\mathscr{A}}(X)$ замкнуто, или, иначе,

$$\check{S}_{\mathscr{A}}(X) = \mathrm{Ch}_{\mathscr{A}}(X).$$

β) Для любой функции $f \in \mathscr{P}$ сужение $S(f)$ на $\overline{L}$ непрерывно.

γ) Для любой функции $f \in \mathscr{P}$ функция $S(f)$ непрерывна на X.

δ) Отображение $x \mapsto \beta_x X$ в $\mathscr{M}_+(X)$ (наделенное широкой топологией) непрерывно.

(Чтобы показать, что α) влечет β), заметить, что $\beta_x = \varepsilon_x$ на L. Для доказательства того, что из β) следует γ), использовать тот факт, что $S(f)$ есть нижняя огибающая фильтрующегося по убыванию множества функций из $\mathscr{A}$ (Топ. вект. пр-ва, гл. II (2-е изд.), § 5, предл. 6), теорему Дини и упр. 3d) в применении к функциям из $\mathscr{A}$. Чтобы доказать, что γ) влечет δ), использовать упр. 4e). Наконец, чтобы убедиться, что δ) влечет α), применить упр. 4a).)

°6) Пусть X — непустое компактное пространство и $\mathscr{H}$ — векторное подпространство из $\mathscr{C}(X; \mathbf{R})$, содержащее постоянные и отделяющее точки из X. Тогда отношение $\lambda \prec \mu$, определенное посредством $\mathscr{H}$ (упр. 2), есть *отношение эквивалентности*, и $\mathscr{H}$-экстремальные точки в смысле упр. 3 совпадают с $\mathscr{H}$-экстремальными точками в смысле п. 3.

Пусть F — замкнутое подмножество из X, содержащее $\mathrm{Ch}_{\mathscr{H}}(X)$; для любого $x \in X$ обозначим через $\mathscr{M}_x^F$ множество таких положительных мер μ на X с полной массой 1, что $\varepsilon_x \prec \mu$ и $\mathrm{supp}(\mu) \subset F$; для того чтобы $\varepsilon_x \in \mathscr{M}_x^F$, необходимо и достаточно, чтобы $x \in F$; включение $x \in \mathrm{Ch}_{\mathscr{H}}(X)$ эквивалентно равенству $\mathscr{M}_x^F = \{\varepsilon_x\}$. Для любой ограниченной числовой функции f на F и любого $x \in X$ положим

$$\overline{H}_x^F(f) = \inf_{f \leqslant h \mid F,\ h \in \mathscr{H}} h(x),$$

$$\underline{H}_x^F(f) = -\overline{H}_x^F(-f) = \sup_{f \geqslant h \mid F,\ h \in \mathscr{H}} h(x);$$

это — конечные числа.

a) Показать, что отображение $f \mapsto \overline{H}_x^F(f)$ пространства $\mathscr{C}(F; \mathbf{R})$ в $\mathbf{R}$ возрастает, положительно однородно и выпукло. Если $h \in \mathscr{H}$, то $\overline{H}_x^F(h) = h(x)$.

b) Для любого $x \in X$ любой меры $\mu \in \mathscr{M}_x^F$ и любой функции $f \in \mathscr{C}(F; \mathbf{R})$ имеем $\underline{H}_x^F(f) \leqslant \int f\,d\mu \leqslant \overline{H}_x^F(f)$. Обратно, если для некоторой функции $f_0 \in \mathscr{C}(F; \mathbf{R})$ действительное число γ таково, что $\underline{H}_x^F(f_0) \leqslant \gamma \leqslant \overline{H}_x^F(f_0)$, то найдется такая мера $\mu \in \mathscr{M}_x^F$, что $\gamma = \int f_0\,d\mu$.

c) Показать, что для функции $g \in \mathscr{C}(X; \mathbf{R})$ следующие условия эквивалентны:

α) Для любого $x \in X$ и любой меры $\mu \in \mathscr{M}_x^F$ $\quad g(x) = \int g\,d\mu$.

β) Для любого $x \in X$ $\quad \underline{H}_x^F(g \mid F) = \overline{H}_x^F(g \mid F) = g(x)$.

γ) Для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие две конечные последовательности (h_i'), (h_j'') функций из $\mathscr{H}$, что если положить $h' = \sup(h_i')$, $h'' = \inf(h_j'')$, то $h' \leqslant g \leqslant h''$ и $h'' - h' \leqslant \varepsilon$.

(Чтобы показать, что из β) следует γ), рассуждать, как в Общей топ., гл. X (2-е изд.), § 4, п. 1, предл. 2.)

Если функция $g \in \mathscr{C}(X; \mathbf{R})$ обладает сформулированными эквивалентными свойствами, то она называется *$\mathscr{H}$-гармонической*; множество $\mathscr{H}^c$ $\mathscr{H}$-гармонических функций есть замкнутое векторное подпространство в $\mathscr{C}(X; \mathbf{R})$, содержащее $\mathscr{H}$; оно не зависит от рассматриваемого замкнутого подмножества $F \subset \mathrm{Ch}_{\mathscr{H}}(X)$. Имеем $(\mathscr{H}^c)^c = \mathscr{H}^c$, и отношение эквивалентности, определенное в $\mathscr{M}_+(X)$ посредством $\mathscr{H}^c$, совпадает с отношением $\lambda \prec \mu$, определенным посредством $\mathscr{H}$; стало быть, $\mathrm{Ch}_{\mathscr{H}^c}(X) = \mathrm{Ch}_{\mathscr{H}}(X)$. Отображение $g \mapsto g \mid F$ есть строго возрастающая *изометрия* $\mathscr{H}$ на его образ в $\mathscr{C}(F; \mathbf{R})$ (который, следовательно, является замкнутым подпространством в $\mathscr{C}(F; \mathbf{R})$).

d) Возьмем в качестве X интервал $[0, 1]$ из $\mathbf{R}$, а в качестве $\mathscr{H}$ — векторное пространство сужений на X полиномов второго порядка на $\mathbf{R}$. Показать, что $\mathscr{H}^c$ отлично от замыкания $\overline{\mathscr{H}}$ пространства $\mathscr{H}$ в $\mathscr{C}(X; \mathbf{R})$.

e) Показать, что для того чтобы $\mathrm{Ch}_{\mathscr{H}}(X) = X$, необходимо и достаточно, чтобы $\mathscr{H}^c = \mathscr{C}(X; \mathbf{R})$ (для доказательства необходимости использовать b)).

f) Показать, что если $\mathscr{H}$ — решетка (иными словами, пространство Рисса), то $\mathscr{H}^c = \overline{\mathscr{H}}$. Привести пример, когда $\mathscr{H}$ не является решеткой, а $\mathscr{H}^c = \overline{\mathscr{H}}$.

g) Пусть $\mathscr{E}_{\mathscr{H}}$ — наименьшее замкнутое подмножество из $\mathscr{C}(X; \mathbf{R})$, содержащее $\mathscr{H}$ и такое, что нижняя огибающая $\inf(u, v)$ двух функций из $\mathscr{E}_{\mathscr{H}}$ принадлежит $\mathscr{E}_{\mathscr{H}}$. Показать, что следующие свойства эквивалентны:

α) $f \in \mathscr{E}_{\mathscr{H}}$;

β) $\int f \, d\mu \leqslant f(x)$ для любого $x \in X$ и любой меры $\mu \in \mathscr{M}_x^X$;

γ) $\overline{H}_x^X(f) = f(x)$ для любого $x \in X$;

δ) для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая конечная последовательность (h_i) функций из $\mathscr{H}$, что $f \leqslant \inf(h_i) \leqslant f + \varepsilon$.

(Чтобы показать, что β) влечет γ), использовать b).)

Вывести отсюда, что $\mathscr{E}_{\mathscr{H}}$ есть выпуклый заостренный конус и что $\mathscr{E}_{\mathscr{H}} \cap (-\mathscr{E}_{\mathscr{H}}) = \mathscr{H}^c$. Показать, что всякая функция из $\mathscr{E}_{\mathscr{H}}$ достигает своей нижней грани на X по крайней мере в одной точке из $\mathrm{Ch}_{\mathscr{H}}(X)$.

°7) Пусть Y — непустое компактное пространство и $\mathscr{R}$ — векторное подпространство из $\mathscr{C}(Y; \mathbf{R})$, содержащее постоянные, отделяющее

точки из Y и являющееся *решеткой* (иными словами, пространство Рисса).

a) Пусть $\mathscr{N}$ — *максимальное* изолированное подпространство из $\mathscr{R}$; показать, что существует, и притом только одна, такая точка y_0, что положительная линейная форма $\varphi: f \mapsto f(y_0)$ на $\mathscr{R}$ *решеточна* (гл. II, § 2, упр. 5b)) и что $\mathscr{N} = \varphi^{-1}(0)$. (Чтобы показать, что в Y найдется хотя бы одна точка, в которой обращаются в нуль *все* функции $f \geqslant 0$, принадлежащие $\mathscr{N}$, рассуждать от противного, показывая, что в противном случае, с учетом компактности Y и определения отношения порядка в $\mathscr{R}$, было бы $\mathscr{N} = \mathscr{R}$. Для доказательства того, что множество $Z(\mathscr{N})$ точек из Y, в которых обращаются в нуль все функции из $\mathscr{N}$, сводится к единственной точке, использовать тот факт, что $\mathscr{N}$ есть гиперплоскость в $\mathscr{R}$ (гл. II, § 2, упр. 5) и что $\mathscr{R}$ отделяет точки из Y и содержит постоянные.)

b) При тех же предположениях, что и в a), показать, что $y_0 \in \check{S}_{\mathscr{R}}(Y)$. (Заметить, что если положить $S = \check{S}_{\mathscr{R}}(Y)$, то подпространство $\mathscr{R}'$ из $\mathscr{C}(S; \mathbf{R})$, состоящее из сужений на S функций из $\mathscr{A}$, канонически изоморфно $\mathscr{R}$ как упорядоченное векторное пространство (упр. 6c)), и что при помощи обратного изоморфизма $f \mapsto f \mid S$ положительная линейная форма $f \mapsto f(y_0)$ задает решеточную положительную линейную форму на $\mathscr{R}'$; затем применить a) к $\mathscr{R}'$.)

c) Для любого изолированного подпространства $\mathscr{N}_0 \neq \mathscr{R}$ показать, что существует максимальное изолированное подпространство $\mathscr{N} \supset \mathscr{N}_0$. (Использовать тот факт, что если изолированное подпространство содержит постоянную функцию, $\neq 0$, то оно равно $\mathscr{R}$.)

d) Пусть Z — объединение множеств $Z(\mathscr{N})$ (каждое из которых сводится к точке), когда $\mathscr{N}$ пробегает множество максимальных изолированных подпространств из $\mathscr{R}$; показать, что $Z = \check{S}_{\mathscr{R}}(Y)$. (Сначала доказать, что Z замкнуто, заметив, что если $y \notin Z$, то линейная форма $f \mapsto f(y)$ на $\mathscr{R}$ не решеточна, и значит (в силу гл. II, § 2, упр. 5b)), что это так и для линейной формы $f \mapsto f(y')$ во всех точках y', достаточно близких к y. Затем воспользоваться предл. 7 из п. 3, показав, что всякая функция $f_0 \in \mathscr{R}$ достигает своей нижней грани α на Y по крайней мере в одной точке из Z; для этого, положив $M = f_0^{-1}(\alpha)$, рассмотрим подпространство $\mathscr{N}_0$ функций $f \in \mathscr{R}$ вида $f_1 - f_2$ с $f_1 \geqslant 0$, $f_2 \geqslant 0$, причем f_1 и f_2 обращаются в нуль на M; доказать, что $\mathscr{N}_0$ изолировано, и применить c).)

°8) Приняв обозначения и общие предположения из упр. 6, положим $S = \check{S}_{\mathscr{H}}(X)$. Говорят, что функция $f \in \mathscr{C}(S; \mathbf{R})$ *$\mathscr{H}$-разрешима*, если найдется такая функция $g \in \mathscr{H}^c$, что $f = g \mid S$ (тогда эта функция единственна).

a) Показать, что для функции $f \in \mathscr{C}(S; \mathbf{R})$ следующие условия эквивалентны:

(i) f $\mathscr{H}$-разрешима.

(ii) $\underline{H}_x^S(f) = \overline{H}_x^S(f)$ для любого $x \in X$.

(iii) $\int f\,d\mu_1 = \int f\,d\mu_2$ для любого $x \in X$ и любой пары мер μ_1, μ_2 из $\mathscr{M}_x^S$.

(Использовать упр. 6b) и c).)

b) Показать, что следующие свойства эквивалентны:

(i) Всякая функция $f \in \mathscr{C}(S; \mathbf{R})$ $\mathscr{H}$-разрешима.

(ii) $\underline{H}_x^S(f) = \overline{H}_x^S(f)$ для любого $x \in X$ и любой функции $f \in \mathscr{C}(S; \mathbf{R})$.

(iii) Множество $\mathscr{M}_x^S$ сводится к единственному элементу.

(iv) Множество $\mathscr{H}^c$ есть решетка.

(v) Для любой функции $u \in \mathscr{C}_{\mathscr{H}}$ (упр. 6g)) существует наибольшая миноранта h_u функции u в $\mathscr{H}^c$.

(Чтобы показать, что (iv) влечет (i), применить к $\mathscr{H}^c$ упр. 7d), доказывая, что для любой точки $s \in S$ линейная форма $h \mapsto h(s)$ решеточна в $\mathscr{H}^c$; затем использовать теорему Стоуна и упр. 6c). Чтобы показать, что (i) влечет (v), заметить, что $\mathscr{H}^c \subset \mathscr{C}_{\mathscr{H}}$, и рассмотреть единственную функцию $h_u \in \mathscr{H}^c$, такую, что $h_u \mid S = u \mid S$. Чтобы убедиться, что (v) влечет (iv), заметить, что если $h \in \mathscr{H}^c$, то $-h^- = \inf(h, 0) \in \mathscr{C}_{\mathscr{H}}$, и применить (v) к $u = -h^-$.)

c) Показать, что если выполнены условия из b) и если γ_x есть единственный элемент из $\mathscr{M}_x^S$, то отображение $x \mapsto \gamma_x$ пространства X в $\mathscr{M}_+(X)$ (наделенное широкой топологией) непрерывно; вывести отсюда, что тогда

$$\mathrm{Ch}_{\mathscr{H}}(X) = \check{S}_{\mathscr{H}}(X)$$

(заметить, что $\gamma_x = \varepsilon_x$ в $\mathrm{Ch}_{\mathscr{H}}(X)$).

d) Для того чтобы любая функция $f \in \mathscr{C}(S; \mathbf{R})$ была сужением на S функции $h \in \mathscr{H}$, необходимо и достаточно, чтобы $\mathscr{H}$ было замкнуто в $\mathscr{C}(X; \mathrm{R})$ и было решеткой.

°9) Пусть Y — топологическое пространство, базисным множеством которого служит произведение $I \times \{-1, 0, 1\}$ в $\mathbf{R}^2$, где $I = [0, 1]$; пусть для любого $a \in I$ и любого $\varepsilon > 0$ через $U_{a,\varepsilon}$ обозначено множество таких $(x, y) \in Y$, что $|x - a| \leqslant \varepsilon$ и (x, y) отлично от $(a, 1)$ и от $(a, -1)$; множества $\{(x, y)\}$, где $y \neq 0$ и $x \in I$, и множества $U_{a,\varepsilon}$ образуют базис топологии в Y, относительно которой Y является не метризуемым компактным пространством (ср. Общая топ., гл. IX (2-е изд.), § 2, упр. 13 d)). Обозначим через X топологическую сумму пространства Y и множества, состоящего из одной точки ω. Пусть $\mathscr{H}$ — множество непрерывных конечных числовых функций на X,

таких, что

$$h(x, 0) = \frac{1}{2}(h(x, 1) + h(x, -1))$$

для любого $x \in I$, и $h(\omega) = \int_0^1 h(x, 0)\, dx$. Показать, что $\mathrm{Ch}_{\mathscr{H}}(X)$ состоит из таких точек (x, y), что $y \neq 0$ и $x \in I$, но не существует никакой положительной меры μ на X с массой 1, такой, чтобы $h(\omega) = \mu(h)$ для любого $h \in \mathscr{H}$, и $\mu(X - \mathrm{Ch}_{\mathscr{H}}(X)) = 0$.

°10) a) Пусть E — локально выпуклое, отделимое и *полное* пространство, E' — его сопряженное, $E'^* \supset E$ — алгебраическое сопряженное для E'. Пусть A — компактное подмножество из E относительно ослабленной топологии $\sigma(E, E')$. Пусть x — точка из E'^*, являющаяся точкой прикосновения выпуклой оболочки C множества A в ослабленной топологии $\sigma(E'^*, E')$. Показать, что если (x'_n) есть последовательность точек из E', сходящаяся к $a' \in E'$ в слабой топологии $\sigma(E', E)$, то $\lim_{n\to\infty} \langle x, x'_n \rangle = \langle x, a' \rangle$. (Заметить, что x есть барицентр меры с массой 1 на A, и применить теорему Лебега.)

b) Вывести из a), что если в E существует всюду плотная последовательность относительно исходной топологии, то сужение на любое равностепенно непрерывное подмножество H' из E' отображения $x' \mapsto \langle x, x' \rangle$ непрерывно в слабой топологии $\sigma(E', E)$ (заметить, что топология, индуцируемая на H' топологией $\sigma(E', E)$, метризуема). Вывести отсюда, что в этом случае непременно $x \in E$ (Топ. векг. пр-ва, гл. IV, § 3, упр. 3); иными словами, замкнутая выпуклая оболочка в E компактного множества относительно ослабленной топологии тоже компактна в этой топологии.

c) Распространить результат из b) на случай, когда E — произвольное отделимое локально выпуклое квазиполное пространство (теорема Крейна). (Прежде всего свести к случаю, когда E полно, рассматривая $\hat{E}$; затем заметить, что, в силу теоремы Эберлейна (Топ. векг. пр-ва, гл. IV, § 2, упр. 15), достаточно доказать, что всякая последовательность (x_n) точек из C имеет предельное значение в E относительно $\sigma(E, E')$; это позволяет свести все к случаю, когда в E существует всюду плотная последовательность относительно исходной топологии.)

ГЛАВА V

ИНТЕГРИРОВАНИЕ МЕР

На протяжении всей этой главы через T будет обозначаться локально компактное пространство, через μ — положительная мера на T. Для любого подмножества A множества E через φ_A обозначается характеристическая функция множества A (если это не ведет к недоразумениям). Под числовой функцией мы всегда понимаем функцию, принимающую значения в $\overline{\mathbf{R}}$, а значит, включая значения $+\infty$ и $-\infty$. Множество положительных числовых функций на E будет обозначаться $\mathscr{F}_+(E)$, или просто $\mathscr{F}_+$, если не может возникнуть путаницы. Условимся по определению произведениям $0\cdot(+\infty)$ и $0\cdot(-\infty)$ приписывать значение 0; таким образом, если f — числовая функция на E и A — подмножество из E, то $f\varphi_A$ означает функцию, совпадающую с f на A и равную 0 на $\complement A$. Для любой точки a локально компактного пространства через ε_a обозначается мера, определенная посредством единичной массы, помещенной в точке a (гл. III (2-е изд.), § 1, п. 3).

Понятие существенного верхнего интеграла (соотв. *существенно интегрируемой функции*), *которое будет определено в* § 1, *совпадает, как мы увидим, с понятием верхнего интеграла* (соотв. *интегрируемой функции*), *когда T есть локально компактное пространство, счетное в бесконечности* (Общ. топ. (4-е изд.), гл. 1, § 9, п. 9).

Таким образом, читатель, которого интересует лишь интегрирование в локально компактных пространствах, счетных в бесконечности, может опустить при чтении п. п. 1 — 3 § 1; *в остальном тексте главы формулировки, справедливые для пространств, счетных в бесконечности, будут получаться исключением слов «существенный» и «существенно» и заменой μ^* на μ^* и $\int^*$ на $\int^*$.*

В параграфах 1—4 слово «мера» будет всегда означать «положительная мера»; другие меры будут названы явно: действительными не обязательно положительными мерами или комплексными мерами.

§ 1. Существенный верхний интеграл

1. Определение существенного верхнего интеграла

Определение 1. *Для любой функции $f \in \mathscr{F}_+(T)$ существенным верхним интегралом от f относительно μ называется, и обозначается $\mu^\bullet(f)$, верхняя грань (конечная или нет) множества чисел $\mu^*(f\varphi_K)$, где K пробегает множество компактных подмножеств из T. Для любого подмножества A из T полагаем $\mu^\bullet(A) = \mu^\bullet(\varphi_A)$.*

Используются также обозначения $\int^\bullet f\,d\mu$, $\int^\bullet f(t)\,d\mu(t)$, $\int^\bullet f\mu$.

Поскольку $f\varphi_K \leqslant f$ для любого компактного подмножества K из T, то

$$\int^\bullet f\,d\mu \leqslant \int^* f\,d\mu. \tag{1}$$

Может оказаться, что $\mu^\bullet(f) \neq \mu^*(f)$; в самом деле, условие $\mu^*(f) = 0$ означает, что f *пренебрежима*, в то время как условие $\mu^\bullet(f) = 0$ означает, что f *локально пренебрежима* (гл. IV, § 5, п. 2, предл. 5), и могут существовать локально пренебрежимые множества, не являющиеся пренебрежимыми (гл IV, § 1, упр. 5).

Отображение $\mu^\bullet$ множества $\mathscr{F}_+(T)$ в $\overline{\mathbf{R}}$ совпадает с μ на $\mathscr{K}_+(T)$. Отсюда следует, что меры μ_1 и μ_2, удовлетворяющие равенству $\mu_1^\bullet = \mu_2^\bullet$, равны.

Предложение 1. a) *Если $f \geqslant 0$ и $g \geqslant 0$ — числовые функции, равные между собой локально почти всюду, то $\mu^\bullet(f) = \mu^\bullet(g)$.*

b) *Если $f \geqslant 0$ и $g \geqslant 0$ — числовые функции, удовлетворяющие условию $f \leqslant g$, то $\mu^\bullet(f) \leqslant \mu^\bullet(g)$.*

c) *Если $f \geqslant 0$ — числовая функция и $\alpha \geqslant 0$ — число, то $\mu^\bullet(\alpha f) = \alpha\mu^\bullet(f)$.*

d) *Если $f \geqslant 0$ и $g \geqslant 0$ — числовые функции, то $\mu^\bullet(f+g) \leqslant \mu^\bullet(f) + \mu^\bullet(g)$.*

e) *Если $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ — возрастающая последовательность положительных функций и $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$, то $\mu^\bullet(f) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu^\bullet(f_n)$.*

Свойства a), b), c), d) получаются сразу же из соответствующих свойств верхнего интеграла: a) — из предложения 6 главы IV, § 2, п. 3 и из предложения 5 главы IV, § 5, п. 2; b), c), d) — из предложений 10, 11, 12 главы IV, § 1, п. 3. Для доказательства e) обозначим через $\mathfrak{K}$ множество компактных подмножеств из T; в силу теоремы 3 главы IV, § 1, п. 3 получаем:

$$\lim_{n\to\infty} \mu^*(f_n) = \sup_{n\in\mathbf{N}} \sup_{K\in\mathfrak{K}} \mu^*(f_n\varphi_K) = \sup_{K\in\mathfrak{K}} \sup_{n\in\mathbf{N}} \mu^*(f_n\varphi_K) = \sup_{K\in\mathfrak{K}} \mu^*(f\varphi_K) = \mu^*(f).$$

В соотношении d) достигается равенство, если f и g измеримы, что вытекает из следствия 4 теоремы 5, глава IV, § 5, п. 5. Вообще, имеет место следующий результат.

Предложение 2. *Пусть f, g, h — элементы из $\mathscr{F}_+$; если g и h измеримы, то*

$$\int^* f(g+h)\,d\mu = \int^* fg\,d\mu + \int^* fh\,d\mu. \tag{2}$$

Все сразу же сводится к доказательству аналогичной формулы для верхнего интеграла. Поскольку

$$f(g+h) = fg + fh$$

(при соглашении $0\cdot(+\infty) = 0$), то

$$\int^* f(g+h)\,d\mu \leqslant \int^* fg d\mu + \int^* fh d\mu;$$

остается доказать обратное неравенство. Пусть u — такая полунепрерывная снизу функция, что $u \geqslant f(g+h)$. Положим $v = \frac{u}{g+h}$ на множестве, на котором $g+h>0$, и $v = +\infty$ там, где $g+h=0$; имеем $v \geqslant f$ и $u \geqslant v(g+h)$, откуда

$$\int^* v(g+h)\,d\mu \leqslant \int^* u d\mu,$$

и следовательно, в силу того, что v измерима (гл. IV (2-е изд.), § 5, п. 6, следствие 4 из теоремы 5), получаем:

$$\int^* fg\,d\mu + \int^* fh\,d\mu \leqslant \int^* vg\,d\mu + \int^* vh\,d\mu = \int^* v(g+h)\,d\mu \leqslant \int^* u\,d\mu,$$

откуда и вытекает искомое неравенство.

Следствие. *Пусть имеются функция* $f \geqslant 0$ *и последовательность* (g_n) *измеримых функций* $g_n \geqslant 0$; *тогда*

$$\int^* f\left(\sum_n g_n\right) d\mu = \sum_n \left(\int^* f g_n \, d\mu\right).$$

В случае конечной последовательности это есть непосредственное следствие предложения 2. Случай бесконечной последовательности выводится из предложения 1e).

Предложение 3. *Для любого конечного числа* $\alpha > 0$ *и любой пары мер* μ, ν *на* T

$$(\alpha\mu)^* = \alpha\mu^*; \quad (\mu + \nu)^* = \mu^* + \nu^*.$$

Кроме того, соотношение $\mu \leqslant \nu$ *влечет* $\mu^* \leqslant \nu^*$.

Доказательство немедленно получается, если исходить из аналогичного утверждения главы IV (§ 1, п. 3, предл. 15).

Предложение 4. *Для любой числовой функции* $f \geqslant 0$, *полунепрерывной снизу на* T, $\mu^*(f) = \mu^*(f)$.

Действительно, пусть g — такая функция из $\mathscr{K}_+(T)$, что $g \leqslant f$. Если K есть (компактный) носитель g, то $\mu(g) \leqslant \mu^*(f\varphi_K) \leqslant \mu^*(f)$. Отсюда по определению верхнего интеграла следует, что $\mu^*(f) \leqslant \mu^*(f)$, и значит, $\mu^*(f) = \mu^*(f)$ (формула (1)).

2. *Модерантные функции и множества*

Предложение 5. *Пусть* A — *подмножество из* T; *следующие свойства эквивалентны*:

a) *Множество* A *содержится в объединении последовательности открытых* μ-*интегрируемых множеств.*

b) *Множество* A *содержится в объединении последовательности* μ-*интегрируемых множеств.*

c) *Множество* A *содержится в объединении последовательности компактов и* μ-*пренебрежимого множества.*

Ясно, что каждое из свойств a) и c) влечет b). Обратно, b) влечет a), ибо всякое множество конечной внешней меры содержится в открытом интегрируемом множестве (гл. IV, § 1, п. 4, предл. 19), и b) влечет c), поскольку всякое интегрируемое множество является объединением последовательности компактов и пренебрежимого множества (гл. IV, § 4, следствие 2 из теоремы 4).

Определение 2. *Подмножество из T называется* μ*-модерантным, если оно удовлетворяет эквивалентным условиям предложения* 5. *Функция на T со значениями в векторном пространстве или в $\overline{\mathbf{R}}$ называется* μ*-модерантной, если она обращается в нуль на дополнении* μ*-модерантного множества из T. Мера* μ *называется модерантной, если T есть* μ*-модерантное множество.*

Если μ есть модерантная мера, то всякая функция на T является μ-модерантной и всякое подмножество из T μ-модерантно.

Замечания. 1) Если θ — комплексная мера на T, то будем говорить, что функция f θ-модерантна (соотв. что θ модерантна), если f $|\theta|$-модерантна (соотв. если $|\theta|$ модерантна).

2) Всякая ограниченная мера модерантна; если T — счетное объединение компактов, то любая мера на T модерантна.

3) Пусть (f_n) — последовательность μ-модерантных функций со значениями в $\overline{\mathbf{R}}$. И пусть для каждого n через U_n обозначено такое открытое множество, являющееся счетным объединением открытых множеств конечной внешней меры, что f_n обращается в нуль вне U_n. Тогда функция $s = \sum\limits_{n\in\mathbf{N}} |f_n|$ равна нулю вне $\bigcup\limits_{n\in\mathbf{N}} U_n$; следовательно, она μ-модерантна, и то же самое верно для всех функций, мажорированных посредством s. Это применимо, в частности, к функциям

$$\liminf_{n\to\infty} f_n, \qquad \limsup_{n\to\infty} f_n, \qquad \sum_{n\in\mathbf{N}} f_n$$

(если эта сумма определена).

4) Функция, равная почти всюду модерантной функции, модерантна.

Предложение 6. *Пусть f — положительная числовая функция на T,* μ*-измеримая и* μ*-модерантная. Тогда существует последовательность $(h_n)_{n\in\mathbf{N}}$ элементов из $\mathscr{F}_+(T)$ с суммой, равной f, обладающая следующими свойствами:*

1) *Функция h_0* μ*-пренебрежима.*

2) *Для любого $n \geqslant 1$ найдется такой компакт K_n, что h_n обращается в нуль вне K_n и что сужение h_n на K_n конечно и непрерывно.*

Предположим, что f является суммой последовательности (f_n) измеримых положительных функций, каждая из которых обладает сформулированным свойством; ясно, что тогда f тоже обладает этим свойством. Положим

$$f_n = \inf(f, n+1) - \inf(f, n)$$

для любого $n \in \mathbf{N}$; учитывая, что f равна сумме последовательности (f_n), нам достаточно доказать предложение в предположении, что f модерантна и *ограничена*. Обозначим через A множество тех $t \in T$, для которых $f(t) > 0$; A измеримо и модерантно, и значит, существует такая последовательность (A_n) попарно не пересекающихся интегрируемых множеств, что $A = \bigcup_n A_n$. Все сводится к доказательству утверждения для функций $f\varphi_{A_n}$; иными словами, можно предположить, что f ограничена и обращается в нуль вне некоторого интегрируемого множества I. Но I есть объединение пренебрежимого множества N и последовательности (L_n) попарно не пересекающихся компактов (гл. IV, § 4, п. 6, следствие 2 из теоремы 4). Следовательно, все сводится к изучению случая, когда f ограничена и обращается в нуль вне некоторого компакта L.

Пусть $\mathfrak{K}$ — множество таких компактов K из T, что $f \mid K$ непрерывно; при этом $\mathfrak{K}$ μ-плотно (гл. IV, (2-е изд.), § 5, п. 10, предл. 15) и L является объединением пренебрежимого множества N и последовательности $(K_n)_{n\geqslant 1}$ попарно не пересекающихся элементов из $\mathfrak{K}$ (гл. IV (2-е изд.), § 5, п. 8, опр. 6). Функции $h_0 = f\varphi_N$, $h_n = f\varphi_{Kn}$ при $n \geqslant 1$ обладают требуемым свойством.

Следующее предложение позволяет свести изучение верхнего интеграла к изучению существенного верхнего интеграла.

Предложение 7. *Пусть f — элемент из $\mathscr{F}_+(T)$.*

1) *Если функция f не является μ-модерантной, то $\mu^*(f) = +\infty$.*

2) *Если функция f μ-модерантна, то $\mu^*(f) = \mu^\cdot(f)$.*

3) *Если $\mu^\cdot(f) < +\infty$, то найдется такое μ-модерантное подмножество A, являющееся объединением последовательности компактов из T, что $f = f\varphi_A$ локально почти всюду.*

Первое утверждение вытекает сразу же из леммы 1 главы IV (2-е изд.), § 5, п. 6. Для доказательства второго обозначим через A такое модерантное подмножество, что f обращается в нуль вне A; A есть объединение пренебрежимого множества A_0 и последовательности $(A_n)_{n\geqslant 1}$ компактных множеств, которую можно предположить возрастающей. Тогда функция f почти всюду равна верхней огибающей функций $f\varphi_{A_n}$ $(n \geqslant 1)$, и значит (гл. IV, § 1,

п. 3, теорема 3 и § 2, п. 3, предл. 6),

$$\mu^*(f) = \lim_{n\to\infty} \mu^*(f\varphi_{A_n}) \leqslant \mu^\cdot(f);$$

отсюда в силу формулы (1) следует равенство $\mu^*(f) = \mu^\cdot(f)$. Наконец, предположим, что $\mu^\cdot(f) < +\infty$; существует такая возрастающая последовательность (A_n) компактов, что

$$\mu^\cdot(f) = \sup_n \mu^*(f\varphi_{A_n}).$$

Положим $A = \bigcup_n A_n$; правая часть тогда равна $\mu^*(f\varphi_A)$ (гл. IV, § 1, п. 3, теорема 3), или (в силу предл. 1 или п. 2 выше) еще $\mu^\cdot(f\varphi_A)$. А поскольку $\mu^\cdot(f) = \mu^\cdot(f\varphi_A) + \mu^\cdot(f\varphi_{\complement A})$ (предл. 2), то $\mu^\cdot(f\varphi_{\complement A}) = 0$, откуда и получаем 3).

Следствие 1. *Для того чтобы функция f была пренебрежима, необходимо и достаточно, чтобы она была локально пренебрежима и модерантна.*

Следствие 2. *Если μ — модерантная мера (в частности, если μ ограничена или если T счетно в бесконечности), то $\mu^* = \mu^\cdot$.*

Предложение 8. a) *Пусть H — множество полунепрерывных снизу положительных функций, фильтрующееся по отношению $\leqslant$; тогда*

$$\mu^\cdot(\sup_{h\in H} h) = \sup_{h\in H} \mu^\cdot(h).$$

b) *Пусть H — множество полунепрерывных сверху положительных функций, фильтрующееся по отношению $\geqslant$; если в H существует такая функция h_0, что $\mu^\cdot(h_0) < \infty$, то*

$$\mu^\cdot(\inf_{h\in H} h) = \inf_{h\in H} \mu^\cdot(h).$$

Утверждение a), учитывая предложение 4, является повторением теоремы 1 из главы IV, § 1, п. 1. Чтобы доказать b), положим $\eta = \inf_{h\in H} h$ и допустим, что a — число, >0. Существует такой компакт K, что (гл. IV (2-е изд.), § 4, п. 4, следствие 1 из предл. 5):

$$\mu^\cdot(h_0) - a \leqslant \mu^*(h_0\varphi_K) = \mu(h_0\varphi_K) \leqslant \mu^\cdot(h_0).$$

Функции $h\varphi_K$, где h пробегает H, образуют множество полунепрерывных сверху функций, фильтрующееся по отношению $\geqslant$ и

содержащее интегрируемую функцию. Следовательно (гл. IV (2-е изд.), § 4, п. 4, следствие 2 из предл. 5),

$$\mu^*(\eta\varphi_K) = \inf_{h\in H} \mu^*(h\varphi_K).$$

Но (гл. IV (2-е изд.), § 4, п. 4, следствие 1 из предл. 5) $\mu^*(h_0\varphi_{CK}) \leqslant a$, откуда $\mu^*(h\varphi_{CK}) \leqslant a$ для любой функции $h \in H$, мажорированной функцией h_0. Окончательно имеем:

$$\mu^*(\eta) \geqslant \mu^*(\eta\varphi_K) = \inf_{h\in H} \mu^*(h\varphi_K) \geqslant \inf_{h\in H} \mu^*(h) - a.$$

А поскольку неравенство $\mu^*(\eta) \leqslant \inf_{h\in H} \mu^*(h)$ очевидно и a произвольно, то предложение доказано.

3. *Существенно интегрируемые функции*

Пусть F — *действительное* банахово пространство; напомним, что элементы пространств $\mathscr{F}_F^p$ (гл. IV, § 3, п. 3) и $\mathscr{L}_F^p$ (гл. IV, § 3, п. 4, опр. 2) являются μ-модерантными функциями (гл. IV (2-е изд), § 5, п. 6, лемма 1); обозначая, как обычно, через $\mathscr{N}_F$ пространство пренебрежимых отображений T в F, мы введем еще пространство $\mathscr{N}_F^\infty$ *локально пренебрежимых* отображений T в F.

Лемма 1. *Пусть g и g' — μ-модерантные отображения со значениями в F; если g и g' равны локально почти всюду одной и той же функции f, то $g = g'$ почти всюду.*

В самом деле, пусть D — множество тех $t \in T$, в которых $g(t) \neq g'(t)$; D локально пренебрежимо и модерантно, и стало быть, пренебрежимо (следствие 1 из предл. 7).

Мы будем обозначать через $\overline{\mathscr{F}}_F^p(T, \mu)$ (или просто $\overline{\mathscr{F}}_F^p(\mu)$, $\overline{\mathscr{F}}_F^p$, если это не влечет путаницы) множество таких отображений f пространства T в F, что существует функция $g \in \mathscr{F}_F^p$, равная f локально почти всюду. Число $N_p(g)$ в силу леммы 1 зависит только от f, и поэтому мы положим $\overline{N}_p(f) = N_p(g)$. Функция $\overline{N}_p$, очевидно, является полунормой на $\overline{\mathscr{F}}_F^p$, и мы будем всегда предполагать, что $\overline{\mathscr{F}}_F^p$ наделено топологией, определяемой посредством $\overline{N}_p$. Замыкание 0 в этой топологии есть пространство $\mathscr{N}_F^\infty$; соотношения $\overline{\mathscr{F}}_F^p = \mathscr{F}_F^p + \mathscr{N}_F^\infty$, $\mathscr{N}_F^\infty \cap \mathscr{F}_F^p = \mathscr{N}_F$ (лемма 1) показывают, что нормированное пространство $\overline{\mathscr{F}}_F^p/\mathscr{N}_F^\infty$ канонически

отождествляется с пространством $\mathscr{F}_F^p/\mathscr{N}_F$, которое является полным (гл. IV, § 3, п. 3, предл. 5); следовательно, и само $\overline{\mathscr{F}}_F^p$ полно.

Точно так же, мы будем обозначать через $\overline{\mathscr{L}}_F^p(T, \mu)$ (или $\overline{\mathscr{L}}_F^p(\mu)$, или $\overline{\mathscr{L}}_F^p$) подпространство $\mathscr{L}_F^p + \mathscr{N}_F^\infty$ пространства $\overline{\mathscr{F}}_F^p$: можно также охарактеризовать $\overline{\mathscr{L}}_F^p$ как подпространство из $\overline{\mathscr{F}}_F^p$, состоящее из *измеримых* отображений (гл. IV, § 5, п. 6, теорема 5). Нормированное пространство $\overline{\mathscr{L}}_F^p/\mathscr{N}_F^\infty$ канонически отождествляется с L_F^p; следовательно, $\overline{\mathscr{L}}_F^p$ полно. Его элементы называются *существенно интегрируемыми с p-й степенью функциями*; оправданность этой терминологии показывает следующее предложение.

Предложение 9. *Для того чтобы отображение f пространства T в F принадлежало $\overline{\mathscr{F}}_F^p$* (соотв. $\overline{\mathscr{L}}_F^p$), *необходимо и достаточно, чтобы* (соотв. *чтобы f было измеримо и чтобы*)

$$\mu^*(|f|^p) < +\infty.$$

Тогда $\overline{N}_p(f) = \mu^*(|f|^p)^{1/p}$.

Очевидно, можно ограничиться утверждением, относящимся к $\overline{\mathscr{F}}_F^p$. Если f принадлежит $\overline{\mathscr{F}}_F^p$, то мы обозначим через g функцию, принадлежащую $\mathscr{F}_F^p$ и равную f локально почти всюду; тогда $|f|^p = |g|^p$ локально почти всюду, и значит, $\mu^*(|f|^p) = \mu^*(|g|^p) = \mu^*(|g|^p) < +\infty$ (предл. 1а) и предл. 7); а с другой стороны, по определению $\overline{N}_p$,

$$\overline{N}_p(f) = N_p(g) = (\mu^*(|g|^p))^{1/p}.$$

Обратно, предположим, что $\mu^*(|f|^p) < +\infty$; тогда найдется такое модерантное множество A, что f обращается в нуль локально почти всюду на $T - A$ (предл. 7). Функция $f\varphi_A$, равная локально почти всюду функции f, такова, что $N_p(f\varphi_A) = \overline{N}_p(f) < +\infty$; стало быть, она принадлежит $\mathscr{F}_F^p$, и значит, $f \in \overline{\mathscr{F}}_F^p$.

Следствие. *Для того чтобы f принадлежала $\mathscr{L}_F^p$, необходимо и достаточно, чтобы f принадлежала $\overline{\mathscr{L}}_F^p$ и была модерантной.*

Определение 3. *Элементы из $\overline{\mathscr{L}}_F^1$ называются существенно μ-интегрируемыми функциями со значениями в F. Композиция отображения $\tilde{f} \mapsto \mu(\tilde{f})$ пространства L_F^1 в F с каноническим отоб-*

ражением $\overline{\mathscr{L}}^1_F$ *на* $\tilde{L}^1_F$ *дает непрерывное линейное отображение* $\overline{\mathscr{L}}^1_F$ *в* F, *которое продолжает отображение* $f \mapsto \int f\,d\mu$ *пространства* $\mathscr{L}^1_F$ *в* F. *Значение этого отображения для* $f \in \overline{\mathscr{L}}^1_F$ *снова обозначается через* $\int f\,d\mu$ *или* $\mu(f)$, *и мы говорим, что это есть интеграл от* f *относительно* μ.

Две существенно интегрируемые функции, равные между собой локально почти всюду, имеют один и тот же интеграл. Для любой конечной существенно интегрируемой функции $f \geqslant 0$ имеем $\int^* f\,d\mu = \int f\,d\mu$. Если A — множество, характеристическая функция которого существенно интегрируема, то говорят, что A *существенно* μ-*интегрируемо*; $\int \varphi_A\,d\mu$ обозначается также через $\mu(A)$ и называется снова *мерой* множества A.

Если функция f со значениями в F определена локально почти всюду на T, то снова говорят, что f *существенно интегрируема*, если она равна локально почти всюду некоторой функции f_1, определенной всюду и интегрируемой; тогда полагаем

$$\int f\,d\mu = \int f_1\,d\mu,$$

и это определение не зависит от интегрируемой функции f_1, определенной всюду и равной локально почти всюду f (лемма 1) Точно так же определяется понятие существенно интегрируемой функции для функций со значениями в $\overline{\mathbf{R}}$, определенных и конечных локально почти всюду.

Читатель без труда может распространить на существенно интегрируемые функции результаты главы IV, § 4 об интегрируемых функциях, заменив в формулировках слова «почти всюду» словами «локально почти всюду». Укажем, например, неравенство

$$\left|\int f\,d\mu\right| \leqslant \int |f|\,d\mu, \tag{3}$$

справедливое для любой существенно интегрируемой функции со значениями в банаховом пространстве.

Предложение 10. *Пусть* $\mathfrak{K}$ — μ-*плотное множество компактных подмножеств из* T.

a) *Если* $f \geqslant 0$ — *числовая функция, то*

$$\mu^{\cdot}(f) = \sup_{K \in \mathfrak{K}} \mu^*(f\varphi_K). \tag{4}$$

b) *Если* f — *существенно интегрируемая функция со значениями в банаховом пространстве* F, *то*

$$\int f\,d\mu = \lim_{\mathfrak{K}} \int f\varphi_K\,d\mu,$$

где предел берется по фильтрующемуся (*по* $\subset$) *множеству* $\mathfrak{K}$.

Для доказательства a) достаточно показать, что для любого компактного подмножества L из T справедливо равенство $\int^* f\varphi_L d\mu = \sup_K \int^* f\varphi_K\,d\mu$, где K пробегает множество подмножеств из L, принадлежащих $\mathfrak{K}$. Но L есть объединение пренебрежимого множества и возрастающей последовательности (K_n) элементов из $\mathfrak{K}$ (гл. IV, (2-е изд.), § 5, п. 8, предл. 12), поэтому утверждение вытекает из теоремы о предельном переходе в верхних интегралах (гл. IV, § 1, п. 3, теорема 3).

Предположим теперь, что f принадлежит $\overline{\mathscr{L}}^1_F$, и пусть $\varepsilon > 0$ — некоторое число, а K — такой элемент из $\mathfrak{K}$, что

$$\int |f|\,\varphi_K\,d\mu \geqslant \int |f|\,d\mu - \varepsilon$$

(таковой в силу a) существует). Тогда для любого компакта H, содержащего K, имеем

$$\left|\int f\,d\mu - \int f\varphi_H\,d\mu\right| \leqslant \int |f|\,\varphi_{CH}\,d\mu \leqslant \int |f|\,\varphi_{CK}\,d\mu \leqslant \varepsilon.$$

Обобщение на банаховы пространства и на комплексные меры. Пусть F — комплексное банахово пространство; допуская вольность, мы будем снова обозначать через F действительное банахово пространство, базисное для F. Тогда банахово пространство $\overline{\mathscr{L}}^p_F(T, \mu)$ может быть наделено естественной структурой комплексного банахова пространства, и нужно лишь уточнять, какая именно структура этого пространства используется — действительная или комплексная. В этой главе всюду, где не оговаривается противное, речь будет идти о *действительной* структуре.

Пусть θ — комплексная мера; положим $\overline{\mathscr{L}}^p_F(T, \theta) = \overline{\mathscr{L}}^p_F(T, |\theta|)$; если F — комплексное банахово пространство, то имеют силу те же

замечания, что и выше. В частности, функция f со значениями в F будет называться существенно интегрируемой относительно θ, если она существенно интегрируема относительно $|\theta|$. Утверждение b) предложения 10 сразу же распространяется на комплексные меры.

4. *Одно специальное свойство существенного верхнего интеграла*

Приводимый ниже результат будет часто использоваться в дальнейшем. В его формулировке нельзя заменить существенные верхние интегралы обычными верхними интегралами (см. упр. 4).

Предложение 11. *Пусть* $(\lambda_\alpha)_{\alpha\in A}$ — *семейство положительных мер на* T, *фильтрующееся по отношению* $\leqslant$ *и имеющее в* $\mathscr{M}(T)$ *верхнюю грань* λ. *Тогда для любой числовой функции* $f \geqslant 0$

$$\lambda^*(f) = \sup_{\alpha\in A} \lambda_\alpha^*(f). \tag{5}$$

В случае, когда f принадлежит $\mathscr{K}(T)$, это соотношение сводится к определению верхней грани множества, фильтрующегося в $\mathscr{M}(T)$ (гл. II, § 2, п. 2, лемма 1). Предположим далее, что f мажорирована функцией $g \in \mathscr{K}_+$ (иными словами, f ограничена и обращается в нуль вне некоторого компакта K); и пусть α — такой индекс, что $\lambda_\alpha(g) \geqslant \lambda(g) - \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — некоторое число; поскольку мера $\nu = \lambda - \lambda_\alpha$ положительна, то $\nu^*(f) \leqslant \leqslant \nu(g) \leqslant \varepsilon$ или $\lambda_\alpha^*(f) \geqslant \lambda^*(f) - \varepsilon$ (гл. IV, § 1, п. 3, предл. 15). Отсюда следует (учитывая, что ε произвольно), что правая часть формулы (5) мажорирует левую; обратное неравенство очевидно, и стало быть, (5) в рассматриваемом случае выполняется. Предположим теперь, что f обращается в нуль вне K, но не обязательно ограничена, и положим $f_n = \inf(f, n)$ для любого целого n. Имеем:

$$\lambda^*(f) = \sup_{n\in\mathbf{N}} \lambda^*(f_n) = \sup_{n\in\mathbf{N}} \sup_{\alpha\in A} \lambda_\alpha^*(f_n) = \sup_{\alpha\in A} \sup_{n\in\mathbf{N}} \lambda_\alpha^*(f_n) = \sup_{\alpha\in A} \lambda_\alpha^*(f).$$

Наконец, если не накладывать на f никаких ограничений, то обозначая через $\mathfrak{K}$ множество компактных подмножеств из T, получаем

$$\lambda^*(f) = \sup_{K\in\mathfrak{K}} \lambda^*(f\varphi_K) = \sup_{K\in\mathfrak{K}} \sup_{\alpha\in A} \lambda_\alpha^*(f\varphi_K) = \sup_{\alpha\in A} \sup_{K\in\mathfrak{K}} \lambda_\alpha^*(f\varphi_K) = \sup_{\alpha\in A} \lambda_\alpha^*(f).$$

Следствие 1. *Для того чтобы подмножество N из T было локально λ-пренебрежимо, необходимо и достаточно, чтобы N было локально λ_α-пренебрежимо для любого $\alpha \in A$.*

Следствие 2. *Для того чтобы отображение g пространства T в топологическое пространство G было λ-измеримо, необходимо и достаточно, чтобы оно было λ_α-измеримо для любого $\alpha \in A$.*

Необходимость очевидна, ибо $\lambda_\alpha \leqslant \lambda$ для любого α (гл. IV, § 1, п. 3, предл. 15). Обратно, предположим, что g λ_α-измеримо для любого α, и обозначим через $\mathfrak{K}$ множество таких компактных подмножеств K из T, что $g \mid K$ непрерывно, и пусть L — такой компакт, что $L \cap K$ λ-пренебрежимо для любого $K \in \mathfrak{K}$. Поскольку множество $\mathfrak{K}$ λ_α-плотно, то L λ_α-пренебрежимо для любого α (гл. IV (2-е изд.), § 5, п. 8, предл. 12), и значит, λ-пренебрежимо (следствие 1). Отсюда вытекает, что $\mathfrak{K}$ λ-плотно и что g λ-измеримо (гл. IV (2-е изд.), § 5, п. 10, предл. 15).

Упражнения

1) Показать, что если $f \geqslant 0$ и $g \geqslant 0$ — числовые функции, то $\mu^*(\sup(f, g)) + \mu^*(\inf(f, g)) \leqslant \mu^*(f) + \mu^*(g)$ (ср. гл. IV (2-е изд.), § 1, упр. 1).

2) Показать, что для любой функции $f \geqslant 0$ на T отображение $\mu \mapsto \mu^*(f)$ пространства $\mathscr{M}_+(T)$ в $\overline{\mathbf{R}}$ полунепрерывно снизу в квазисильной топологии (гл. III (2-е изд.), § 1, упр. 8; ср. гл. IV (2-е изд.), § 1, упр. 6b)). При каком условии это отображение непрерывно?

°3) a) Пусть $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$ — семейство числовых функций $\geqslant 0$, фильтрующееся по отношению $\leqslant$ и такое, что отображение $t \mapsto (f_\alpha(t))$ пространства T в $\mathbf{R}^A$ μ-измеримо. И пусть f — верхняя огибающая семейства (f_α). Тогда f μ-измерима и

$$\int^* f \, d\mu = \sup_{\alpha \in A} \int^* f_\alpha \, d\mu. \tag{1}$$

b) Пусть $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$ — семейство числовых функций $\geqslant 0$ на T, обладающих следующим свойством: для любого компактного подмножества K из T и любого $\varepsilon > 0$ существует такое компактное множество $K' \subset K$, что $\mu(K - K') \leqslant \varepsilon$ и что сужения на K' всех функций f_α полунепрерывны снизу. И пусть f — верхняя огибающая семейства (f_α). Показать, что f измерима и удовлетворяет соотношению (1).

Построить пример отображения $t \mapsto (f_\alpha(t))$, удовлетворяющего указанному выше условию и не являющегося μ-измеримым.

4) Пусть T и μ — локально компактное пространство и мера, определенные в упр. 5, гл. IV (2-е изд.), § 1.

a) Показать, что μ есть верхняя грань последовательности мер с конечными носителями, но $\mu^* \neq \mu^\bullet$, и что μ не является модерантной. Вывести отсюда, что предложение 11 становится неверным, если заменить в нем символ $\int^\bullet$ на $\int^*$, даже когда множество A счетно.

b) Пусть для действительного числа y через f_y обозначена характеристическая функция множества, сводящегося к точке $(0, y)$ из T. Показать, что отображение $t \mapsto (f_y(t))_{y \in \mathbf{R}}$ μ-измеримо, но если $f = \sup_{y \in \mathbf{R}} f_y$, то $\mu^*(f) = +\infty$ и $\sup_{y \in \mathbf{R}} \mu^*(f_y) = 0$.

5) Пусть (μ_n) — последовательность положительных мер на T, которая сходится квазисильно к μ в $\mathscr{M}(T)$ (гл. III (2-е изд.), § 1, упр. 8).

a) Показать, что если отображение f пространства T в топологическое пространство G μ_n-измеримо при любом n, то оно μ-измеримо (использовать упр. 6b), гл. IV (2-е изд.), § 1).

b) Пусть f — отображение T в банахово пространство F, существенно μ_n-интегрируемое при любом n. Показать, что если последовательность $(\mu_n^\bullet(|f|))$ ограничена, то f существенно μ-интегрируемо (упр. 2). Показать на примере, что может не выполняться равенство $\int f\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f\,d\mu_n$ (взять в качестве μ_n такую точечную меру на компактном пространстве, что $\lim \|\mu_n\| = 0$); однако это соотношение выполняется, когда f ограничено и имеет компактный носитель.

6) Пусть $\mathfrak{K}$ — μ-плотное множество компактных подмножеств из T. И пусть f — такая функция на T со значениями в банаховом пространстве F, что $f\varphi_K$ μ-интегрируема для любого $K \in \mathfrak{K}$. Если интегралы $\int f\varphi_K$ имеют предел в F по фильтрующемуся множеству $\mathfrak{K}$ (по отношению $\subset$), то f существенно μ-интегрируема.

§ 2. Суммируемые семейства положительных мер

1. *Определение суммируемых семейств мер*

Пусть $(\lambda_\alpha)_{\alpha \in A}$ — семейство положительных мер на локально компактном пространстве X; говорят, что семейство $(\lambda_\alpha)_{\alpha \in A}$ есть *суммируемое семейство мер*, если оно суммируемо в векторном пространстве $\mathscr{M}(X)$ действительных мер на X, наделенном широкой топологией (Общая топ., гл. III (3-е изд.), § 5, п. 1). Это сводится к утверждению, что для любой функции $f \in \mathscr{K}(X)$ семейство чисел $\lambda_\alpha(f)$ суммируемо в $\mathbf{R}$. В самом деле, это условие, очевидно, необходимо; обратно, если оно имеет место, то линей-

ная форма $f \mapsto \sum_{\alpha \in A} \lambda_\alpha(f)$ на $\mathscr{K}(X)$ положительна, т. е. является положительной мерой ν (гл. III (2-е изд.), § 3, теорема 1), и мы сразу же убеждаемся в том, что конечные частичные суммы семейства (λ_α) широко сходятся к ν по фильтру сечений множества конечных подмножеств из A (Общая топ., гл. III (3-е изд.), § 5, п. 1, опр. 1).

Всякий элемент из $\mathscr{K}(X)$ представляет собой разность двух элементов из $\mathscr{K}_+(X)$, поэтому семейство (λ_α) суммируемо в том и только том случае, когда

$$\sum_{\alpha \in A} \lambda_\alpha(f) < +\infty \tag{1}$$

для любой функции $f \in \mathscr{K}_+(X)$. Это условие эквивалентно также условию:

$$\sum_{\alpha \in A} \lambda_\alpha(K) < +\infty \tag{2}$$

для любого компакта $K \subset X$.

В самом деле, из (2) следует (1), так как $f \leqslant \|f\| \cdot \varphi_S$, где S означает компактный носитель функции f. Обратно, если K компактно, то найдется такая функция $f \in \mathscr{K}_+(X)$, что $\varphi_K \leqslant f$ (гл. III (2-е изд.), § 1, п. 2, лемма 1), и отсюда следует, что (1) влечет (2).

Замечания. 1) Очевидно, что если семейство $(\lambda_\alpha)_{\alpha \in A}$ суммируемо, то его сумма является *верхней гранью* в $\mathscr{M}_+(X)$ конечных частичных сумм $\sum_{\alpha \in J} \lambda_\alpha$, где J пробегает множество конечных подмножеств из A.

2) Пусть $(\theta_\alpha)_{\alpha \in A}$ — семейство комплексных мер на X; будем говорить, что семейство (θ_α) *суммируемо*, если семейство $(|\theta_\alpha|)$ положительных мер суммируемо; *для этого недостаточно*, чтобы семейство (θ_α) было суммируемо в векторном пространстве $\mathscr{M}(X; \mathbf{C})$, наделенном широкой топологией (ср. упр. 3).

2. *Интегрирование относительно суммы положительных мер*

Во всем этом пункте через X обозначается локально компактное пространство, через $(\lambda_\alpha)_{\alpha \in A}$ — суммируемое семейство положительных мер на X и через ν — мера $\sum_{\alpha \in A} \lambda_\alpha$.

Предложение 1. *Пусть f — положительная числовая функция на X. Имеет место равенство*

$$\nu^*(f) = \sum_{\alpha \in A} \lambda_\alpha^*(f). \tag{3}$$

Это следует сразу же из замечания 1, предложения 11, § 1, п. 3 и предложения 3, § 1, п. 1.

Следствие 1. *Для любого компактного* (соотв. *открытого и относительно компактного*) *подмножества M из X*

$$\nu(M) = \sum_{\alpha \in A} \lambda_\alpha(M).$$

Следствие 2. *Для того чтобы подмножество N из X было локально ν-пренебрежимо, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\alpha \in A$ множество N было локально λ_α-пренебрежимо.*

Следствие 3. *Для любой функции $f \in \mathscr{F}_+(X)$*

$$\nu^*(f) \geqslant \sum_{\alpha \in A} \lambda_\alpha^*(f). \tag{4}$$

Это неравенство очевидно, если f не является ν-модерантной, ибо тогда $\nu^*(f) = +\infty$ (§ 1, п. 2, предл. 7), Если f ν-модерантна, то f λ_α-модерантна при любом $\alpha \in A$, поскольку всякое открытое ν-интегрируемое множество λ_α-интегрируемо; тогда соотношение (4) сразу же следует из (3) и предложения 7, § 1, п. 2.

Может оказаться, что обе части (4) не равны друг другу, даже когда A счетно, а каждая из мер λ_α является точечной (§ 1, упр. 4а)).

Предложение 2. *Пусть f — отображение пространства X в топологическое пространство G. Для того чтобы f было ν-измеримо, необходимо и достаточно, чтобы f было λ_α-измеримо при любом $\alpha \in A$.*

Этот результат вытекает очевидным образом из следствия 2 предложения 11, § 1.

Предложение 3. *Для того чтобы отображение f пространства X в банахово пространство F было существенно ν-интегрируемо, необходимо и достаточно, чтобы f было существенно λ_α-интегрируемо при любом $\alpha \in A$ и чтобы*

$$\sum_{\alpha \in A} \int^* |f| \, d\lambda_\alpha < +\infty. \tag{5}$$

В этом случае семейство $\left(\int f\,d\lambda_\alpha\right)_{\alpha\in A}$ *абсолютно суммируемо на* F, *и*

$$\int f\,d\nu = \sum_{\alpha\in A}\int f\,d\lambda_\alpha. \tag{6}$$

Действительно, для того чтобы f было существенно ν-интегрируемо (соотв. существенно λ_α-интегрируемо), необходимо и достаточно, чтобы f было измеримо относительно меры ν (соотв. λ_α) и чтобы $\nu^*(|f|) < +\infty$ (соотв. $\lambda_\alpha^*(|f|) < +\infty$), что следует из предложения 9, § 1, п. 3. Таким образом, первая часть предложения сразу вытекает из предложений 2 и 1. Если f существенно ν-интегрируемо, то из неравенства

$$\sum_{\alpha\in A}\left|\int f\,d\lambda_\alpha\right| \leqslant \sum_{\alpha\in A}\int |f|\,d\lambda_\alpha = \nu(|f|)$$

получаем, что семейство $\left(\int f\,d\lambda_\alpha\right)$ абсолютно суммируемо на F и что норма его суммы меньше или равна норме f в $\mathscr{L}^1_F(\nu)$. Следовательно, множество функций $f\in\mathscr{L}^1_F(\nu)$, удовлетворяющих (6), является замкнутым подпространством $\mathscr{H}$ пространства $\mathscr{L}^1_F(\nu)$; но это подпространство также плотно в $\mathscr{L}^1_F(\nu)$, так как оно содержит функции вида $f\cdot a$, где $a\in F$, f означает конечную положительную интегрируемую функцию (предл. 1). Стало быть, $\mathscr{H} = \mathscr{L}^1_F(\nu)$, и предложение доказано.

Предложение 3 может быть также получено из общей теоремы интегрирования, которая будет доказана в § 3 (п. 3, теорема 1).

Следствие 1. *Предположим, что отображение* f ν-*интегрируемо; тогда* f λ_α-*интегрируемо при любом* $\alpha\in A$ *и справедлива формула* (6). *Обратно, если множество* A *конечно и если* f λ_α-*интегрируемо при любом* $\alpha\in A$, *то отображение* f ν-*интегрируемо.*

Если f ν-интегрируемо, то f существенно ν-интегрируемо и ν-модерантно (§ 1, п. 3, следствие из предл. 9); стало быть, f существенно λ_α-интегрируемо и λ_α-модерантно, и значит, λ_α-интегрируемо при любом $\alpha\in A$. Обратно, если A конечно и если f λ_α-интегрируемо при любом $\alpha\in A$, то f существенно ν-интегри-

руемо в силу предложения 3, и достаточно убедиться в том, что $\nu^*(|f|) < +\infty$; это следует сразу из соотношения $\nu^* = \sum_{\alpha \in A} \lambda_\alpha^*$ (гл. IV, § 1, п. 4, предл. 15).

Следствие 2. *Пусть* θ — *комплексная мера на* X; *положим* $\theta_1 = (\mathrm{Re}\,\theta)^+$, $\theta_2 = (\mathrm{Re}\,\theta)^-$, $\theta_3 = (\mathrm{Im}\,\theta)^+$, $\theta_4 = (\mathrm{Im}\,\theta)^-$. *Для того чтобы отображение* f *пространства* X *в топологическое пространство* G (соотв. *в банахово пространство* F) *было измеримо* (соотв. *существенно интегрируемо, интегрируемо*) *относительно меры* θ, *необходимо и достаточно, чтобы оно было измеримо* (соотв. *существенно интегрируемо, интегрируемо*) *относительно каждой из мер* θ_i $(i = 1, 2, 3, 4)$.

Если f измеримо (соотв. существенно интегрируемо, интегрируемо) относительно θ, то f по определению измеримо (соотв. существенно интегрируемо, интегрируемо) относительно меры $|\theta|$, а значит, также и относительно мер θ_i, которые мажорируются мерой $|\theta|$. Обратно, если f измеримо (соотв. существенно интегрируемо, интегрируемо) относительно мер θ_i, то предложение 2 (соотв. предл. 3, следствие 1 из предл. 3) влечет, что f измеримо (соотв. существенно интегрируемо, интегрируемо) относительно меры $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4$, которая мажорирует меру $|\theta|$.

3. *Разбиение меры на сумму мер с компактными носителями*

Предложение 4. *Пусть* μ — *положительная мера на локально компактном пространстве* T *и пусть* $\mathfrak{K}$ — μ-*плотное множество компактных подмножеств из* T. *Существует такое суммируемое семейство* $(\mu_\alpha)_{\alpha \in A}$ *положительных мер на* T, *что* $\mu = \sum_{\alpha \in A} \mu_\alpha$, *причем носители мер* μ_α *принадлежат* $\mathfrak{K}$ *и образуют локально счетное семейство попарно не пересекающихся компактов. Если мера* μ *модерантна, то множество* A *индексов может предполагаться счетным.*

В самом деле, рассмотрим такое локально счетное семейство $(K_\alpha)_{\alpha \in A}$ попарно не пересекающихся элементов из $\mathfrak{K}$, чтобы множество $N = T - \bigcup_{\alpha \in A} K_\alpha$ было локально μ-пренебрежимо (гл. IV (2-е изд.), § 5, п. 9, предл. 14). Для любой функции

$f \in \mathscr{K}(T)$ положим

$$\mu_\alpha(f) = \mu(f\varphi_{K_\alpha});$$

линейная форма μ_α на $\mathscr{K}(T)$ положительна; значит, это есть положительная мера с носителем, содержащимся в K_α. Но поскольку всякий компакт, содержащийся в элементе из $\mathfrak{R}$, принадлежит $\mathfrak{R}$, то $\operatorname{supp}(\mu_\alpha) \in \mathfrak{R}$ при любом $\alpha \in A$. Остается только показать, что семейство (μ_α) суммируемо и что его сумма равна μ; иначе говоря, $\sum_{\alpha \in A} \mu_\alpha(f) = \mu(f)$ для любой функции $f \in \mathscr{K}_+(T)$. Итак, пусть S — (компактный) носитель функции f и пусть A' — счетное множество, состоящее из тех $\alpha \in A$, для которых $S \cap K_\alpha \neq \varnothing$. Поскольку множество $N \cap S$ μ-пренебрежимо, то

$$\mu(f) = \mu(f\varphi_S) = \sum_{\alpha \in A'} \mu(f\varphi_{S \cap K_\alpha}) = \sum_{\alpha \in A'} \mu(f\varphi_{K_\alpha}) =$$

$$= \sum_{\alpha \in A} \mu(f\varphi_{K_\alpha}) = \sum_{\alpha \in A} \mu_\alpha(f).$$

Тем самым завершено доказательство общего случая. Если μ модерантна, то множество T μ-модерантно, и значит, является объединением последовательности (L_n) компактов и пренебрежимого множества (§ 1, п. 2, предл. 5); пусть A' — счетное множество тех $\alpha \in A$, для которых K_α пересекает одно из L_n. Имеем $\mu_\alpha = 0$ при $\alpha \notin A'$, и последнее утверждение предложения, очевидно, вытекает отсюда.

Замечание. Положительная мера может быть суммой последовательности мер с компактным носителем и не быть модерантной (см. упр. 4а), § 1).

Упражнения

1) Пусть (λ_α) — семейство комплексных *точечных* мер на T. Для того чтобы семейство (λ_α) было суммируемо в векторном пространстве $\mathscr{M}(T; \mathbf{C})$, наделенном широкой топологией, необходимо и достаточно, чтобы таковым было семейство $(|\lambda_\alpha|)$.

2) Пусть (λ_n) — последовательность комплексных мер на T. Для того чтобы последовательность (λ_n) была суммируема в $\mathscr{M}(T; \mathbf{C})$, наделенном широкой топологией, необходимо и достаточно, чтобы для любой функции $f \in \mathscr{K}(T)$ ряд с общим членом $\lambda_n(f)$ был абсолютно сходящимся (применить теорему Банаха — Штейнхауза; ср. Топ. вект. пр-ва, гл. III, § 3, следствие теоремы 2).

3) Пусть T — компактный интервал $[0, 1]$ из $\mathbf{R}$ и пусть для любого целого $n > 0$ через λ_n обозначена мера

$$f \mapsto \frac{1}{n} \int_0^1 f(x) \sin 2n\pi x \, dx$$

на T. Показать, что в пространстве $\mathscr{M}(T)$, наделенном широкой топологией (или квазисильной топологией (гл. III (2-е изд.), § 1, упр. 8)), последовательность мер (λ_n) суммируема, а последовательность $(|\lambda_n|)$ таковой не является. (Заметить, используя неравенство Бесселя, что если $\alpha_n = n \cdot \lambda_n(f)$, то $\sum_n \alpha_n^2 < +\infty$, и при помощи неравенства Коши — Шварца вывести отсюда, что $\sum_n |\lambda_n(f)| < +\infty$.)

4) Пусть μ — положительная мера на T и $(\nu_i)_{i \in I}$ — суммируемое семейство таких положительных мер на T, что $\mu \leqslant \sum_i \nu_i$. Существует суммируемое семейство $(\mu_i)_{i \in I}$ таких мер на T, что $\mu = \sum_i \mu_i$ и $\mu_i \leqslant \nu_i$ для любого $i \in I$. (Используя предложение 4, свести все к случаю, когда T — компакт, а затем к случаю, когда $I = \mathbf{N}$. После этого построить μ_i по индукции.)

§ 3. Интегрирование положительных мер

1. *Функции со значениями в пространстве мер*

Пусть X — локально компактное пространство и $\mathscr{M}_+(X)$ — выпуклый конус положительных мер на X. На продолжении всей этой главы $\mathscr{M}_+(X)$ будет наделено топологией, индуцированной широкой топологией в $\mathscr{M}(X)$ (гл. III (2-е изд.), § 1, п. 9); стало быть, утверждение, что отображение $\Lambda: t \mapsto \lambda_t$ локально компактного пространства T в $\mathscr{M}_+(X)$ непрерывно, означает, что для любой функции $f \in \mathscr{K}(X)$ числовая функция $t \mapsto \lambda_t(f)$ непрерывна. В этом случае мы будем также говорить, что Λ *широко непрерывно* на T. Утверждение, что отображение $\Lambda: t \mapsto \lambda_t$ μ-измеримо, означает, что множество компактных подмножеств K из T, таких, что сужение Λ на K широко непрерывно, μ-плотно (гл. IV (2-е изд.), § 5, п. 10, предл. 15). В этом случае будем говорить, что Λ *широко* μ-*измеримо*.

Пусть $\Lambda: t \mapsto \lambda_t$ — отображение T в $\mathscr{M}_+(X)$; будем говорить, что Λ *скалярно существенно интегрируемо* относительно меры μ,

если для любой функции $f \in \mathscr{K}(X)$ функция $t \mapsto \lambda_t(f)$ существенно μ-интегрируема. Если положить $\nu(f) = \int \lambda_t(f)\, d\mu(t)$, то ясно, что ν есть положительная линейная форма на $\mathscr{K}(X)$, и значит (гл. III (2-е изд.), § 1, п. 6, теорема 1), является мерой на X. Мы будем говорить, что ν есть *интеграл* от функции Λ со значениями в $\mathscr{M}_+(X)$, и будем записывать $\nu = \int \lambda_t d\mu(t)$.

Сформулированное определение представляет собой частный случай понятия слабого интеграла, который будет изучаться в общем виде в главе VI.

Если f означает элемент из $\mathscr{K}(X)$, то $\int \lambda_t(f)\, d\mu(t)$ мы будем также, допуская вольность, обозначать $\int d\mu(t) \int f(x)\, d\lambda_t(x)$; тогда определение интеграла $\nu = \int \lambda_t d\mu(t)$ запишется в виде:

$$\int f(x)\, d\nu(x) = \int d\mu(t) \int f(x)\, d\lambda_t(x). \qquad (1)$$

Аналогичная вольность в обозначениях будет допускаться в дальнейшем и для верхних интегралов, существенных верхних интегралов, интегралов от функций со значениями в банаховом пространстве.

Примеры. 1) Предположим, что T — дискретное пространство и μ — мера на T, определенная посредством массы $+1$, помещенной в каждой точке из T (гл. III (2-е изд.), § 1, п. 3). Пусть $h \geqslant 0$ — функция на T; поскольку h полунепрерывна снизу (и даже непрерывна) на T, то $\mu^*(h) = \mu^\bullet(h) = \sum_{t \in T} h(t)$ (гл. IV, § 1, п. 1, пример). Стало быть, для меры μ понятия интегрируемой и существенно интегрируемой функций совпадают. При этих условиях утверждение, что отображение $t \mapsto \lambda_t$ пространства T в $\mathscr{M}_+(X)$ скалярно существенно интегрируемо, сводится к утверждению, что семейство $(\lambda_t)_{t \in T}$ суммируемо (§ 2, п. 1), и тогда $\int \lambda_t\, d\mu(t) = \sum_{t \in T} \lambda_t$. Отметим, что отображение $t \mapsto \lambda_t$ широко непрерывно.

2) Отображение $t \mapsto \varepsilon_t$ пространства T в $\mathscr{M}_+(T)$ широко непрерывно, скалярно существенно μ-интегрируемо относительно любой положительной меры μ на T и $\int \varepsilon_t\, d\mu(t) = \mu$.

Предложение 1. *Предположим, что* μ *есть верхняя грань возрастающего фильтрующегося семейства* $(\mu_i)_{i\in I}$ *положительных мер на* T; *для того чтобы отображение* $\Lambda\colon t \mapsto \lambda_t$ *было скалярно существенно* μ-*интегрируемо, необходимо и достаточно, чтобы* Λ *было скалярно существенно* μ_i-*интегрируемо для любого* $i \in I$ *и чтобы семейство* $\left(\int \lambda_t d\mu_i\,(t)\right)_{i\in I}$ *было мажорировано в* $\mathscr{M}(X)$. *В этом случае*

$$\int \lambda_t\, d\mu\,(t) = \sup_{i\in I} \int \lambda_t\, d\mu_i\,(t). \tag{2}$$

В самом деле, доказательство того, что Λ скалярно существенно интегрируемо относительно положительной меры η на T, сводится к проверке того, что $t \mapsto \lambda_t(g)$ η-измеримо и имеет конечный существенный верхний интеграл относительно η при любой функции $g \in \mathscr{K}_+(X)$. Таким образом, предложение сразу же вытекает из предложения 11, § 1, п. 4 и из его следствия 2.

Следствие. *Предположим что* μ *является суммой суммируемого семейства* $(\mu_\alpha)_{\alpha\in A}$ *положительных мер на* T; *для того чтобы отображение* $\Lambda\colon t \mapsto \lambda_t$ *было скалярно существенно* μ-*интегрируемо, необходимо и достаточно, чтобы* Λ *было скалярно существенно* μ_α-*интегрируемо при* $\alpha \in A$ *и чтобы семейство мер* $\int \lambda_t d\mu_\alpha\,(t)$ *было суммируемо. Тогда*

$$\int \lambda_t\, d\mu\,(t) = \sum_{\alpha\in A} \int \lambda_t\, d\mu_\alpha\,(t). \tag{3}$$

Отсюда немедленно следует, что всякое скалярно существенно μ-интегрируемое отображение скалярно существенно μ'-интегрируемо также и относительно любой меры $\mu' \leqslant \mu$.

В этом параграфе мы ограничимся изучением скалярно существенно интегрируемых отображений пространства T в $\mathscr{M}_+(X)$, обладающих свойством, сформулированным в приводимом ниже определении.

Определение 1. *Пусть* X — *локально компактное пространство,* $\Lambda\colon t \mapsto \lambda_t$ — *скалярно существенно* μ-*интегрируемое отображение* T *в* $\mathscr{M}_+(X$ *и* ν — *интеграл от* Λ.

Говорят, что Λ *μ-предсогласовано, если для любой полунепрерывной снизу функции* $f \geqslant 0$ *на* X *функция* $t \mapsto \int^{\cdot} f\, d\lambda_t$ *μ-измерима на* T *и если*

$$\int^{\cdot} f(x)\, d\nu(x) = \int^{\cdot} d\mu(t) \int^{\cdot} f(x)\, d\lambda_t(x). \tag{4}$$

Говорят, что Λ *μ-согласовано* *), *если оно μ'-предсогласовано для любой положительной меры* $\mu' \leqslant \mu$.

Можно показать, что если Λ μ-предсогласовано и если мера ν модерантна — в частности, если X счетно в бесконечности,— то Λ μ-согласовано (упр. 7); однако неизвестно, эквивалентны ли эти понятия в общем случае. В утверждениях пп. 2 и 3, следующих ниже, утверждения из a) и b) сразу же распространяются на предсогласованные отображения, тогда как те, которые относятся к c), справедливы только для согласованных отображений.

Следующее ниже предложение часто позволяет убедиться в том, что заданное отображение μ-согласовано.

Предложение 2. *Пусть* $\Lambda\colon t \mapsto \lambda_t$ *— скалярно существенно интегрируемое отображение* T *в* $\mathscr{M}_+(X)$ *и пусть* $\nu = \int \lambda_t\, d\mu(t)$.

a) *Если* Λ *широко непрерывно, то отображение* $t \mapsto \lambda_t^{\cdot}(t)$ *полунепрерывно снизу для любой полунепрерывной снизу функции* $f \geqslant 0$ *на* X, Λ *μ-согласовано и выполняется соотношение*

$$\int^{*} f(x)\, d\nu(x) = \int^{*} d\mu(x) \int^{*} f(x)\, d\lambda_t(x). \tag{5}$$

b) *Если* Λ *широко μ-измеримо, то* Λ *μ-согласовано.*

c) *Если топология в* X *имеет счетную базу, то* Λ *широко измеримо* (*а значит, и μ-согласовано*).

Пусть $f \geqslant 0$ — полунепрерывная снизу функция на X. И пусть F — фильтрующееся по отношению $\leqslant$ множество таких функций $g \in \mathscr{K}(X)$, что $0 \leqslant g \leqslant f$. Для $g \in F$ обозначим через h_g функцию, определенную на T равенством $h_g(t) = \lambda_t(g)$. Положим также

$$h_f(t) = \lambda_t^{*}(f) = \lambda_t^{\cdot}(f) = \sup_{g \in F} h_g(t)$$

*) В первом издании μ-согласованными назывались скалярно μ-интегрируемые и широко μ-измеримые отображения. Приводимое здесь определение является более общим (предл. 2).

(§ 1, п. 1, предл. 4). Примем следующее предположение, более слабое, чем в а): предположим только, что сужение Λ на S широко непрерывно, где S — замкнутое множество из T, содержащее носитель меры μ. Для $g \in F$ через $\overline{h}_g$ обозначим числовую функцию, совпадающую с h_g на S и обращающуюся в $+\infty$ на $\complement S$. Положим $\overline{h}_f = \sup_{g \in F} \overline{h}_g$; тогда $\overline{h}_f = h_f$ на S. Для любого $g \in F$ функция $\overline{h}_g$ полунепрерывна снизу; стало быть, $\overline{h}_f$ полунепрерывна снизу, и, поскольку семейство $(\overline{h}_g)_{g \in F}$ — фильтрующееся, то

$$\mu^*(\overline{h}_f) = \sup_{g \in F} \mu^*(\overline{h}_g) \geqslant \sup_{g \in F} \mu^*(h_g) = \sup_{g \in F} \nu(g) = \nu^*(f)$$

(гл. IV, § 1, п. 1, теорема 1 и § 2, п. 3, предл. 6). Но так как $h_f = \overline{h}_f$ на S, а значит, и почти всюду, то это записывается также как $\mu^*(h_f) = \nu^*(f)$, т. е. в виде равенства, идентичного (5). Точно так же, поскольку f и $\overline{h}_f$ полунепрерывны снизу, то предыдущие соотношения приводят к равенству $\mu^\cdot(\overline{h}_f) = \nu^\cdot(f)$ (§ 1, п. 1, предл. 4); а так как $\overline{h}_f = h_f$ на S, то получаем $\mu^\cdot(h_f) = \nu^\cdot(f)$ (§ 1, п. 1, предл. 1), т. е. равенство, идентичное (4). Стало быть, отображение Λ μ-предсогласовано; но можно было бы всюду в этом рассуждении заменить μ на $\mu' \leqslant \mu$, а ν на $\nu' = \int \lambda_t \, d\mu'(t)$, ибо Λ также скалярно существенно μ'-интегрируемо и S содержит носитель меры μ'. Отсюда следует, что Λ μ-согласовано.

Предположим, что Λ широко непрерывно; можно взять $S = T$; тогда $h_f = \overline{h}_f$ полунепрерывно снизу, чем и завершается доказательство пункта а).

Предположим, что Λ широко μ-измеримо, и докажем b). Множество $\mathfrak{K}$ таких K из T, что сужение Λ на K непрерывно, является μ-плотным (гл. IV (2-е изд.), § 5, п. 10, предл. 15), поэтому существует такое суммируемое семейство $(\mu_\alpha)_{\alpha \in A}$ мер на T, что $\mu = \sum_{\alpha \in A} \mu_\alpha$ и что носитель S_α каждой из мер μ_α принадлежит $\mathfrak{K}$ (§ 2, п. 3, предл. 4). Для любого $\alpha \in A$ отображение Λ скалярно существенно μ_α-интегрируемо, и мы положим $\nu_\alpha = \int \lambda_t \, d\mu_\alpha(t)$; семейство (ν_α) суммируемо, и его сумма равна ν (следствие из предл. 1). Если f — полунепрерывная снизу положительная

функция на X, то первая часть доказательства в применении к мерам μ_α и к замкнутым множествам S_α показывает, что

1° h_f μ_α-измеримо при любом $\alpha \in A$, и значит, μ-измеримо (§ 2, п. 2, предл. 2);

2° $\int^* f(x)\, d\nu_\alpha(x) = \int^* d\mu_\alpha(t) \int^* f(x)\, d\lambda_t(x)$.

Формула (4) выводится теперь суммированием по α (§ 2, п. 2, предл. 1). Применяя предыдущее рассуждение к произвольной мере μ', мажорированной мерой μ (что законно в силу того, что Λ скалярно существенно μ'-интегрируемо и широко μ'-измеримо (ср. § 2, п. 2, предл. 2)), убеждаемся в том, что Λ μ-согласовано, и b) доказано.

Наконец, предположим, что топология в X имеет счетный базис, и покажем, что всякое скалярно существенно μ-интегрируемое отображение Λ: $t \mapsto \lambda_t$ пространства T в $\mathscr{M}_+(X)$ широко μ-измеримо. Это будет вытекать из следующей леммы.

Лемма 1. *Пусть X — локально компактное пространство, имеющее счетный базис. Тогда в $\mathscr{K}(X)$ существует счетное подмножество S, обладающее следующим свойством: для любой функции $f \in \mathscr{K}(X)$ найдутся такая последовательность (f_n) элементов из S и такая положительная функция $\varphi \in S$, что для любого $\varepsilon > 0$ начиная с достаточно большого n будет выполняться неравенство $|f_n - f| \leqslant \varepsilon\varphi$.*

Пусть X' — компактификация Александрова пространства X, являющаяся метризуемым компактом (Общая топ., гл. IX, п. 9, предл. 16 и следствие); отождествим $\mathscr{K}(X)$ с подмножеством из $\mathscr{C}(X')$. Пусть S' — счетное плотное подмножество банахова пространства $\mathscr{C}(X')$ (Общая топ., гл. X (2-е изд.), § 3, теорема 1); можно предположить, что S' содержит постоянную функцию n для любого $n \in \mathbf{N}$. Возьмем последовательность (U_n) открытых относительно компактных множеств из X, составляющих в объединении X и таких, что $\overline{U}_n \subset U_{n+1}$ для любого n (Общая топ., гл. I (4-е изд.), § 9, предл. 15), и возьмем функцию φ_n из $\mathscr{K}_+(X)$, равную 1 на U_n. Обозначим теперь через S счетное множество элементов из $\mathscr{K}(X)$ вида $\varphi_n g$ ($n \in \mathbf{N}$, $g \in S'$). Пусть $f \in \mathscr{K}(X)$; выберем последовательность (g_n) элементов из S', равномерно сходящуюся к f, и такое целое k, чтобы носитель функции f содержался

в U_k. Наконец, берем целое m, мажорирующее нормы функций g_n. Функции $f_n = \varphi_k g_n$ принадлежат S и удовлетворяют поставленным условиям при $\varphi = m\varphi_k$.

В силу этой леммы и в силу того, что отображение $t \mapsto \lambda_t(g)$ скалярно существенно интегрируемо при любом $g \in S$, отображение $t \mapsto (\lambda_t(g))_{g\in S}$ пространства T в $\mathbf{R}^S$ μ-измеримо (гл. IV, § 5, п. 3, теорема 1). Следовательно, множество $\mathfrak{K}$ тех компактов K из T, сужение на которые этого отображения непрерывно, является μ-плотным, и нам достаточно показать, что сужение Λ на любое $K \in \mathfrak{K}$ непрерывно. Итак, пусть f — произвольный элемент из $\mathscr{K}(X)$, а f_n и φ — элементы из S, удовлетворяющие условиям леммы 1; тогда функция $t \mapsto \lambda_t(f)$ есть равномерный предел на K непрерывных функций $t \mapsto \lambda_t(f_n)$; стало быть, она непрерывна на K, и предложение доказано.

2. *Повторные интегралы от положительных функций*

На протяжении всего этого параграфа, когда не оговаривается противное, мы обозначаем через X локально компактное пространство, через Λ: $t \mapsto \lambda_t$ — μ-согласованное отображение T в $\mathscr{M}_+(X)$, а через ν — интеграл от Λ.

Предложение 3. *Пусть $f \geqslant 0$ — числовая функция на X.*

a) *Справедливо неравенство*

$$\int^* f(x)\,d\nu(x) \geqslant \int^* d\mu(t) \int^* f(x)\,d\lambda_t(x) \geqslant$$

$$\geqslant \int^* d\mu(t) \int^* f(x)\,d\lambda_t(x). \qquad (6)$$

b) *Если Λ широко непрерывно, то*

$$\int^* f(x)\,d\nu(x) \geqslant \int^* d\mu(t) \int^* f(x)\,d\lambda_t(x). \qquad (7)$$

c) *Если $\lambda_t^*(1) < +\infty$ локально μ-почти всюду, то*

$$\int^* f(x)\,d\nu(x) \geqslant \int^* d\mu(t) \int^* f(x)\,d\lambda_t(x) =$$

$$= \int^* d\mu(t) \int^* f(x)\,d\lambda_t(x). \qquad (8)$$

Пусть g — полунепрерывная снизу функция на X, удовлетворяющая условию $f \leqslant g$. Для любого $t \in T$

$$\int^* f(x)\, d\lambda_t(x) \leqslant \int^* g(x)\, d\lambda_t(x),$$

и значит, в силу (4) и предложения 4, § 1,

$$\int^\cdot d\mu(t) \int^* f(x)\, d\lambda_t(x) \leqslant \int^\cdot d\mu(t) \int^* g(x)\, d\lambda_t(x) = \int^* g(x)\, d\nu(x).$$

Первое из неравенств (6) вытекает теперь из определения $\int^* f(x)\, d\nu(x)$ (гл. IV, § 1, п. 3, опр. 3), а второе вытекает отсюда сразу же. Неравенство (7) в случае широко непрерывного Λ доказывается аналогичным образом, путем использования (5) вместо (4).

Перейдем к доказательству (8). Отображение $t \to \lambda_t^*(1)$ измеримо и конечно локально μ-почти всюду. Следовательно, множество $\mathfrak{K}$ таких компактов K из T, что сужение отображения $t \to \lambda_t^*(1)$ на K конечно и непрерывно, μ-плотно, и предложение 4, § 2, п. 3 влечет существование суммируемого семейства $(\mu_\alpha)_{\alpha \in A}$ положительных мер, носители которых принадлежат $\mathfrak{K}$, такого, что $\mu = \sum_{\alpha \in A} \mu_\alpha$. Отображение Λ μ_α-согласовано при любом $\alpha \in A$; положим $\nu_\alpha = \int \lambda_t d\mu_\alpha(t)$. Предложение 1 показывает, что $\nu = \sum_{\alpha \in A} \nu_\alpha$, а соотношение (4), примененное к мере μ_α и к функции 1, показывает, что ν_α есть ограниченная мера (поскольку $\lambda_t^*(1)$ ограничена на $\operatorname{supp}(\mu_\alpha)$). Запишем теперь формулу (6) относительно меры μ_α, заменяя символ $\int^*$ в левой части на $\int^\cdot$, что законно в силу предложения 7, § 1; получим

$$\int^\cdot f(x)\, d\nu_\alpha(x) \geqslant \int^\cdot d\mu_\alpha(t) \int^* f(x)\, d\lambda_t(x) =$$

$$= \int^\cdot d\mu_\alpha(t) \int^\cdot f(x)\, d\lambda_t(x)$$

(последнее равенство следует из того, что λ_t ограничено локально почти всюду, и из предложения 7, § 1). Неравенство (7) получается суммированием по α (§ 2, п. 2, предл. 1).

Если не делать никакого предположения, аналогичного предположению с), то неравенство (8) может не выполняться (упр. 2).

Следствие 1. *Пусть $f \geqslant 0$ — функция на X и пусть H — множество таких $t \in T$, что f не является λ_t-пренебрежимой.*

a) *Если f ν-пренебрежима, то H локально μ-пренебрежимо.*

b) *Если f ν-пренебрежима, а Λ широко непрерывно, то H μ-пренебрежимо.*

c) *Если f локально ν-пренебрежима и $\lambda_t^*(1) < +\infty$ локально μ-почти всюду, то H локально μ-пренебрежимо.*

Следствие 2. *Пусть $f \geqslant 0$ — ν-модерантная функция на X. Тогда множество тех $t \in T$, для которых f не является λ_t-модерантной, локально μ-пренебрежимо (и даже μ-пренебрежимо, если Λ широко непрерывно).*

В самом деле, f есть сумма последовательности функций $f_n \geqslant 0$, таких, что f_n обращается в нуль вне некоторого компакта K_n при $n \geqslant 1$ и что f_0 ν-пренебрежима (§ 1, п. 2, предл. 6); тогда f_0 λ_t-пренебрежима, за исключением тех t, которые образуют локально μ-пренебрежимое множество (и даже μ-пренебрежимое, если Λ широко непрерывно); это вытекает из следствия 1, и отсюда сразу же получаем требуемое.

Предложение 4. *Пусть f — ν-измеримая функция на X со значениями в топологическом пространстве G и пусть M — множество тех $t \in T$, для которых f не является λ_t-измеримой.*

a) *Предположим, что f постоянна на дополнении некоторого ν-модерантного подмножества из X; тогда M локально μ-пренебрежимо.*

b) *Предположим, что f постоянна на дополнении некоторого ν-модерантного подмножества из X и Λ широко непрерывно; тогда M μ-пренебрежимо.*

c) *Предположим, что $\lambda_t^*(1) < +\infty$ локально μ-почти всюду; тогда M локально μ-пренебрежимо.*

Докажем вначале a) (соотв. b)). Поскольку всякое ν-интегрируемое множество содержится в открытом ν-интегрируемом множестве, то функция f постоянна на дополнении B счетного объединения открытых ν-интегрируемых множеств. Существует разбиение множества $X - B$, состоящее из ν-пренебрежимого множества N и последовательности (K_n) таких компактных множеств, что сужение f на каждое из K_n непрерывно. Пусть S — множество тех

$t \in T$, для которых N не является λ_t-пренебрежимым: в силу следствия 1 из предложения 3 множество S локально μ-пренебрежимо (соотв. μ-пренебрежимо). Множества K_n, B, N измеримы относительно любой меры на T, и сужение f на каждое из них λ_t-измеримо при любом $t \notin S$. Стало быть, функция f λ_t-измерима при любом $t \in S$ (гл. IV (2-е изд.), § 5, п. 10, предл. 6).

Для получения c) примем снова обозначения из доказательства предложения 3; функция f, будучи ν-измеримой, измерима относительно каждой из мер $\nu_\alpha \leqslant \nu$. Но эти меры ограничены, и значит, модерантны, и из a) следует, что M локально μ_α-пренебрежимо при любом $\alpha \in A$. Это в свою очередь влечет, что M локально μ-пренебрежимо (§ 2, п. 2, следствие 2 из предл. 1).

Предложение 5. *Пусть f — числовая положительная ν-измеримая функция на X и пусть N — множество тех $t \in T$, для которых f не является λ_t-измеримой и λ_t-модерантной.*

a) *Предположим, что f ν-модерантна. Тогда множество N локально μ-пренебрежимо, функция $t \mapsto \int^* f(x)\, d\lambda_t(x)$ μ-измерима и*

$$\int^* f(x)\, d\nu(x) = \int^* d\mu(t) \int^* f(x)\, d\lambda_t(x). \tag{9}$$

b) *Предположим, что f ν-модерантна и что Λ широко непрерывно. Тогда N μ-пренебрежимо, функция $t \mapsto \int^* f(x)\, d\lambda_t(x)$ μ-измерима и μ-модерантна и*

$$\int^* f(x)\, d\nu(x) = \int^* d\mu(t) \int^* f(x)\, d\lambda_t(x). \tag{10}$$

c) *Предположим, что $\lambda_t^*(1) < +\infty$ локально μ-почти всюду. Тогда множество N локально μ-пренебрежимо, функция $t \mapsto \int^* f(x)\, d\lambda_t(x)$ μ-измерима и выполняется* (9).

Докажем сначала a) (соотв. b)), предполагая, что f ν-модерантна. Утверждения, касающиеся множества N, были уже установлены (предл. 4 и следствие 2 из предл. 3). В силу предложения 6, § 1 мы можем ограничиться доказательством a) (соотв. b)) в каждом из следующих случаев:

1) функция f ν-пренебрежима.

2) Найдется такой компакт K, что f обращается в нуль вне K и что сужение f на K непрерывно.

Частный случай 1) был уже исследован (следствие 1 из предл. 3). Для изучения второго обозначим через G открытое ν-интегрируемое множество, содержащее K, через M — постоянную, мажорирующую f, через h — полунепрерывную снизу функцию $M\Phi_G$, и через g — функцию $h - f$. Поскольку f полунепрерывна сверху на X, то g полунепрерывна снизу и положительна. Кроме того, f, g, h ν-интегрируемы.

Применим теперь формулу (4) (соотв. (5)) к полунепрерывным снизу функциям h и g. Переходя к разностям, видим, что функция $t \mapsto \int^{\cdot} f(x)\, d\lambda_t(x)$ (соотв. $\int^{*} f(x)\, d\lambda_t(x)$) μ-измерима, и выполняется формула (9) (соотв. (10)). Наконец, при условии b), функция $t \mapsto \int^{*} f(x)\, d\lambda_t(x)$ имеет конечный верхний интеграл; следовательно, она μ-модерантна.

Чтобы доказать c), возьмем снова меры μ_α и ν_α из доказательства предложения 3; поскольку f ν_α-измерима и ν_α-модерантна, то утверждение a) влечет, что функция $t \mapsto \int^{\cdot} f(x)\, d\lambda_t(x)$ μ_α-измерима и что

$$\int^{\cdot} f(x)\, d\nu_\alpha(x) = \int^{\cdot} d\mu_\alpha(t) \int^{\cdot} f(x)\, d\lambda_t(x).$$

Остается лишь просуммировать по α, применив предложения 1 и 2, § 2, п. 2.

Если не предполагать, что f ν-модерантна, и не делать предположение, что выполнено c), то соотношение (9) может не выполняться (упр. 3).

Следствие. *Пусть f — функция на X со значениями в банаховом пространстве F или в $\overline{\mathbf{R}}$, ν-измеримая и ν-модерантная. Для того чтобы f была ν-интегрируема, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\int^{\cdot} d\mu(t) \int^{\cdot} |f(x)|\, d\lambda_t(x) < +\infty.$$

Это вытекает сразу же из предложения 5 и из критерия интегрируемости (гл. IV, § 5, п. 6, теорема 5).

3. Повторные интегралы от функций со значениями в банаховом пространстве

Теорема 1. *Пусть f — функция со значениями в банаховом пространстве F или в $\overline{\mathbf{R}}$ и пусть H — множество тех $t \in T$, для которых f не является λ_t-интегрируемой.*

a) *Если f ν-интегрируема, то H локально μ-пренебрежимо, функция $t \mapsto \int f(x)\, d\lambda_t(x)$ (определенная для $t \notin H$) существенно μ-интегрируема и*

$$\int f(x)\, d\nu(x) = \int d\mu(t) \int f(x)\, d\lambda_t(x). \tag{11}$$

b) *Если f ν-интегрируема, а Λ широко непрерывно, то H, кроме того, μ-пренебрежимо и функция $t \mapsto \int f(x)\, d\lambda_t(x)$ (определенная для $t \notin H$) μ-интегрируема.*

c) *Если $\lambda_t^*(1) < +\infty$ локально μ-почти всюду, то заключения из* a) *остаются справедливыми для существенно ν-интегрируемой функции f.*

Вначале докажем a) (соотв. b)). Это утверждение верно, когда f — положительная числовая функция (предл. 5); если f — интегрируемая функция со значениями в $\overline{\mathbf{R}}$, то этот результат применяется к положительным функциям f^+ и f^- и, стало быть, посредством рассмотрения разности распространяется на f. Остается изучить случай функций со значениями в F. Пусть $\mathscr{H}$ — подпространство из $\mathscr{L}^1_F(\nu)$, состоящее из линейных комбинаций с коэффициентами из F, функций из $\mathscr{K}(X)$: результат, относящийся к действительным функциям, сразу же влечет справедливость утверждения для элементов из $\mathscr{H}$. Но $\mathscr{H}$ плотно в $\mathscr{L}^1_F(\nu)$; стало быть, для любого $f \in \mathscr{L}^1_F(\nu)$ существует последовательность (f_n) элементов из $\mathscr{H}$, обладающая следующими свойствами:

1) последовательность (f_n) сходится к f в среднем в $\mathscr{L}^1_F(\nu)$ и ν-почти всюду;

2) функция $g = |f_0| + \sum_{n \in \mathbf{N}} |f_{n+1} - f_n|$ такова, что $\nu^*(g) < +\infty$ (гл. IV, § 3, п. 4, теорема 3).

Пусть N_1 — множество тех $t \in T$, для которых $\lambda_t^*(g) = +\infty$; N_1 локально μ-пренебрежимо (соотв. μ-пренебрежимо) в силу

формулы (6) (соотв. (7)). При $t \notin N_1$ функции f_n принадлежат $\mathscr{L}^1_F(\lambda_t)$, последовательность (f_n) сходится λ_t-почти всюду, а стало быть, и относительно топологии сходимости в среднем в $\mathscr{L}^1_F(\lambda_t)$ (гл. IV, § 3, п. 3, предл. 6). Пусть M — множество тех $x \in X$, для которых $f_n(x)$ не сходится к $f(x)$; поскольку M ν-пренебрежимо, то множество N_2 тех $t \in T$, для которых M не является λ_t-пренебрежимой, локально μ-пренебрежимо (соотв. μ-пренебрежимо) в силу следствия 1 из предложения 3.

Предположим, что t не принадлежит $N_1 \cup N_2$; последовательность (f_n) сходится в среднем в $\mathscr{L}^1_F(\lambda_t)$ и сходится λ_t-почти всюду к f. Следовательно,

$$f \in \mathscr{L}^1_F(\lambda_t) \text{ и } \int f\, d\lambda_t = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\lambda_t$$

(гл. IV, § 4, п. 1). Стало быть, множество H, фигурирующее в условии, содержится в $N_1 \cup N_2$, и значит, оно локально μ-пренебрежимо (соотв. μ-пренебрежимо). С другой стороны, функция $t \mapsto \int f\, d\lambda_t$ локально μ-почти всюду равна пределу последовательности μ-измеримых функций; значит, она μ-измерима. Наконец, для любого $t \notin N_1 \cup N_2$ и любого n, в силу неравенства $|f_n| \leqslant g$ и предложения 2, гл. IV, § 4, п. 2,

$$\left| \int f_n(x)\, d\lambda_t(x) \right| \leqslant \int^* g(x)\, d\lambda_t(x).$$

Но функция $t \mapsto \int^* g(x)\, d\lambda_t(x)$ существенно μ-интегрируема (соотв. μ-интегрируема) согласно предложению 5. Стало быть, можно применить теорему Лебега, в результате чего получаем:

$$\int d\mu(t) \int f(x)\, d\lambda_t(x) = \lim_{n\to\infty} \int d\mu(t) \int f_n(x)\, d\lambda_t(x) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int f_n(x)\, d\nu(x).$$

А поскольку $\int f_n(x) d\nu(x)$ стремится к $\int f(x)\, d\nu(x)$, когда $n \to \infty$, то в силу предположений, сделанных относительно последовательности (f_n), отсюда следует соотношение (11), и тем самым a) (соотв. b)) доказано.

Предположим теперь, что $\lambda_t^*(1) < +\infty$ локально μ-почти всюду и что g есть существенно ν-интегрируемая функция. Пусть

f — такая ν-интегрируемая функция, что $g = f$ локально ν-почти всюду (§ 1, п. 3). Тогда $g = f$ почти всюду для λ_t, кроме тех t, которые образуют локально μ-пренебрежимое множество P (следствие 1 с) предл. 3). Имеем $\int g d\lambda_t = \int f d\lambda_t$ для $t \notin P \cup H$, что и завершает доказательство.

Замечание. Пусть Λ: $t \mapsto \lambda_t$ — μ-согласованное отображение T в $\mathscr{M}_+(X)$. Если отображение Λ': $t \mapsto \lambda'_t$ пространства T в $\mathscr{M}_+(X)$ равно Λ локально μ-почти всюду, то из определений сразу же следует, что Λ' тоже μ-согласовано и что Λ и Λ' имеют один и тот же интеграл. Если теперь H: $t \mapsto \eta_t$ есть функция со значениями в $\mathscr{M}_+(X)$, определенная локально μ-почти всюду, то мы будем снова говорить, что H μ-согласована, если она равна локально μ-почти всюду отображению Λ: $t \mapsto \lambda_t$, всюду определенному и μ-согласованному. Положим теперь $\int \eta_t d\mu\,(t) = \int \lambda_t d\mu\,(t)$; это определение не зависит от используемой функции Λ. Мы предоставляем читателю проверку того, что предложения, доказываемые в предыдущих пунктах, распространяются на μ-согласованные функции, определенные локально μ-почти всюду.

4. *Универсально измеримые функции*

Определение 2. *Говорят, что отображение f пространства T в топологическое пространство F универсально измеримо, если оно μ-измеримо относительно любой положительной меры μ на T.*

Подмножества из T, характеристическая функция которых универсально измерима, называются *универсально измеримыми множествами*. Они образуют σ-алгебру над T (гл. IV (2-е изд.), § 5, п. 4, следствие 2 из теоремы 2), которое содержит борелевские множества (там же, следствие 3), и образуют суслинские множества, если T метризуемо (гл. IV (2-е изд.), § 5, п. 1, следствие 2 из предл. 3). Для того чтобы отображение f пространства T в топологическое пространство F, метризуемое и счетного типа, было универсально измеримо, необходимо и достаточно, чтобы прообраз

при отображении f любого замкнутого шара из F был универсально измеримым подмножеством из T (гл. IV, § 5, п. 5, теорема 4).

Предложение 6. *Для того чтобы отображение f пространства T в топологическое пространство F было универсально измеримо, необходимо и достаточно, чтобы f было измеримо относительно любой положительной меры на T с компактным носителем.*

Условие, очевидно, необходимо; оно и достаточно, ибо всякая положительная мера μ есть сумма семейства мер с компактным носителем (§ 2, п. 3, предл. 4): остается применить предложение 2, § 2, п. 2.

Предложение 7. *Пусть μ — положительная мера на T и пусть f — μ-измеримое отображение T в топологическое пространство F. Тогда существует такое универсально измеримое отображение f' пространства T в F, что $f = f'$ локально μ-почти всюду.*

Пусть $\mathfrak{K}$ — множество таких компактов из T, что сужение f на K непрерывно; поскольку $\mathfrak{K}$ μ-плотно (гл. IV (2-е изд.), § 5, п. 10, предл. 13), то найдется семейство $(K_i)_{i\in I}$ попарно не пересекающихся элементов из $\mathfrak{K}$, локально счетное и такое, что множество $N = T - \bigcup_{i\in I} K_i$ локально μ-пренебрежимо (гл. IV, (2-е изд.), § 5, п. 9, предл. 14). Пусть x — элемент из F; положим

$$f'(t) = f(t), \quad \text{если} \quad t \in \bigcup_{i\in I} K_i,$$

$$f'(t) = x, \quad \text{если} \quad t \in N.$$

Функции f и f' равны между собой локально μ-почти всюду. С другой стороны, $N \cap K$ есть борелевское подмножество из K для любого компакта K из T, в силу того, что семейство (K_i) локально счетно. Отсюда вытекает, что N — универсально измеримое множество и что f' — универсально измеримая функция (гл. IV (2-е изд.), § 5, п. 10, предл. 16).

5. *Диффузии*

Определение 3. *Пусть X — локально компактное пространство и пусть Λ: $t \mapsto \lambda_t$ — отображение T в $\mathscr{M}_+(X)$. Говорят, что Λ есть диффузия T в X, если Λ согласовано относительно любой положительной меры на T с компактным носителем. Гово-*

рят, что диффузия Λ *ограничена, если все меры* λ_t *ограничены и если* $\sup_{t \in T} \| \lambda_t \| < + \infty$; *тогда эта величина называется нормой* Λ *и обозначается* $\| \Lambda \|$.

Следующее предложение является всего лишь перефразировкой определения.

Предложение 8. *Для того чтобы отображение* Λ: $t \mapsto \lambda_t$ *пространства* T *в* $\mathscr{M}_+(X)$ *было диффузией, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

1) *Для любой полунепрерывной снизу функции* $f \geqslant 0$, *определенной на* X, *функция* $t \mapsto \lambda_t^* (f)$ *универсально измерима на* T.

2) *Для любой функции* $g \in \mathscr{K}_+(X)$ *функция* $t \mapsto \lambda_t (g)$ *локально ограничена на* T.

3) *Для любой полунепрерывной снизу функции* $f \geqslant 0$ *на* X *и любой положительной меры* μ *на* T *с компактным носителем справедливо следующее соотношение, где через* ν *обозначен* $\int \lambda_t \, d\mu \, (t)$:

$$\int^* f(x) \, d\nu \, (x) = \int^* d\mu \, (t) \int^* f(x) \, d\lambda_t \, (x). \tag{12}$$

Предположим, что Λ есть диффузия. Тогда условие 1) достаточно в силу определения согласованных отображений (п. 1, опр. 1) и предложения 6; условие 3) достаточно в силу формулы (4), поскольку Λ μ-согласовано. Пусть $g \in \mathscr{K}_+(X)$ и пусть u — функция $t \mapsto \lambda_t (g)$ (универсально измеримая согласно 1)); предположим, что u не является локально ограниченной. Тогда существует такой компакт K, что u не будет ограничена на K, и значит, найдется последовательность (t_n) элементов из K, для которой $u(t_n) \geqslant n^2$ при любом $n \geqslant 1$; стало быть, u не интегрируема относительно меры с компактным носителем: $\mu = \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2} \varepsilon_{t_n}$, что противоречит условию, наложенному на Λ; отсюда следует, что $t \mapsto \lambda_t (g)$ интегрируемо для любой положительной меры с компактным носителем. Таким образом, сформулированные выше три условия необходимы. Обратно, из условий 1) и 2) вытекает, что Λ скалярно существенно μ-интегрируемо относительно любой меры μ с компактным носителем. А поскольку всякая мера $\mu' \geqslant 0$, мажориро-

ванная мерой μ с компактным носителем, тоже имеет компактный носитель, то условия 1) и 3) показывают, что Λ μ-согласовано для любой положительной меры с компактным носителем, и мы получаем искомый результат.

Предложение 9. *Пусть* Λ: $t \mapsto \lambda_t$ — *такое отображение* T *в* $\mathscr{M}_+(T)$, *что функция* $t \mapsto \lambda_t(g)$ *универсально измерима и локально ограничена на* T *при любой* $g \in \mathscr{K}_+(X)$. *Можно утверждать, что* Λ *есть диффузия, в каждом из следующих случаев*:

a) *топология пространства* X *имеет счетный базис*;

b) Λ *универсально измеримо в широкой топологии.*

Действительно, пусть μ — положительная мера с компактным носителем в T; отображение Λ скалярно существенно μ-интегрируемо, а значит, μ-согласовано, если выполняется a) или b) (предл. 2).

В оставшейся части этого параграфа мы принимаем следующие обозначения: будем обозначать через $\langle \eta, h \rangle$ существенный верхний интеграл относительно положительной меры η от положительной η-измеримой функции h. Отображение Λ: $t \mapsto \lambda_t$ будет диффузией T в X. Если f — положительная универсально измеримая функция на X, то мы будем через Λf обозначать отображение $t \mapsto \lambda_t^*(f)$. Если μ — положительная мера на T, для которой Λ скалярно существенно μ-интегрируемо, то мы будем обозначать через $\mu\Lambda$ меру $\int \lambda_t \, d\mu(t)$. Тогда определение интеграла принимает вид

$$\langle \mu\Lambda, f \rangle = \langle \mu, \Lambda f \rangle \quad \text{для} \quad f \in \mathscr{K}_+(X).$$

Будем говорить, что положительная мера μ на T *принадлежит области диффузии* Λ, если Λ μ-согласовано: это сводится к утверждению (принимая во внимание предл. 8), что Λ скалярно существенно μ-интегрируемо и что $\langle \mu'\Lambda, f \rangle = \langle \mu', \Lambda f \rangle$ для любой положительной меры $\mu' \leqslant \mu$ и для любой полунепрерывной снизу положительной функции f.

Предложение 10. *Пусть* f, g — *универсально измеримые положительные функции на* X, $a \geqslant 0$ — *число*, μ *и* ν — *положительные меры на* T.

a) *Имеем* $\Lambda(f+g) = \Lambda f + \Lambda g$, $\Lambda(af) = a\Lambda f$.

b) *Если* μ *и* ν *принадлежат области диффузии* Λ, *то это верно и для* $\mu + \nu$ *и* $a\mu$, *и кроме того,* $a(\mu + \nu)\Lambda = \mu\Lambda + \nu\Lambda$, $(a\mu)\Lambda = a(\mu\Lambda)$.

Единственным неочевидным пунктом является принадлежность $\mu + \nu$ области диффузии Λ; в этом можно убедиться, заметив, что всякая положительная мера, мажорируемая мерой $\mu + \nu$, имеет вид $\mu' + \nu'$, где $\mu' \leqslant \mu$, $\nu' \leqslant \nu$ («лемма о разбиении», гл. II, § 1, п. 1). См. также следующее предложение 11.

Предложение 11. *Для того чтобы положительная мера* μ *на* T *принадлежала области диффузии* Λ, *необходимо и достаточно, чтобы* Λ *было скалярно существенно* μ*-интегрируемо.*

Необходимость очевидна. Обратно, допустим, что условие выполняется и пусть f — полунепрерывная снизу положительная функция на X. Функция Λf универсально измерима, а значит, и μ-измерима. Мы докажем, что $\langle \mu, \Lambda f\rangle = \langle \mu\Lambda, f\rangle$; так как это равенство будет справедливо также для любой положительной меры $\mu' \leqslant \mu$, поскольку Λ также скалярно существенно μ'-интегрируемо, то отсюда будет следовать, что Λ μ-согласовано.

Пусть $(\mu_i)_{i\in I}$ — такое суммируемое семейство положительных мер с компактным носителем, что $\mu = \sum_{i\in I} \mu_i$ (§ 2, п. 3, предл. 4); тогда семейство мер $\mu_i\Lambda$ суммируемо и $\mu\Lambda = \sum_{i\in I} \mu_i\Lambda$ (п. 1, следствие из предл. 1). Следовательно, $\langle \mu\Lambda, f\rangle = \sum_{i\in I} \langle \mu_i\Lambda, f\rangle$ (§ 2, п. 1, предл. 1); но Λ μ_i-согласовано, так что

$$\langle \mu_i\Lambda, f\rangle = \langle \mu_i, \Lambda f\rangle.$$

Применяя снова предложение 1, § 2, получаем искомое равенство:

$$\langle \mu\Lambda, f\rangle = \sum_{i\in I} \langle \mu_i\Lambda, f\rangle = \sum_{i\in I} \langle \mu_i, \Lambda f\rangle = \langle \mu, \Lambda f\rangle.$$

Следствие 1. *Если* Λ *— ограниченная диффузия, то всякая положительная ограниченная мера* μ *принадлежит области диффузии* Λ, *и*

$$\| \mu\Lambda \| \leqslant \| \mu \| \, \| \Lambda \|.$$

Следствие 2. *Предположим, что* μ *есть сумма суммируемого семейства* $(\mu_\alpha)_{\alpha\in A}$ *положительных мер, принадлежащих области*

диффузии Λ. *Для того чтобы* μ *принадлежала области диффузии* Λ, *необходимо и достаточно, чтобы семейство мер* $\mu_\alpha\Lambda$ *было суммируемо, и в этом случае*

$$\mu\Lambda = \sum_{\alpha\in A} \mu_\alpha\Lambda.$$

Достаточно применить следствие из предложения 1. п. 1.

Предложение 5, сформулированное в терминах диффузий, принимает следующую форму:

Предложение 12. *Пусть* μ — *положительная мера на* T, *принадлежащая области диффузии* Λ, *и пусть* $f \geqslant 0$ — *универсально измеримая функция на* X. *Если* f *модерантна для меры* $\mu\Lambda$ *или если меры* λ_t *ограничены, то функция* Λf μ-*измерима и*

$$\langle \mu\Lambda, f\rangle = \langle \mu, \Lambda f\rangle. \tag{13}$$

Следствие. *Если* X *счетно в бесконечности или если меры* λ_t *ограничены, то функция* Λf *универсально измерима на* T *для любой универсально измеримой функции* $f \geqslant 0$, *определенной на* X, *и выполняется* (13).

6. *Композиция ограниченных диффузий*

Предложение 13. *Пусть* T, X, Y — *локально компактные пространства,* Λ: $t \mapsto \lambda_t$ — *ограниченная диффузия пространства* T *в* X, H: $x \mapsto \eta_x$ — *ограниченная диффузия* X *в* Y. *Тогда отображение* $t \mapsto \lambda_t H$ *есть ограниченная диффузия* T *в* Y, *которая обозначается* Λ H, *и*

$$\| \Lambda H \| \leqslant \| \Lambda \| \, \| H \|. \tag{14}$$

Пусть $f \geqslant 0$ — *универсально (измеримая функция, определенная на* Y, μ — *мера на* T. *Предположим, что* μ *принадлежит области диффузии* Λ *и что* $\mu\Lambda$ *принадлежит области диффузии* H; *тогда* μ *принадлежит области диффузии* ΛH, *и*

$$\begin{aligned} &\langle \mu\,(\Lambda H), f\rangle = \langle \mu\Lambda, Hf\rangle = \langle \mu, \Lambda H f\rangle; \\ &(\mu\Lambda)\,H = \mu\,(\Lambda H); \quad \Lambda\,(Hf) = (\Lambda H)\,f. \end{aligned} \tag{15}$$

Положим $\gamma_t = \lambda_t H$; будем обозначать через Γ отображение ΛH пространства T в $\mathscr{M}_+(Y)$, а через Γf — функцию $t \mapsto \langle \gamma_t, f\rangle$ (пока неоправданно, ибо мы еще не знаем, будет ли Γ диффузией).

В силу (13) имеем $\langle \gamma_t, f \rangle = \langle \lambda_t H, f \rangle = \langle \lambda_t, Hf \rangle$; поскольку функция Hf положительна и универсально измерима на X (следствие из предл. 12), то отсюда прежде всего вытекает, что $\Gamma f = \Lambda(Hf)$, а затем что Γf универсально измерима на T (та же ссылка). Ясно, что все меры λ_t имеют полную массу, по большей мере равную $\| \Lambda \| \| H \|$. Следовательно, Γg универсально измерима и ограничена для любой функции $g \in \mathscr{K}_+(Y)$; стало быть, Γ скалярно существенно интегрируема для любой ограниченной меры на T и, в частности, для любой меры с компактным носителем. Вообще, если μ — такая мера из области Λ, что $\mu\Lambda$ принадлежит области отображения H, то для $g \in \mathscr{K}_+(Y)$ имеем

$$\langle \mu, \Gamma g \rangle = \langle \mu, \Lambda(Hg) \rangle = \langle \mu\Lambda, Hg \rangle = \langle (\mu\Lambda) H, g \rangle.$$

Последняя величина конечна, и поэтому ясно, что Γ скалярно существенно μ-интегрируемо. Обозначим через $\mu\Gamma$ интеграл $\int \gamma_t \, d\mu(t)$ (пока неоправданно, ибо мы еще не знаем, будет ли Γ диффузией). Тогда предыдущие соотношения запишутся в виде

$$\langle \mu\Gamma, g \rangle = \langle (\mu\Lambda) H, g \rangle$$

или, еще, $\mu\Gamma = (\mu\Lambda) H$, так как g — произвольная функция из $\mathscr{K}_+(Y)$.

Рассмотрим снова универсально измеримую функцию $f \geqslant 0$. Имеем

$$\langle \mu\Gamma, f \rangle = \langle (\mu\Lambda) H, f \rangle = \langle \mu\Lambda, Hf \rangle = \langle \mu, \Lambda(Hf) \rangle = \langle \mu, \Gamma f \rangle.$$

Когда f полунепрерывна снизу и когда μ пробегает множество положительных мер с компактным носителем, эти соотношения показывают, что Γ есть диффузия пространства T в Y. Утверждения предложения представляют собой не что иное, как явное выражение соотношений, полученных в процессе проведенного выше доказательства.

Определение 4. *В обозначениях предложения 13 диффузия ΛH называется композицией ограниченных диффузий H и Λ.*

Пусть X_1, X_2, X_3, X_4 — локально компактные пространства, Λ_1, Λ_2, Λ_3 — ограниченные диффузии соответственно X_1 в X_2, X_2 в X_3, X_3 в X_4. Из предложения 13 сразу же вытекает, что

$$(\Lambda_1\Lambda_2)\Lambda_3 = \Lambda_1(\Lambda_2\Lambda_3).$$

Таким образом, мы будем для композиции диффузий пользоваться обозначениями без скобок.

Пример. Пусть u — универсально измеримое отображение T в X, v — универсально измеримое отображение X в Y; согласно предложению 2b) определяем диффузии Λ и H посредством формул:

$$\lambda_t = \varepsilon_{u(t)},\ \eta_x = \varepsilon_{v(x)};$$

тогда диффузия $\Gamma = \Lambda H$ определяется равенством

$$\gamma_t = \varepsilon_{(v \circ u)(t)}.$$

Нужно соблюдать осторожность и иметь, следовательно, в виду, что порядок композиции диффузий противоположен обычному порядку композиции функций.

Упражнения

1) Пусть T — компактный интервал $[0, 1]$ из $\mathbf{R}$ и μ — мера Лебега на T. И пусть X — локально компактное пространство, полученное в результате наделения интервала $[0, 1]$ дискретной топологией. Отображение $t \mapsto \lambda_t = \varepsilon_t$ T в $\mathscr{M}(X)$ скалярно существенно интегрируемо, с интегралом $\nu = 0$. Для постоянной функции f, равной 1 на X, формула (6) из предложения 3 неверна. Вывести отсюда, что отображение $t \mapsto \lambda_t$ не является μ-согласованным.

2) Пусть локально компактное пространство T и мера $\mu \geqslant 0$ — определенные в упр. 5, гл. IV (2-е изд.), § 1. Возьмем в качестве X множество T, наделенное топологией, индуцируемой топологией из $\mathbf{R}^2$, так что X локально компактно и счетно в бесконечности. Пусть $t \mapsto \lambda_t$ — такое отображение T в $\mathscr{M}(X)$, что $\lambda_t = \varepsilon_t$ для любого $t = (0, y)$ и $\lambda_t = \varepsilon_t / n^3$ для $t = (1/n, k/n^2)$. Показать, что отображение $t \mapsto \lambda_t$ μ-согласовано, широко μ-измеримо, не является широко непрерывным и что если $\nu = \int \lambda_t \, d\mu \, (t)$ и если $f = \varphi_I$, где I — квадрат с центром 0 и стороной 2 в $\mathbf{R}^2$, то

$$\int^* f \, (x) \, d\nu \, (x) < \int^* d\mu \, (t) \int^* f \, (x) \, d\lambda_t \, (x) = + \infty.$$

3) Пусть T, T' — локально компактные пространства, μ — положительная мера на T и μ' — положительная мера на T'. На пространстве-произведении $X = T \times T'$ положим $\lambda_t = \varepsilon_t \otimes \mu'$, $\lambda'_{t'} = \mu \otimes \varepsilon_{t'}$ для $t \in T$, $t' \in T'$. Отображение $t \mapsto \lambda_t$ (соотв. $t' \mapsto \lambda'_{t'}$) T (соотв. T') в $\mathscr{M}(X)$ широко непрерывно и μ-согласовано (соотв. μ'-согласовано) и

$$\nu = \mu \otimes \mu' = \int \lambda_t \, d\mu \, (t) \int = \lambda'_{t'} \, d\mu' \, (t')$$

(гл. III (2-е изд.), § 4, п. 1; ср. § 8). Возьмем в качестве T интервал $[0, 1]$ из $\mathbf{R}$, в качестве μ-меру Лебега, в качестве T' — интервал $[0, 1]$, наделенный *дискретной* топологией, и в качестве μ' — меру на T',

определенную массой $+1$ в каждой точке из T'. Пусть f — характеристическая функция «диагонали» пространства X (множества точек (t, t), где t пробегает $[0, 1]$). Показать, что f полунепрерывна сверху и что

$$1 = \int^* d\mu(t) \int^* f(x)\, d\lambda_t(x) < \int^* f(x)\, d\nu(x) = +\infty,$$

$$0 = \int^\bullet f(x)\, d\nu(x) < \int^\bullet d\mu(t) \int^\bullet f(x)\, d\lambda_t(x) = 1.$$

°4) Пространства T, T', X и меры μ, μ', ν — те же, что и в упр. 3. Рассмотрим пространство-произведение $Y = T \times X = T \times (T \times T')$ и на Y возьмем меру-произведение $\omega = \mu \otimes \nu$. Если для любого $t \in T$ положить $\rho_t = \varepsilon_t \otimes \nu$, то $\omega = \int \rho_t\, d\mu(t)$. Пусть H — подмножество из T, не измеримое относительно μ (гл. IV, (2-е изд.), § 4, упр. 8), и пусть A — подмножество из Y, состоящее из точек (t_1, t_2, t_3), удовлетворяющих условиям $t_1 = t_3$, $t_2 \in H$. Показать, что характеристическая функция φ_A локально пренебрежима относительно ω, но не является ρ_t-измеримой *ни при каком* $t \in T$.

5) Построить пример μ-согласованного семейства $t \mapsto \lambda_t$ и такой числовой функции f на X, чтобы f была λ_t-измеримой при любом $t \in T$, но не была измеримой относительно меры $\nu = \int \lambda_t\, d\mu(t)$ (взять $X = T$ и $\lambda_t = \varepsilon_t$ при любом $t \in T$).

6) a) Показать, что во всех результатах § 3, куда входит понятие широко непрерывного отображения $t \mapsto \lambda_t$, можно заменить это предположение следующим: для любой функции $g \in \mathscr{K}_+(X)$ функция $t \mapsto \lambda_t(g)$ полунепрерывна снизу на T.

b) Рассмотрим скалярно существенно интегрируемое отображение $t \mapsto \lambda_t$ пространства T в $\mathscr{M}_+(X)$, удовлетворяющее следующему условию:

Для любого компактного подмножества K из T и любого $\varepsilon > 0$ существует такое компактное множество $K_1 \subset K$, что $\mu(K - K_1) \leqslant \varepsilon$ и что сужения на K_1 всех функций $t \mapsto \langle f, \lambda_t \rangle$, где f пробегает $\mathscr{K}_+(X)$, полунепрерывны снизу.

Показать, что отображение $t \mapsto \lambda_t$ μ-согласовано.

7) a) Пусть Λ: $t \mapsto \lambda_t$ — скалярно существенно интегрируемое отображение T в $\mathscr{M}_+(X)$ и пусть $\nu = \int \lambda_t\, d\mu(t)$. Показать, что для любой полунепрерывной снизу функции $f \geqslant 0$ на X

$$\int^\bullet f(x)\, d\nu(x) \leqslant \int^\bullet d\mu(x) \int^\bullet f(x)\, d\lambda_t(x).$$

b) Пусть Λ μ-предсогласовано, μ' — положительная мера, $\mu' \leqslant \mu$ и пусть $\mu = \mu' + \mu''$, $\nu' = \int \lambda_t\, d\mu'(t)$. Вывести из a), что для

любой полунепрерывной снизу ν-*интегрируемой* функции $f \geqslant 0$

$$\int^{\bullet} f(x)\, d\nu'(x) = \int^{\bullet} d\mu'(t) \int^{\bullet} f(x)\, d\lambda_t(x).$$

Распространить этот результат на полунепрерывную снизу ν-модерантную функцию $f \geqslant 0$. Вывести отсюда, что если ν — модерантная мера (и в частности, если X счетно в бесконечности), то Λ μ-согласовано.

) Пусть Λ: $t \mapsto \lambda_t$ — отображение T в $\mathscr{M}_+(X)$.

a) Пусть $\mu_1, \ldots, \mu_n$ — меры на T и $\mu = \mu_1 + \ldots + \mu_n$. Для того чтобы Λ было μ-согласованным, необходимо и достаточно, чтобы Λ было μ_i-согласованным для любого i (применить лемму о разбиении).

b) Предположим, что μ — верхняя грань фильтрующегося по возрастанию семейства мер $(\mu_i)_{i\in I}$. Для того чтобы Λ было μ-согласованным, необходимо и достаточно, чтобы оно было μ_i-согласованным при любом $i \in I$ и скалярно существенно μ-интегрируемым.

c) Предположим, что μ — сумма суммируемого семейства $(\mu_j)_{j\in J}$ положительных мер. Для того чтобы Λ было μ-согласованным, необходимо и достаточно, чтобы оно было μ_j-согласованным при любом $j \in J$ и чтобы Λ было скалярно существенно μ-интегрируемым.

d) Для того чтобы Λ было μ-согласовано, необходимо и достаточно, чтобы оно было скалярно существенно μ-интегрируемо и μ'-предсогласовано для любой меры $\mu' \leqslant \mu$ с компактным носителем.

9) a) Пусть T и X — локально компактные пространства, $\mathscr{C}_+(T)$ — выпуклый конус всех непрерывных положительных функций на T и V — отображение $\mathscr{K}_+(X)$ в $\mathscr{C}_+(T)$, обладающее следующими свойствами:

$$V(f+g) = Vf + Vg, \text{ если } f, g \in \mathscr{K}_+(X),$$
$$V(tf) = tV(f), \text{ если } f \in \mathscr{K}_+(X),\ t \in \mathbf{R}_+.$$

Показать, что в этом случае существует, и притом единственная, такая диффузия Λ пространства T в X, что $\Lambda f = Vf$ для любого $f \in \mathscr{K}_+(X)$. Показать, что этот результат верен также, если заменить конус $\mathscr{C}_+(T)$ конусом полунепрерывных снизу функций на T, положительных и локально ограниченных (ср. упр. 6).

b) Предположим, что топология в X имеет счетный базис. Показать, что сформулированный выше результат будет верен, если заменить конус $\mathscr{C}_+(T)$ конусом универсально измеримых функций на T, положительных и локально ограниченных.

10) Пусть T, X, Y — локально компактные пространства, счетные в бесконечности, Λ: $t \mapsto \lambda_t$ — диффузия T в X, H: $x \mapsto \eta_x$ — диффузия X в Y; говорят, что Λ и H *композируемы*, если функция $\Lambda(Hg)$ локально ограничена на T для любого $g \in \mathscr{K}_+(Y)$. Показать, что если Λ и H композируемы, то λ_t принадлежит области определения H при

любом $t \in T$, и что отображение $t \mapsto \lambda_t H$ есть диффузия T в Y. Распространить на эту ситуацию формулы (15) (предл. 13).

11) Пусть $t \mapsto \lambda_t$ — μ-согласованное отображение T в $\mathscr{M}_+(X)$, удовлетворяющее следующему условию: для любого компактного подмножества K из T существует такое компактное подмножество L_K из X, что $\operatorname{supp}(\lambda_t) \subset L_K$.

a) Показать, что для любой функции $f \geqslant 0$ на X

$$\int^{\bullet} f(x)\, d\nu(x) \geqslant \int^{\bullet} d\mu(t) \int^{*} f(x)\, d\lambda_t(x)$$

(использовать предл. 3a)).

b) Если $f \geqslant 0$ локально ν-пренебрежима, то множество тех $t \in T$, для которых f не является λ_t-пренебрежимой, локально μ-пренебрежимо.

c) Если f — ν-измеримое отображение X в топологическое пространство, то множество тех $t \in T$, для которых f не является λ_t-измеримой, локально μ-пренебрежимо.

d) Для любой ν-измеримой $f \geqslant 0$ отображение $t \mapsto \int^{*} f\, d\lambda_t$ μ-измеримо и

$$\int^{\bullet} f(x)\, d\nu(x) = \int^{\bullet} d\mu(t) \int^{*} f(x)\, d\lambda_t(x).$$

e) Пусть f — функция на X со значениями в банаховом пространстве или в $\overline{\mathbf{R}}$, существенно ν-интегрируемая. Показать, что множество тех $t \in T$, для которых f не является λ_t-интегрируемой, локально μ-пренебрежимо, функция $t \mapsto \int f(t)\, d\lambda_t(x)$ (определенная локально почти всюду относительно μ) существенно μ-интегрируема и

$$\int f(x)\, d\nu(x) = \int d\mu(t) \int f(x)\, d\lambda_t(x).$$

§ 4. Интегрирование положительных точечных мер

1. *Семейства точечных мер*

Пусть X и T — два локально компактных пространства, π — отображение T в X и $g \geqslant 0$ — *конечная* числовая функция, определенная на T; эти функции определяют отображение $t \mapsto \lambda_t = g(t)\, \varepsilon_{\pi(t)}$ пространства T в пространство $\mathscr{M}(X)$ мер на X такое, что для любого $t \in T$ отображение λ_t либо есть *точечная* мера (гл. III (2-е изд.), § 2, п. 4), либо равно 0. Если $f \geqslant 0$ есть числовая функция, определенная на X, то

$$\int^{*} f(x)\, d\lambda_t(x) = \int^{\bullet} f(x)\, d\lambda_t(x) = f(\pi(t))\, g(t)$$

(напомним, что мы условились считать это произведение равным 0, если $g(t) = 0$, а $f(\pi(t)) = +\infty$). Всякая функция (со значениями в топологическом пространстве), определенная на X, λ_t-измерима для любого $t \in T$. Всякое отображение f пространства X в банахово пространство F λ_t-интегрируемо при любом $t \in T$ и $\int f(x)\, d\lambda_t(x) = f(\pi(t))\, g(t)$. Наконец, если f — произвольная числовая функция, определенная на X, то для того, чтобы f была λ_t-интегрируема, необходимо и достаточно, чтобы произведение $f(\pi(t))\, g(t)$ было конечно, и тогда $\int f(x)\, d\lambda_t(x) = f(\pi(t))\, g(t)$.

Определение 1. *Пусть* μ *— положительная мера на* T. *Говорят, что пара* (π, g) μ*-адаптирована, если выполняются следующие условия*:

1) *Функции* π *и* g μ*-измеримы.*

2) *Для любой функции* $f \in \mathscr{K}(X)$ *отображение* $t \mapsto f(\pi(t))\, g(t)$ *существенно* μ*-интегрируемо.*

Предложение 1. *Если пара* (π, g) μ*-адаптирована, то отображение* Λ: $t \mapsto \lambda_t = g(t)\, \varepsilon_{\pi(t)}$ *пространства* T *в* $\mathscr{M}_+(X)$ *скалярно существенно* μ*-интегрируемо, широко* μ*-измеримо и* μ*-согласовано. Обратно, если* Λ *скалярно существенно* μ*-интегрируемо и широко* μ*-измеримо, то функция* g μ*-измерима и сужение* π *на множество* S *тех* $t \in T$, *для которых* $g(t) \neq 0$, μ*-измеримо.*

В самом деле, предположим, что пара (π, g) μ-адаптирована; тогда для любой функции $f \in \mathscr{K}(X)$ функция $t \mapsto \langle f, \lambda_t \rangle = f(\pi(t))\, g(t)$ существенно μ-интегрируема. Покажем, что $t \mapsto \lambda_t$ широко μ-измеримо. Действительно, прежде всего отметим, что если π и g *непрерывны*, то отображение $t \mapsto \lambda_t$ *широко непрерывно*. В общем случае множество таких компактных подмножеств K из T, что сужения π и g на K непрерывны, μ-плотно (гл. IV (2-е изд.), § 5, п. 10, предл. 15); если K — такое множество, то сужение отображения $t \mapsto \lambda_t$ на K широко непрерывно, откуда получаем первое утверждение. Предложение 2, § 3, п. 1 показывает, что Λ μ-согласовано.

Обратно, предположим, что Λ скалярно существенно интегрируемо и широко μ-измеримо; тогда оно μ-согласовано (§ 3, п. 1, предл. 2). Поскольку функция 1 полунепрерывна снизу на X,

то функция $t \mapsto \lambda_t(1) = g(t)$ μ-измерима (§ 3, опр. 1). Стало быть, множество S измеримо (гл. IV (2-е изд.), § 5, п. 5, предл. 7). Множество $\mathfrak{K}$ тех компактов $K \subset S$, для которых $g \mid K$ непрерывно, а $\Lambda \mid K$ широко непрерывно, μ-плотно в S (гл. IV (2-е изд.), § 5, п. 10, предл. 15); следовательно, если $K \in \mathfrak{K}$, то сужение на K отображения $t \mapsto \varepsilon_{\pi(t)} = \frac{1}{g(t)} \lambda_t$ широко непрерывно, и это влечет непрерывность $\pi \mid K$ (гл. III (2-е изд.), § 1, п. 9, предл. 13). А поскольку $\mathfrak{K}$ μ-плотно в S, то сужение π на S измеримо.

Нам понадобится следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть T и X — топологические пространства и π — непрерывное собственное отображение* (Общая топ., гл. I (4-е изд.), § 10, опр. 1) *T в X. Пусть, далее, g — числовая функция, полунепрерывная снизу на T. И пусть для любого $x \in X$ через $f(x)$ обозначена нижняя грань функции $g(t)$ на множестве $\pi^{-1}(x)$* (если $\pi^{-1}(x) = \varnothing$, то нижняя грань равна $+\infty$; ср. Теория множеств, гл. III, § 1, п. 9). *Тогда f полунепрерывна снизу на X.*

Для любого (конечного) действительного числа a обозначим через B_a множество тех $x \in X$, для которых $f(x) \leqslant a$, а через A_a — множество тех $t \in T$, для которых $g(t) \leqslant a$; все сводится к доказательству того, что B_a замкнуто (Общая топ., гл. IV, § 6, п. 2, предл. 1). Но A_a замкнуто (та же ссылка), и собственное отображение π замкнуто (Общая топ., гл. I (4-е изд.), § 10, п. 1, предл. 1); стало быть, все сводится к доказательству того, что $\pi(A_a) = B_a$. Очевидное соотношение $f(\pi(t)) \leqslant g(t)$ для любого $t \in T$ влечет, что $\pi(A_a) \subset B_a$. Обратно, пусть $x \in B_a$; множество $\pi^{-1}(x)$ квазикомпактно (Общая топ., гл. I (4-е изд.), § 10, п. 2, теорема 1) и непусто, и значит, найдется такое $t \in \pi^{-1}(x)$, что $g(t) = \inf_{u \in \pi^{-1}(x)} g(u) = f(x)$ (Общая топ., гл. IV, § 6, п. 2, теорема 3); тогда имеем $t \in A_a$ и $\pi(t) = x$.

2. *Верхние интегралы от положительных функций относительно интеграла от точечных мер*

Мы сейчас покажем, что когда (π, g) есть μ-адаптированная пара, то можно уточнить полученные результаты, применяя предложения из § 3 к семейству $t \mapsto \lambda_t = g(t)\,\varepsilon_{\pi(t)}$, которое в силу предложения 1 является μ-согласованным.

Теорема 1. *Пусть* (π, g) — μ-*адаптированная пара и пусть* $\nu = \int g(t)\, \varepsilon_{\pi(t)}\, d\mu(t)$. *Для любой функции* $f \geqslant 0$ *на* X

$$\int^{\cdot} f(x)\, d\nu(x) = \int^{\cdot} f(\pi(t))\, g(t)\, d\mu(t). \tag{1}$$

А) Предположим вначале, что мера μ имеет компактный носитель K и что сужения на K функций g и π непрерывны. Согласно формуле (4), § 3, п. 1 имеем $\nu^{\cdot}(1) = \int\limits_K g(t)\, d\mu(t) < +\infty$, так что все меры, входящие в формулу (1), ограничены. Следовательно, можно в левой части заменить $\int^{\cdot}$ на $\int^{*}$. Учитывая формулу (6), § 3, п. 2, все сводится к доказательству того, что

$$\int^{*} f(x)\, d\nu(x) \leqslant \int^{\cdot} f(\pi(t))\, g(t)\, d\mu(t), \tag{2}$$

где символ $\int^{\cdot}$ в правой части может быть в свою очередь заменен на $\int^{*}$. Согласно определению верхнего интеграла достаточно доказать неравенство

$$\int^{*} f(x)\, d\nu(x) \leqslant \int^{*} h(t)\, d\mu(t) \tag{3}$$

для любой функции h, полунепрерывной снизу на T, мажорирующей функцию $t \mapsto f(\pi(t))\, g(t)$. Итак, пусть $\varepsilon > 0$ и пусть u — функция $(h + \varepsilon)/g$, которая полунепрерывна снизу на K. Если $t \in \pi^{-1}(\{x\}) \cap K$, то $u(t) \geqslant f(x)$: в случае $g(t) = 0$ это очевидно, ибо тогда $u(t) = +\infty$; в случае $g(t) > 0$

$$u(t)\, g(t) = h(t) + \varepsilon \geqslant f(\pi(t))\, g(t) = f(x)\, g(t),$$

откуда и следует требуемое неравенство. При этих условиях обозначим через $v(x)$ для любого $x \in X$ нижнюю грань функции $u(t)$ при $t \in \pi^{-1}(\{x\}) \cap K$. Функция v мажорирует f в силу изложенного выше, полунепрерывна на X в силу леммы 1 (примененной к сужению π на K) и $v(\pi(t))\, g(t) \leqslant h(t) + \varepsilon$ при любом $t \in K$ (напомним, что левая часть по соглашению равна нулю при $g(t) = 0$). Применим теперь к v формулу (4), § 3, п. 1.

Получаем

$$\int^* f(x)\,d\nu(x) \leqslant \int^* v(x)\,d\nu(x) =$$

$$= \int^* v(\pi(t))\,g(t)\,d\mu(t) \leqslant \int^* (h(t)+\varepsilon)\,d\mu(t) =$$

$$= \int^* h(t)\,d\mu(t) + \varepsilon\mu(1). \quad (4)$$

А поскольку μ ограничена и ε произвольно, отсюда следует неравенство (3).

B) Перейдем теперь к общему случаю. Отображение $t \mapsto (\pi(t), g(t))$ пространства T в $X \times \mathbf{R}_+$ μ-измеримо (гл. IV, § 5, п. 3, теорема 1), поэтому множество $\mathfrak{K}$ тех K из T сужения на которые отображений π и g непрерывны, μ-плотно (гл. IV 2-е изд.), § 5, п. 10, предл. 15). В силу предложения 4, § 2, п. 3 μ является суммой суммируемого семейства $(\mu_\alpha)_{\alpha\in A}$ мер несомых элементами из $\mathfrak{K}$; поскольку пара (π, g) μ_α-адаптирована при любом $\alpha \in A$, то можно обозначить через ν_α меру $\int g(t)\,\varepsilon_{\pi(t)}\,d\mu_\alpha(t)$. Тогда в силу A) имеем

$$\int^* f(x)\,d\nu_\alpha(x) = \int^* f(\pi(t))\,g(t)\,d\mu_\alpha(t). \quad (5)$$

Но ν_α образуют суммируемое семейство с суммой, равной ν (§ 3, п. 1, следствие из предл. 1). Стало быть в силу предложения 1, § 2, п. 1,

$$\int^* f(x)\,d\nu(x) = \sum_{\alpha\in A} \int^* f(x)\,d\nu_\alpha(x). \quad (6)$$

Аналогичное соотношение выполняется и для правой части формулы (5), и значит, формула (1) следует из формулы (5) суммированием по α.

Следствие. *Для того чтобы подмножество N из X было локально пренебрежимо относительно ν, необходимо и достаточно, чтобы пересечение множества $\pi^{-1}(N)$ и множества точек из T, в которых $g(t) > 0$, было локально пренебрежимо относительно μ.*

Предложение 2. *Пусть π — непрерывное собственное отображение T в X* (Общая топ., гл. I (4-е изд.), § 10, п. 1) *и g — числовая функция, непрерывная на T и такая, что $g(t) > 0$ для любого*

$t \in T$. Тогда пара (π, g) μ-адаптирована, и если положить

$$\nu = \int g(t)\, \varepsilon_{\pi(t)}\, d\mu(t),$$

то для любой числовой функции $f \geqslant 0$ на X

$$\int^* f(x)\, d\nu(x) = \int^* f(\pi(t))\, g(t)\, d\mu(t). \tag{7}$$

Ясно, что π и g μ-измеримы; кроме того, для любой функции $\psi \in \mathscr{K}(X)$ функция $\psi \circ \pi$ непрерывна и имеет компактный носитель, поскольку π — собственное отображение; стало быть, пара (π, g) μ-адаптирована, и при этом отображение $t \to g(t)\, \varepsilon_{\pi(t)}$ *широко непрерывно.*

Пусть h — такая полунепрерывная снизу функция на T, что $f(\pi(t))\, g(t) \leqslant h(t)$ при любом $t \in T$. Мы покажем, что

$$\int^* f(x)\, d\nu(x) \leqslant \int^* h(t)\, d\mu(t). \tag{8}$$

Отсюда, по определению верхнего интеграла, будет следовать неравенство

$$\int^* f(x)\, d\nu(x) \leqslant \int^* f(\pi(t))\, g(t)\, d\mu(t),$$

которое в соединении с неравенством (7) из § 3, п. 2 и доказывает (7).

Чтобы доказать (8), определим на X функцию $\overline{f}$ следующим образом: $\overline{f}(x)$ есть нижняя грань для $h(t)/g(t)$ на множестве $\pi^{-1}(x)$ (если $\pi^{-1}(x) = \varnothing$, то нижняя грань равна $+\infty$). Функция $\overline{f}$ обладает следующими свойствами:

1° $\overline{f}(x) \geqslant f(x)$ для любого $x \in X$ (поскольку $g(t) > 0$ для любого $t \in T$).

2° $\overline{f}(\pi(t))\, g(t) \leqslant h(t)$ для любого $t \in T$.

3° Функция $\overline{f}$ полунепрерывна снизу на основании леммы 1, поскольку h/g полунепрерывна снизу на T.

Следовательно, принимая во внимание предложение 2а) из § 3, п. 1, имеем:

$$\int^* f(x)\, d\nu(x) \leqslant \int^* \overline{f}(x)\, d\nu(x) = \int^* \overline{f}(\pi(t))\, g(t)\, d\mu(t) \leqslant \int^* h(t)\, d\mu(t),$$

и формула (8) доказана.

3. Измеримость относительно интеграла от точечных мер

Предложение 3. *Пусть* (π, g) — μ-*адаптированная пара и пусть* $\nu = \int g(t)\,\varepsilon_{\pi(t)}\,d\mu(t)$. *Пусть далее* f — *отображение* X *в топологическое пространство* G *и* S — (μ-*измеримое*) *множество точек* $t \in T$, *в которых* $g(t) > 0$. *Для того чтобы* f *было* ν-*измеримо, необходимо и достаточно, чтобы сужение* $f \circ \pi$ *на* S *было* μ-*измеримо.*

Предположим вначале, что f ν-измеримо. По условию, множество $\mathfrak{K}$ таких компактных подмножеств K из S, что сужение π на K непрерывно, μ-плотно в S (гл. IV (2-е изд.), § 5, п.10, предл. 15). Стало быть, чтобы показать, что сужение на S функции $f \circ \pi$ μ-измеримо, достаточно доказать, что для любого $K \in \mathfrak{K}$ множество компактных подмножеств H из K, таких, что сужение $f \circ \pi$ на H непрерывно, μ-плотно в K (гл. IV (2-е изд.), § 5, п. 8, предл. 13). Но по условию, существует разбиение компактного множества $\pi(K)$, состоящее из ν-пренебрежимого множества N и последовательности таких компактных множеств (C_n), что сужение f на каждое из C_n непрерывно. При этих условиях $K \cap \pi^{-1}(N)$ и множества $K \cap \pi^{-1}(C_n)$ образуют разбиение множества K; но $K \cap \pi^{-1}(N)$ μ-пренебрежимо в силу следствия из теоремы 1, п. 2, а множества $K \cap \pi^{-1}(C_n)$ компактны и сужение функции $f \circ \pi$ на каждое из последних непрерывно, чем и доказано, что сужение на S функции $f \circ \pi$ μ-измеримо.

Обратно, предположим, что условие предложения выполнено; чтобы показать, что f ν-измеримо, достаточно доказать, что множество $\mathfrak{L}$ компактных подмножеств L из X, таких, что сужение f на L непрерывно, ν-плотно (гл. IV (2-е изд.), § 5, п. 10, предл. 15). Пусть N — такое подмножество из X, что $N \cap L$ ν-пренебрежимо для любого $L \in \mathfrak{L}$; покажем, что N локально ν-пренебрежимо. Для этого мы должны показать, что $\pi^{-1}(N) \cap S$ локально μ-пренебрежимо (следствие из теоремы 1, п. 2). Но множество $\mathfrak{H}$ таких компактных подмножеств H из S, что сужения на H отображений π и $f \circ \pi$ непрерывны, по условию μ-плотно в S (гл. IV (2-е изд.), § 5, п. 10, предл. 15). Стало быть, нам достаточно доказать, что $\pi^{-1}(N) \cap H$ μ-пренебрежимо для любого $H \in \mathfrak{H}$. Но $\pi(H)$ компактно и может быть отождествлено с факторпространством прост-

ранства H по отношению эквивалентности $\pi(t) = \pi(t')$, причем π отождествляется с каноническим отображением H на это факторпространство (Общая топ., гл. I (4-е изд.), § 5, п. 2, предл. 3). А так как сужение $f \circ \pi$ на H непрерывно, то сужение f на $\pi(H)$ непрерывно, или, иначе говоря, $\pi(H) \in \mathfrak{L}$, и следовательно, $N \cap \pi(H)$ ν-пренебрежимо. В силу следствия из теоремы 1, п. 2 множество $\pi^{-1}(N \cap \pi(H)) \cap S$ локально μ-пренебрежимо; значит, то же самое имеет место для множества

$$H \cap \pi^{-1}(N) \subset \pi^{-1}(N \cap \pi(H)) \cap S;$$

но поскольку H компактно, $H \cap \pi^{-1}(N)$ μ-пренебрежимо, чем и завершается доказательство.

Замечание. Если f — отображение X в банахово пространство F, то все сводится к утверждению, что сужение отображения $f \circ \pi$ на S μ-измеримо, или что функция $(f \circ \pi)\, g$ (определенная на T) μ-измерима, поскольку g μ-измерима, не обращается в нуль на S и равна нулю на $T - S$ (гл. IV (2-е изд.), § 5, п. 10, предл. 15).

4. *Интегрирование функций со значениями в банаховом пространстве относительно интеграла от точечных мер*

Теорема 2. *Пусть* (π, g) — μ-*адаптированная пара и* $\nu = \int g(t)\, \varepsilon_{\pi(t)}\, d\mu(t)$. *Пусть, далее,* f *есть функция на* X *со значениями в банаховом пространстве* F *или в* $\overline{\mathbf{R}}$. *Для того чтобы* f *была существенно* ν-*интегрируема, необходимо и достаточно, чтобы отображение* $t \mapsto f(\pi(t))\, g(t)$ *было существенно* μ-*интегрируемо, и тогда*

$$\int f(x)\, d\nu(x) = \int f(\pi(t))\, g(t)\, d\mu(t). \tag{9}$$

Предположим, кроме того, что π — *непрерывное собственное отображение, а также что* g *непрерывна и* $g(t) > 0$ *при любом* $t \in T$. *Тогда для того чтобы* f *была* ν-*интегрируема, необходимо и достаточно, чтобы отображение* $t \mapsto f(\pi(t))\, g(t)$ *было* μ-*интегрируемо.*

А) Мы начнем с изучения случая, когда мера μ имеет носителем компакт K, на котором g ограничена. Тогда меры μ и ν ограничены и можно заменить в формулировке «существенно интегри-

руема» на «интегрируема». Предположим, что f ν-интегрируема: тогда функция $f(\pi(t))\,g(t)$ μ-интегрируема, и соотношение (9) выполняется в силу теоремы 1, § 3, п. 3. Обратно, предположим, что $f(\pi(t))\,g(t)$ μ-интегрируема: тогда f ν-измерима (п. 3, предл. 3 и замечание), и

$$\int^{\bullet} |f(x)|\,d\nu(x) = \int^{\bullet} |f(\pi(t))|\,g(t)\,d\mu(t) < +\infty$$

(п. 2, теорема 1): стало быть, f существенно ν-интегрируема (§ 1, п. 3, предл. 9), и значит, ν-интегрируема. После этого теорема 1, § 3, п. 3 влечет (9).

B) Перейдем к общему случаю. Пусть $\mathfrak{K}$ — множество таких компактных подмножеств K из T, что $g \mid K$ непрерывно; $\mathfrak{K}$ μ-плотно (гл. IV (2-е изд.), § 5, п. 10, предл. 15), и стало быть, мера μ является суммой семейства $(\mu_\alpha)_{\alpha\in A}$ мер, несомых элементами из $\mathfrak{K}$ (§ 2, п. 3, предл. 4). Пара (g, π), очевидно, μ_α-адаптирована при любом $\alpha \in A$, и мера ν является суммой семейства мер $\nu_\alpha = \int \varepsilon_{\pi(t)}\,g(t)\,d\mu_\alpha(t)$ (§ 3, п. 1, предл. 12). Применив рассуждения из A) к мерам μ_α, ν_α, получим первую часть теоремы, воспользовавшись предложением 3, § 2, п. 2.

Для того чтобы функция f (соотв. $t \mapsto f(\pi(t))\,g(t)$) была интегрируема относительно ν (соотв. относительно μ), необходимо и достаточно, чтобы она была существенно интегрируема и чтобы $\int^{*} |f(x)|\,d\nu(x) < +\infty$ (соотв. $\int^{*} |f(\pi(t))|\,g(t)\,d\mu(t) < +\infty$). Вторая часть теоремы сразу же вытекает из первой части и из предложения 2.

З а м е ч а н и е. Пусть (π, g) — μ-адаптированная пара, π' — такое отображение пространства T в X и $g' \geqslant 0$ — такая конечная числовая функция, определенная на T, что π' (соотв. g') равно π (соотв. g) локально почти всюду относительно μ. Тогда (π', g') μ-адаптирована, $\lambda_t = g(t)\,\varepsilon_{\pi(t)}$ и $\lambda'_t = g'(t)\,\varepsilon_{\pi'(t)}$ равны локально почти всюду и $\int g(t)\,\varepsilon_{\pi(t)}\,d\mu(t) = \int g'(t)\,\varepsilon_{\pi'(t)}\,d\mu(t)$.

Если теперь π' и g' определены лишь локально почти всюду (относительно μ) и существует такая μ-адаптированная пара (π, g), что π' (соотв. g') равно π (соотв. g) локально почти всюду, то пару (π', g') снова условимся называть μ-адаптированной

и будем полагать

$$\int g'(t)\,\varepsilon_{\pi'(t)}\,d\mu(t) = \int g(t)\,\varepsilon_{\pi(t)}\,d\mu(t)$$

(ср. § 3, п. 3, замечание). Формулировки теорем 1 и 2 и предложения 3 остаются справедливыми, если предположить, что π и g определены лишь локально почти всюду.

Упражнения

1) Пусть T и X — компактные пространства, π — непрерывное отображение T в X и g — конечная непрерывная числовая функция на T. И пусть для любого $x \in X$ через $f(x)$ обозначена верхняя грань функции $g(t)$ на множестве $\pi^{-1}(x)$. Построить пример, чтобы f не была непрерывной. (Взять $T = [0, 1]$ из $\mathbf{R}$, а в качестве π взять каноническое отображение T на факторпространство X, полученное отождествлением 0 и 1 в T.)

2) Пусть X и ν — локально компактное пространство и мера, определенные в упр. 5, гл. IV (2-е изд.), § 1; и пусть f — характеристическая функция множества D точек $(0, y)$ в X. Показать, что в обоих следующих ниже случаях

$$\nu = \int g(t)\,\varepsilon_{\pi(t)}\,d\mu(t)$$

и

$$\int^* f(\pi(t))\,g(t)\,d\mu(t) < \int^* f(x)\,d\nu(x) = +\infty.$$

a) Пусть $T = X$ и μ — мера, определенная массой $\log n/n^3$ в каждой из точек $(1/n,\ k/n^2)$. Возьмем в качестве π тождественное отображение; g определяется условиями:

$$g(0,\ y) = 0,\ g(1/n,\ k/n^2) = 1/\log n;$$

g непрерывно, но не выполняется $g(t) > 0$ при всех $t \in T$.

b) Пусть T есть множество X, наделенное дискретной топологией, и μ — мера, определенная посредством тех же масс, что и ν. Возьмем $g(t) = 1$ при любом t, а в качестве π берем тождественное отображение; последнее будет непрерывным, но не будет собственным.

§ 5. Меры, определенные при помощи числовых плотностей

1. *Локально интегрируемые функции*

Предложение 1. *Пусть g есть функция, определенная локально почти всюду на T (относительно положительной меры μ) и принимающая значения в банаховом пространстве F* (соотв. *в* $\bar{\mathbf{R}}$). *Тогда следующие свойства эквивалентны:*

a) *Для любой точки* $t \in T$ *существует такая окрестность* V, *что функция* $g\varphi_V$ μ-*интегрируема.*

b) *Функция* g μ-*измерима, и для любого компактного множества* $K \subset T$ *имеем* $\int^* |g|\,\varphi_K\,d\mu < +\infty$.

c) *Для любой числовой функции* $h \in \mathscr{K}(T)$ *функция* gh μ-*интегрируема.*

Покажем, что a) влечет b); действительно, на основании принципа локализации (гл. IV, § 5, п. 2, предл. 4) функция g измерима. С другой стороны, для любого $t \in K$, по условию, в T найдется такая окрестность V_t, что функция $g\varphi_{V_t}$ интегрируема; стало быть, K может быть покрыто конечным числом таких окрестностей V_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$, чтобы функции $g\varphi_{V_i}$ были интегрируемы. А так как $|g|\,\varphi_K = \sum_{i=1}^{n} |g|\,\varphi_{V_i}$, то $\int^* |g|\,\varphi_K\,d\mu < +\infty$.

Далее, b) влечет c), ибо в этом случае функция gh измерима, и если L есть компактный носитель h, то $|gh| \leqslant \|h\|\,|g|\,\varphi_L$, и значит, по условию, имеем $\int^* |gh|\,d\mu < +\infty$; таким образом, согласно критерию интегрируемости (гл. IV, § 5, п. 6, теорема 5) gh интегрируема.

Наконец, c) влечет a). В самом деле, для любого $t \in T$ пусть V есть компактная окрестность точки t. Существует непрерывное отображение h пространства T в $[0, 1]$, равное 1 на V и имеющее компактный носитель (гл. III (2-е изд.), § 1. п. 2, лемма 1); по условию gh интегрируема, и значит, интегрируема и $g\varphi_V = (gh)\,\varphi_V$ (гл. IV, § 5, п. 6, следствие 3 из теоремы 5).

Определение 1. *Говорят, что функция* g, *определенная локально почти всюду на* T (*относительно положительной меры* μ) *со значениями в банаховом пространстве* F (соотв. *в* $\overline{\mathbf{R}}$), *локально интегрируема относительно* μ (*или локально* μ-*интегрируема*), *если она удовлетворяет условиям* a), b), c) *предложения* 1. *Если* θ — *комплексная мера, то говорят, что функция* g, *определенная локально* θ-*почти всюду, локально* θ-*интегрируема, если она локально интегрируема относительно положительной меры* $|\theta|$.

Если g локально θ-интегрируема, то всякая функция, равная g локально почти всюду, локально интегрируема. Ясно, что

сумма двух локально интегрируемых функций локально интегрируема. Функции со значениями в F, *определенные всюду* и локально интегрируемые относительно θ, образуют векторное пространство, обозначаемое $\mathscr{L}^1_{\mathrm{loc}}(T, \theta; F)$; когда $F = \mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$, упоминание F часто опускается, если не может возникнуть путаницы. Это пространство будет наделено (когда не оговаривается противное) топологией, определенной полунормами $g \mapsto \int |g\varphi_K| \, d\,|\theta|$, где индекс K пробегает множество компактов из T. Ассоциированное отделимое пространство, являющееся факторпространством пространства $\mathscr{L}^1_{\mathrm{loc}}(T, \theta; F)$ по подпространству $\mathscr{N}^\infty(F)$ отображений, локально почти всюду обращающихся в нуль, обозначается $L^1_{\mathrm{loc}}(T, \theta; F)$. Пространства $L^1_{\mathrm{loc}}(T, \theta; F)$ и $L^1_{\mathrm{loc}}(T, |\theta|; F)$ совпадают.

Можно показать, что только что определенные топологические векторные пространства *полны* (упр. 31).

Всякая измеримая функция g, существенно ограниченная на любом компактном множестве, локально интегрируема. Для любого числа p, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, всякая функция $g \in \mathscr{L}^p_F$ локально интегрируема; в самом деле, любая функция $h \in \mathscr{K}(T)$ принадлежит $\mathscr{L}^q$ (где q — сопряженное с p), и значит, функция gh интегрируема (гл. IV (2-е изд.), § 6, п. 4, следствие 4 из теоремы 2).

Пусть F, G, H — банаховы пространства и $(u, v) \mapsto \Phi(u, v)$ — непрерывное билинейное отображение $F \times G$ в H. Если f локально интегрируема и принимает свои значения в F и если $g \in \mathscr{L}^\infty_G$, то $\Phi(f, g)$ локально интегрируемо (гл. IV, § 6, п. 4, следствие 1 из теоремы 2).

2. *Меры, определенные при помощи числовых плотностей*

Пусть g — положительная числовая функция, определенная локально μ-почти всюду на T и локально μ-интегрируемая; тогда множество тех t, в которых $g(t) = +\infty$, локально μ-пренебрежимо, поскольку $g\varphi_K$ μ-интегрируема для любого компакта K (гл. IV, § 2, п. 3, предл. 7). Пусть теперь g' — локально интегрируемая положительная *конечная* функция, равная g локально μ-почти всюду; положим $\lambda'_t = g'(t)\,\varepsilon_t$. Отображение $t \mapsto \lambda'_t$

пространства T в $\mathscr{M}_+(T)$ широко μ-измеримо и скалярно существенно интегрируемо (или, еще, пара (I, g'), где I — тождественное отображение пространства T, μ-адаптирована); интеграл $\nu = \int \lambda'_t \, d\mu(t)$ не зависит от функции g', локально почти всюду равной g и используемой при определении мер λ'_t. Эта мера ν определена условием

$$\int f(t)\, d\nu(t) = \int f(t)\, g(t)\, d\mu(t) \quad \text{для} \quad f \in \mathscr{K}(T). \tag{1}$$

Если теперь θ — комплексная мера и если u — комплексная функция (или функция со значениями в $\overline{\mathbf{R}}$), определенная локально θ-почти всюду и локально интегрируемая относительно θ, то можно написать

$$\begin{aligned} \mu &= g_1 - g_2 + i(g_3 - g_4), \\ \theta &= \mu_1 - \mu_2 + i(\mu_3 - \mu_4), \end{aligned} \tag{2}$$

где $\mu_1 = (\operatorname{Re}\theta)^+$, $\mu_2 = (\operatorname{Re}\theta)^-$, $\mu_3 = (\operatorname{Im}\theta)^+$, $\mu_4 = (\operatorname{Im}\theta)^-$ (гл. III (2-е изд.), § 1) и где g_1, g_2, g_3, g_4 — аналогичные обозначения; поскольку $|\mu|$ локально $|\theta|$-интегрируема, то каждая из положительных функций g_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ локально интегрируема относительно каждой положительной меры μ_j $(j = 1, 2, 3, 4)$, так что отображение

$$f \mapsto \int f(t)\, u(t)\, d\theta(t)$$

есть комплексная мера на $\mathscr{K}(T)$.

Определение 2. *Пусть θ — комплексная мера и пусть u — комплексная функция (или функция со значениями в $\overline{\mathbf{R}}$), определенная локально θ-почти всюду и локально θ-интегрируемая. Говорят, что комплексная мера $f \mapsto \int fu\, d\theta$ на T есть произведение меры θ на функцию u, или мера с плотностью u относительно θ, и обозначают ее $u \cdot \theta$.*

Всякая комплексная мера, являющаяся произведением положительной меры μ на локально μ-интегрируемую функцию, называется мерой с базисом μ.

Соотношение $\eta = u \cdot \theta$ записывается еще символически в виде

$$d\eta(t) = u(t)\, d\theta(t).$$

Когда u всюду определена и непрерывна, то мы возвращаемся к определению, приведенному в гл. III (2-е изд.), § 1, п. 4. Ясно, что если u_1 и u_2 локально θ-интегрируемы, то $(u_1 + u_2)\cdot\theta = u_1\cdot\theta + u_2\cdot\theta$. Точно так же, если θ_1 и θ_2 — две меры на T и если u — функция, локально интегрируемая относительно θ_1 и θ_2, то u локально интегрируема относительно $\theta_1 + \theta_2$, и мы имеем $u\cdot(\theta_1 + \theta_2) = u\cdot\theta_1 + u\cdot\theta_2$.

В дальнейшем мы будем ограничиваться случаем всюду определенных функций; распространение на функции, определенные локально почти всюду, всегда очевидное, предоставляется читателю.

Следующее предложение позволяет в большинстве случаев сводить случай комплексных мер к случаю положительных мер.

Предложение 2. *Пусть* θ *— комплексная мера, а* u *— комплексная локально* θ*-интегрируемая функция; тогда*

$$|u\cdot\theta| = |u|\cdot|\theta|. \tag{3}$$

Установим вначале вспомогательный результат:

Лемма 1. *Пусть* θ *— комплексная мера и пусть* f *— элемент из* $\overline{\mathscr{L}}^1_{\mathbf{C}}(T, \theta)$. *Тогда*

$$\langle|\theta|, |f|\rangle = \sup_{c\in\mathscr{K}_1} |\langle\theta, cf\rangle| = \sup_{c\in\mathscr{B}_1} |\langle\theta, cf\rangle|, \tag{4}$$

где $\mathscr{K}_1$ (соотв. $\mathscr{B}_1$) *означает множество непрерывных комплексных функций с с компактным носителем* (соотв. *борелевских*), *удовлетворяющих условию* $|c| \leqslant 1$.

Изучим сначала случай, когда $f \in \mathscr{K}(T; \mathbf{C})$. Очевидно, что $\sup_{c\in\mathscr{K}_1} |\langle\theta, cf\rangle| \leqslant \sup_{c\in\mathscr{B}_1} |\langle\theta, cf\rangle| \leqslant \langle|\theta|, |f|\rangle$ (гл. IV, § 4, п. 2, предл. 2). С другой стороны, пусть g — такой элемент из $\mathscr{K}(T; \mathbf{C})$, что $|g| \leqslant |f|$; g есть равномерный предел последовательности (g_n) элементов из $\mathscr{K}(T; \mathbf{C})$, носители которых содержатся в открытом множестве U, состоящем из тех t, для которых $f(t) \neq 0$, и можно, очевидно, предположить, что $|g_n| \leqslant |f|$ для любого n. Положим $c_n(t) = g_n(t)/f(t)$ для $t \in U$ и $c_n(t) = 0$ для $t \notin U$; имеем $c_n \in \mathscr{K}_1$, $g = \lim_{n\to\infty} c_n f$, а значит, $|\langle\theta, g\rangle| =$

$= \lim_{n\to\infty} |\langle\theta, c_n f\rangle|$, и, окончательно,

$$\sup_{|g|\leqslant|f|,\ g\in\mathscr{K}(T;\,\mathbf{C})} |\langle\theta, g\rangle| \leqslant \sup_{c\in\mathscr{K}_1} |\langle\theta, cf\rangle|.$$

Заметив, что левая часть этого неравенства равна $\langle|\theta|, |f|\rangle$ (гл. III (2-е изд.), § 1, п. 6, формула (12)), получаем требуемое.

Обозначим теперь через f элемент из $\overline{\mathscr{L}}^1_{\mathbf{C}}(\theta)$ и покажем, что (2) снова выполняется: достаточно убедиться в том, что все три части этого соотношения непрерывно зависят от f в топологии пространства $\overline{\mathscr{L}}^1_{\mathbf{C}}(\theta)$, поскольку они совпадают на плотном подпространстве $\mathscr{K}(T;\mathbf{C})$. Это сразу же вытекает из следующих неравенств, где f и f' обозначают элементы из $\overline{\mathscr{L}}^1_{\mathbf{C}}(\theta)$:

$$|\langle|\theta|, |f|\rangle - \langle|\theta|, |f'|\rangle| \leqslant \langle|\theta|, |f-f'|\rangle = N_1(f-f'),$$
$$|\langle\theta, cf\rangle - \langle\theta, cf'\rangle| \leqslant \langle|\theta|, |c|\,|f-f'|\rangle \leqslant N_1(f-f')$$

для любой $c\in\mathscr{B}_1$. Тем самым лемма доказана.

Перейдем к доказательству предложения 2: применим лемму к функции uh, где h принадлежит $\mathscr{K}_+(T)$. Получим:

$$\langle|\theta|, |uh|\rangle = \sup_{c\in K_1} |\langle\theta, cuh\rangle| = \sup_{c\in K_1} |\langle u\cdot\theta, ch\rangle| = \langle|u\cdot\theta|, h\rangle.$$

Но первый член этой цепочки равенств равен также

$$\langle|\theta|, |u|h\rangle = \langle|u|\cdot|\theta|, h\rangle.$$

Стало быть, меры $|u|\cdot|\theta|$ и $|u\cdot\theta|$ равны.

Следствие. *Пусть g_1 и g_2 — числовые локально μ-интегрируемые функции; тогда*

$$\inf(g_1\cdot\mu, g_2\cdot\mu) = \inf(g_1, g_2)\cdot\mu;$$
$$\sup(g_1\cdot\mu, g_2\cdot\mu) = \sup(g_1, g_2)\cdot\mu.$$

В частности, если g — числовая локально μ-интегрируемая функция, то

$$(g\cdot\mu)^+ = g^+\cdot\mu; \quad (g\cdot\mu)^- = g^-\cdot\mu.$$

Это вытекает сразу же из предложения 2 и из формул (6) гл. II, § 1, п. 1.

3. *Интегрирование относительно меры, определенной при помощи плотности*

Во всех формулировках этого пункта через g обозначается положительная числовая функция, определенная всюду и локально μ-интегрируемая, через θ — комплексная мера, а через u — локально θ-интегрируемая комплексная функция.

Замечания п. 2 показывают, что результаты § 4 применимы к мере $\nu = g\cdot\mu = \int g(t)\,\varepsilon_t\,d\mu(t)$ (хотя мера $g(t)\,\varepsilon_t$ определена лишь для $g(t) \neq +\infty$). Таким образом, получаем следующее предложение.

Предложение 3. *Для любой числовой функции $f \geqslant 0$, определенной на T,*

$$\int^{\bullet} f\,d\nu = \int^{\bullet} (fg)\,d\mu. \tag{5}$$

Это следует из теоремы 1, § 4, п. 2.

Следствие 1. *Для того чтобы функция f со значениями в банаховом пространстве или в $\overline{\mathbf{R}}$ была локально пренебрежима относительно меры $u\cdot\theta$, необходимо и достаточно, чтобы uf была локально пренебрежима относительно θ.*

Утверждение, что f (соотв. uf) локально пренебрежимо относительно $u\cdot\theta$ (соотв. относительно θ), эквивалентно утверждению, что $|f|$ (соотв. $|u|\cdot|f|$) локально пренебрежимо относительно $|u\cdot\theta|$ (соотв. относительно $|\theta|$). Стало быть, учитывая предложение 2, п. 2, все сводится к случаю, когда f, u, θ положительны, а тогда утверждение вытекает сразу же из предложения 3.

Следствие 2. *Пусть u_1 и u_2 — комплексные локально θ-интегрируемые функции. Для того чтобы $u_1\cdot\theta = u_2\cdot\theta$, необходимо и достаточно, чтобы u_1 и u_2 были равны локально почти всюду.*

Все сразу же сводится к доказательству того, что равенство $u\cdot\theta = 0$ влечет $u(t) = 0$ локально почти всюду; но равенство $u\,\theta = 0$ означает, что функция 1 локально пренебрежима относительно меры $u\cdot\theta$. Тогда применимо следствие 1.

Следствие 3. *Пусть u — комплексная функция, локально интегрируемая относительно положительной меры μ. Для того чтобы $u\cdot\mu$ была положительной мерой, необходимо и достаточно, чтобы $u(t) \geqslant 0$ локально почти всюду.*

В самом деле, $u\cdot\mu$ положительна в том и только том случае, если

$$u\cdot\mu = |u\cdot\mu| = |u|\cdot\mu$$

(предл. 2), а это эквивалентно тому, что $u = |u|$ локально почти всюду (следствие 2).

Предложение 4. *Для того чтобы отображение f пространства T в топологическое пространство G было измеримо относительно меры $u\cdot\theta$, необходимо и достаточно, чтобы сужение f на θ-измеримое множество S тех t, для которых $u(t) \neq 0$, было θ-измеримо.*

Когда u и θ положительны, это следует сразу же из предложения 3, § 4, п. 3. После этого, в силу предложения 2, результат распространяется на случай комплексных u и θ.

Следствие. *Пусть f — функция на T со значениями в банаховом пространстве F или в $\overline{\mathbf{R}}$. Для того чтобы f была $(u\cdot\theta)$-измерима, необходимо и достаточно, чтобы функция uf была θ-измерима.*

В самом деле, uf есть нуль-продолжение функции $(uf)|S$ на T.

Теорема 1. *Пусть f — функция на T со значениями в банаховом пространстве F или в $\overline{\mathbf{R}}$. Для того чтобы f была существенно интегрируема относительно меры $\eta = u\cdot\theta$, необходимо и достаточно, чтобы функция uf была существенно θ-интегрируема, и тогда*

$$\int f\,d\eta = \int (uf)\,d\theta. \tag{6}$$

Предположим, кроме того, что функция u непрерывна и что $u(t) \neq 0$ при всех $t \in T$; тогда f интегрируема относительно меры η в том и только том случае, если uf интегрируема относительно θ.

Случай, когда u и θ положительны, следует сразу же из теоремы 2, § 4, п. 4. Первое и последнее утверждения теоремы вытекают отсюда непосредственно, ибо f существенно интегрируема (соотв. интегрируема) относительно $\eta = u\cdot\theta$ в том и только том случае, если она существенно интегрируема (соотв. интегрируема)

относительно $|\eta| = |u| \cdot |\theta|$. Наконец, предположим, что f существенно интегрируема относительно η (а значит, и относительно $|\eta|$); воспользуемся разложением (2): f существенно интегрируема относительно каждой из мер $\eta_{ij} = g_i \mu_j$ ($i = 1, 2, 3, 4$, $j = 1, 2, 3, 4$), поскольку последние мажорированы посредством $|\eta|$. Имеем

$$\int f \, d\eta_{ij} = \int g_i f \, d\mu_j.$$

Отсюда немедленно вытекает формула (6).

Следствие. *Для того чтобы мера $u \cdot \theta$ была ограничена, необходимо и достаточно, чтобы функция u была существенно θ-интегрируема.*

Пример. Пусть A — некоторое подмножество из T; для того чтобы φ_A была локально μ-интегрируема, необходимо и достаточно, чтобы множество A было μ-*измеримо*. Допустим, что это условие выполнено; положим $\nu = \varphi_A \cdot \mu$; тогда для любой числовой функции $f \geqslant 0$, определенной на T, имеем

$$\int^{\bullet} f \, d\nu = \int^{\bullet} f \varphi_A \, d\mu;$$

это обозначается также $\int_A^{\bullet} f \, d\mu$ (ср. гл. IV, § 5, п. 6). Для того чтобы отображение g пространства T в топологическое пространство G было ν-измеримо, необходимо и достаточно, чтобы сужение g на A было μ-измеримо. Для того чтобы отображение f пространства T в банахово пространство F или в $\overline{\mathbf{R}}$ было существенно ν-интегрируемо, необходимо и достаточно, чтобы $f\varphi_A$ было существенно μ-интегрируемо, и мы имеем

$$\int f \, d\nu = \int f \varphi_A \, d\mu;$$

это обозначается также $\int_A f \, d\mu$. Отметим, что если два отображения пространства T в G (соотв. F, $\overline{\mathbf{R}}$) совпадают на A, то для того, чтобы одно из них было ν-измеримо (соотв. существенно ν-интегрируемо), необходимо и достаточно, чтобы другое было тоже таковым. Если теперь g есть отображение в G некоторого произ-

вольного подмножества $B \supset A$ из T, то говорят, что g μ-*измеримо на* A, если какое-нибудь продолжение на T сужения g на A ν-измеримо, что сводится к утверждению, что сужение g на A μ-измеримо. Говорят, что отображение f множества B в банахово пространство F или в $\overline{\mathbf{R}}$ *существенно* μ-*интегрируемо на* A, если какое-нибудь продолжение $\overline{f}$ на T сужения f на A существенно ν-интегрируемо; тогда полагают

$$\int_A f\,d\mu = \int_A \overline{f}\,d\mu = \int \overline{f}\,\varphi_A\,d\mu$$

и говорят, что $\int_A f\,d\mu$ есть *интеграл от* f *по* A (или *распространен* на A). Если $f \geqslant 0$ — числовая функция на $B \supset A$, то точно так же определяются $\int_A^* f\,d\mu$ и $\int_A^\cdot f\,d\mu$. Наконец, говорят, что числовая функция g, определенная на $B \supset A$, *локально* μ-*интегрируема на* A, если некоторое продолжение $\overline{g}$ на T сужения g на A локально ν-интегрируемо: это равносильно утверждению, что для любого компактного подмножества K из T функция $\overline{g}\varphi_{K\cap A}$ μ-интегрируема.

4. *Свойства произведения относительно обычных операций*

Предложение 5. *Пусть* $(\lambda_\alpha)_{\alpha\in A}$ — *семейство положительных мер на* T, *фильтрующееся по отношению* $\leqslant$ *и имеющее в* $\mathscr{M}(T)$ *верхнюю грань* λ. *Для того чтобы положительная числовая функция* g *была локально* λ-*интегрируема, необходимо и достаточно, чтобы* g *была локально* λ_α-*интегрируема при любом* $\alpha \in A$ *и чтобы семейство* $(g\cdot\lambda_\alpha)$ *было мажорировано в* $\mathscr{M}(T)$; *тогда*

$$g\cdot\lambda = \sup_{\alpha\in A} g\cdot\lambda_\alpha.$$

Необходимость очевидна. Обратно, предположим, что g локально интегрируема относительно каждой меры λ_α и что семейство $(g\cdot\lambda_\alpha)_{\alpha\in A}$ мажорировано; обозначим через λ' его верхнюю грань. Тогда функция g λ-измерима (§ 1, п. 4, следствие 2 из предл. 11); кроме того, для любой функции $h \in \mathscr{K}_+(T)$ имеем:

$$\int^\cdot (hg)\,d\lambda = \sup_{\alpha\in A} \int^\cdot (hg)\,d\lambda_\alpha = \sup_{\alpha\in A} \int^\cdot h\,d(g\cdot\lambda_\alpha) = \int^\cdot h\,d\lambda'$$

(§ 1, п. 4, предл. 11). Из этого прежде всего следует, что левая часть конечна при любом h, так что g локально λ-интегрируема; стало быть, можно заменить символ $\int^*$ на $\int$, и тогда формула запишется в виде $\int h\, d\,(g\cdot\lambda) = \int h\, d\lambda'$. Отсюда следует, что $g\cdot\lambda = \lambda'$, чем и завершается доказательство.

Следствие. *Предположим, что* μ *есть сумма семейства* $(\mu_\alpha)_{\alpha\in A}$ *мер на* T. *Для того чтобы положительная числовая функция* g, *определенная на* T, *была локально* μ-*интегрируема, необходимо и достаточно, чтобы она была локально* μ_α-*интегрируема при любом* $\alpha \in A$ *и чтобы семейство* $(g\cdot\mu_\alpha)_{\alpha\in A}$ *было суммируемо. В этом случае*

$$g\cdot\mu = \sum_{\alpha\in A} g\cdot\mu_\alpha. \tag{7}$$

Пусть $(g_\alpha)_{\alpha\in A}$ — семейство положительных μ-измеримых функций на T. Пусть далее A_α — множество тех $t \in T$, в которых $g_\alpha(t) \neq 0$. Будем говорить, что семейство (g_α) *локально счетно*, если семейство (A_α) локально счетно (гл. IV (2-е изд.), § 5, п. 9); это сводится к утверждению, что для любого компакта K из T множество тех $\alpha \in A$, для которых $g_\alpha \mid K$ отлично от нуля, счетно.

Предложение 6. *Пусть* (g_α) — *локально счетное семейство локально* μ-*интегрируемых положительных числовых функций на* T. *Для того чтобы функция* $g = \sum_{\alpha\in A} g_\alpha$ *была локально* μ-*интегрируема, необходимо и достаточно, чтобы семейство мер* $(g_\alpha\cdot\mu)_{\alpha\in A}$ *было суммируемо, и в этом случае*

$$g\cdot\mu = \sum_{\alpha\in A} g_\alpha\cdot\mu. \tag{8}$$

Ясно, что g μ-измерима (гл. IV (2-е изд.), § 5, п. 10, предл. 16). Для того чтобы g была локально μ-интегрируема, необходимо и достаточно, стало быть, чтобы $\mu^*(gf)$ была конечна для любого $f \in \mathscr{K}_+(T)$. Но поскольку множество тех $\alpha \in A$, при которых $g_\alpha f \neq 0$, счетно, мы имеем $\mu^*(gf) = \sum_{\alpha\in A} \mu^*(g_\alpha f)$ (§ 1, п. 1, следствие из предл. 2). Положим $\nu_\alpha = g_\alpha\cdot\mu$; условие $\mu^*(gf) < +\infty$ эквивалентно условию $\sum_{\alpha\in A} \nu_\alpha(f) < +\infty$; иными словами, g локально

μ-интегрируема в том и только том случае, если семейство (ν_α) суммируемо. Если теперь обозначить через ν сумму этого семейства, то мы придем к равенству $\nu(f) = \mu^*(gf)$, эквивалентному (8).

Следствие. *Пусть (g_n) — последовательность числовых функций, локально μ-интегрируемых и таких, что последовательность мер $g_n \cdot \mu$ возрастает. Для того чтобы эта последовательность была мажорирована в упорядоченном векторном пространстве $\mathscr{M}(T)$ мер на T, необходимо и достаточно, чтобы функция $g = \sup g_n$ была локально μ-интегрируема; тогда верхняя грань в $\mathscr{M}(T)$ последовательности $(g_n \cdot \mu)$ есть мера $g \cdot \mu$.*

Достаточно применить предложение 6 к (положительным локально почти всюду) функциям $g'_n = g_{n+1} - g_n$.

Предложение 7. *Пусть X — локально компактное пространство, счетное в бесконечности, и пусть $t \mapsto \lambda_t$ — μ-согласованное отображение T в $\mathscr{M}_+(X)$. Пусть, далее, g — положительная числовая функция на X, локально интегрируемая относительно меры $\nu = \int \lambda_t \, d\mu(t)$. Тогда множество тех $t \in T$, для которых g не является локально λ_t-интегрируемой, локально пренебрежимо относительно μ, отображение $t \mapsto g \cdot \lambda_t$ (определенное локально μ-почти всюду) μ-согласовано, и мы имеем*

$$g \cdot \nu = \int (g \cdot \lambda_t) \, d\mu(t). \tag{9}$$

Пусть $(K_n)_{n \in \mathbf{N}}$ — возрастающая последовательность компактов из X, внутренности которых покрывают X; если η есть произвольная положительная мера на X, то утверждение, что g локально η-интегрируема, эквивалентно утверждению, что $g\varphi_K$ η-интегрируема при любом n. Итак, пусть H_n — множество тех $t \in T$, для которых $g\varphi_K$ не является λ_t-интегрируемой, и пусть $H = \bigcup_n H_n$; H_n локально μ-пренебрежимо при любом n (§ 3, п. 3, теорема 1), так что это верно и для H, чем и доказана первая часть утверждения. Заменяя λ_t на 0 на множестве H (что не изменит меры ν), можно предположить, что g локально λ_t-интегрируема при любом $t \in T$. Для любой положительной ν-измеримой функции h на X,

в силу предложения 3 и в силу предложения 5, § 3, п. 2, имеем:

$$\int^{\bullet} h\,d(g\cdot\nu) = \int^{\bullet} (gh)\,d\nu = \int^{\bullet} d\mu(t) \int^{\bullet} (gh)\,d\lambda_t =$$

$$= \int^{\bullet} d\mu(t) \int^{\bullet} h\,d(g\cdot\lambda_t).$$

Эта формула в сочетании с предложением 5, § 3, п. 2 показывает прежде всего (если взять $h \in \mathscr{K}_+(T)$), что отображение $t \mapsto g\cdot\lambda_t$ скалярно существенно μ-интегрируемо и что его интеграл равен $g\cdot\nu$; иными словами, выполняется соотношение (9). Далее, заменим μ на положительную меру $\mu' \leqslant \mu$ и примем в качестве h полунепрерывную снизу положительную функцию; из полученных соотношений сразу же получим, что $t \mapsto g\cdot\lambda_t$ μ-согласовано (§ 3, п. 1, опр. 1).

Предложение 8. *Пусть* θ *— комплексная мера на* T, g_1 *— комплексная* θ*-интегрируемая функция и* θ_1 *— мера* $g_1\cdot\theta$. *Для того чтобы комплексная функция* g_2 *на* T *была локально* θ_1*-интегрируема, необходимо и достаточно, чтобы* g_2g_1 *была локально* θ*-интегрируема, и в этом случае*

$$g_2\cdot\theta_1 = g_2\cdot(g_1\cdot\theta) = (g_2g_1)\cdot\theta \tag{10}$$

(«*формула ассоциативности*»).

В силу следствия из предложения 4 утверждение, что g_2 θ_1-измерима, эквивалентно утверждению, что g_2g_1 θ-измерима. Предположим, что это условие выполнено. Для любой функции $f \in \mathscr{K}_+(T)$ согласно предложениям 2 и 3 имеем

$$\int^{\bullet} |g_2|\,|f|\,d|\theta_1| = \int^{\bullet} |g_2|\,|f|\,|g_1|\,d|\theta| = \int^{\bullet} |g_2g_1|\,|f|\,d|\theta|.$$

Следовательно, утверждение, что g_2 локально θ_1-интегрируемо, эквивалентно утверждению, что g_2g_1 локально θ-интегрируема. Предположив, что это условие выполнено, получаем в силу теоремы 1:

$$\int f\,d(g_2\cdot\theta_1) = \int fg_2\,d\theta_1 = \int fg_2g_1\,d\theta = \int f\,d(g_2g_1\cdot\theta),$$

т. е. формулу, эквивалентную (10).

5. *Характеризация мер с базисом* μ

Теорема 2. (Лебега — Никодима). *Пусть* μ *и* ν *— положительные меры на* T. *Следующие свойства эквивалентны:*

1) ν *есть мера с базисом* μ.

2) *Всякое локально* μ*-пренебрежимое множество локально* ν*-пренебрежимо.*

3) *Всякий* μ*-пренебрежимый компакт* ν*-пренебрежим.*

Ясно, что 1) влечет 2) (следствие 1 из предл. 3) и что 2) влечет 3). Покажем, что 3) влечет 1). Отметим прежде всего, что если условие 3) выполнено, то всякое множество A, *универсально измеримое* и локально μ-пренебрежимое, локально ν-пренебрежимо; в самом деле, $\nu^*(A) = \sup \nu(K)$ при K, пробегающем множество компактов, содержащихся в A (§ 1, п. 3, предл. 10а) и гл. IV (2-е изд.), § 4, п. 6, следствие 2 из теоремы 4). Далее мы докажем две леммы.

Лемма 2. *Пусть* α *— ограниченная положительная мера на* T *и* β *— такая действительная мера на* T, *что* $|\beta| \leqslant M\alpha$, *где* M *— положительная константа. Тогда существует такая действительная* α*-интегрируемая функция* u, *что* $\beta = u \cdot \alpha$.

Пусть g — элемент пространства $\mathscr{L}^2_{\mathbb{R}}(T, \alpha)$; функция g β-измерима и $\int^* |g|^2 d|\beta| \leqslant M \int^* |g|^2 d\alpha < +\infty$. Стало быть, функция g принадлежит $\mathscr{L}^2(T, |\beta|)$, а также $\mathscr{L}^1(T, |\beta|)$, поскольку β ограничена. По неравенству Коши — Шварца имеем

$$|\beta(g)|^2 \leqslant \left(\int |g| d|\beta|\right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int d|\beta|\right)\left(\int |g|^2 d|\beta|\right) \leqslant M^2 \alpha(1)\, \alpha(|g|^2).$$

Следовательно, отображение $g \mapsto \beta(g)$ есть непрерывная линейная форма на $\mathscr{L}^2(T, \alpha)$. А поскольку отделимое пространство, ассоциированное с $\mathscr{L}^2(T, \alpha)$, является гильбертовым, то существует (Топ. вект. пр-ва, гл. V, § 1, теорема 3) действительная функция $u \in \mathscr{L}^2(T, \alpha)$, принадлежащая также и $\mathscr{L}^1(T, \alpha)$, такая, что $\beta(g) = \alpha(ug)$ при любом $g \in \mathscr{L}^2(T, \alpha)$. Применяя это соотношение к $g \in \mathscr{K}(T)$, получаем равенство $\beta = u \cdot \alpha$.

Лемма 3. *Предположим, что положительная мера ν такова, что всякий μ-пренебрежимый компакт является ν-пренебрежимым. Пусть $\mathfrak{K}$ — множество компактов K из T, обладающее следующим свойством:*

Существует такая константа $M \geqslant 0$, что

$$\varphi_K \cdot \nu \leqslant M\varphi_K \cdot \mu. \tag{11}$$

Тогда множество $\mathfrak{K}$ μ-плотно в T.

Если K удовлетворяет (11) и если A — борелевское подмножество, содержащееся в K, то из предложения 8 сразу же вытекает, что $\varphi_A \cdot \nu \leqslant M\varphi_A \cdot \mu$; отсюда следует, что объединение двух элементов K, K' из $\mathfrak{K}$ принадлежит $\mathfrak{K}$, ибо $\varphi_{K \cup K'} = \varphi_K + \varphi_A$, где $A = K' \cap \complement K$. Для доказательства леммы остается показать, что любой компакт L, такой, что $\mu(L) > 0$, содержит такой компакт $K \in \mathfrak{K}$, что $\mu(K) > 0$ (гл. IV (2-е изд.), § 5, п. 8, предл. 12). Выберем некоторое число $M > \nu(L)/\mu(L)$ и применим лемму 1 к ограниченной положительной мере $\alpha = \varphi_L \cdot (\nu + M\mu)$ и к мере $\beta = \varphi_L \cdot (\nu - M\mu)$. Заменим функцию u, удовлетворяющую условию $\beta = u \cdot \alpha$, на функцию, равную ей α-почти всюду; мы можем предположить, что u универсально измерима (§ 3, п. 5, предл. 7) и обращается в нуль вне L. Множество H тех $t \in T$, для которых $u(t) < 0$, содержащееся в L, не может быть μ-пренебрежимым, ибо тогда оно должно быть ν-пренебрежимо (в силу замечания, сделанного в начале доказательства теоремы 2), а значит, и α-пренебрежимо, и тогда $\beta(L) > 0$, что противоречит выбору M. Пусть K — такой содержащийся в H компакт, что $\mu(K) > 0$; покажем, что $K \in \mathfrak{K}$, чем и будет доказана лемма Согласно предложению 8 имеем

$$\varphi_K \cdot (\nu - M\mu) = \varphi_K \cdot \beta = \varphi_K \cdot (u \cdot \alpha) = (\varphi_K u) \cdot \alpha.$$

Функция $\varphi_K u$ отрицательна, и следовательно, $\varphi_K \cdot \nu \leqslant M\varphi_K \cdot \mu$.

Завершим теперь доказательство теоремы 2. Предположим, что условие 3) выполнено, и определим K, как в лемме 3. Пусть $(K_\alpha)_{\alpha \in A}$ — такое локально счетное семейство попарно не пересекающихся элементов из $\mathfrak{K}$, что множество $N = T - \bigcup_{\alpha \in A} K_\alpha$ локально μ-пренебрежимо (гл. IV (2-е изд.), § 5, п. 9, предл. 14); поскольку семейство (K_α) локально счетно, то N универсально

измеримо и, значит, локально ν-пренебрежимо. Положим $\mu_\alpha = \varphi_{K_\alpha} \cdot \mu$, $\nu_\alpha = \varphi_{K_\alpha} \cdot \nu$; поскольку функции φ_{K_α} образуют локально счетное семейство с суммой, равной 1 локально почти всюду относительно μ и ν, то из предложения 6 следует, что $\mu = \sum_{\alpha \in A} \mu_\alpha$, $\nu = \sum_{\alpha \in A} \nu_\alpha$. С другой стороны, по определению $\mathfrak{R}$ для любого α найдется такая константа M, что $\nu_\alpha \leqslant M_\alpha \mu_\alpha$; стало быть, лемма 2 влечет существование такой функции g_α (которую можно предположить нулевой вне K_α и положительной (следствие 3 из предл. 3)), что $\nu_\alpha = g_\alpha \cdot \mu_\alpha$. Следовательно (п. 4, предл. 8),

$$\nu_\alpha = g_\alpha \cdot \mu_\alpha = g_\alpha \cdot (\varphi_{K_\alpha} \cdot \mu) = (g_\alpha \varphi_{K_\alpha}) \cdot \mu = g_\alpha \cdot \mu.$$

Положим $g = \sum_{\alpha \in A} g_\alpha$; поскольку семейство (g_α) локально счетно, а семейство (ν_α) суммируемо, то из предложения 6 вытекает, что g локально μ-интегрируема и что $\nu = g \cdot \mu$, что и доказывает теорему.

Следствие 1. *Пусть $\mathscr{N}$ — множество положительных мер с базисом μ, имеющих в $\mathscr{M}(T)$ верхнюю грань ν; тогда ν есть мера с базисом μ.*

Следствие из предложения 2 позволяет свести все к случаю, когда $\mathscr{N}$ есть возрастающее фильтрующееся множество. Тогда для любого локально μ-пренебрежимого множества A в силу предложения 11, § 1, п. 4

$$\nu^*(A) = \sup_{\alpha \in \mathscr{N}} \lambda^*(A) = 0.$$

Стало быть, из теоремы 2 следует, что ν есть мера с базисом μ.

Следствие 2. *Пусть ν — действительная мера на T. Для того чтобы ν принадлежала полосе, порожденной μ во вполне решеточном пространстве $\mathscr{M}(T)$* (гл. II, § 1, п. 5), *необходимо и достаточно, чтобы ν была мерой с базисом μ.*

Рассматривая ν^+ и ν^-, сразу сводим все к случаю *положительной* меры ν (п. 2, следствие из предл. 2). Положим $\nu_n = \inf(n\mu, \nu)$; ν принадлежит полосе, порожденной μ, в том и только том случае, если $\nu = \sup_n \nu_n$ (гл. II (2-е изд.), § 1, п. 5, следствие из предл. 6). Но ν_n, мажорированная $n\mu$, в силу теоремы 2 есть мера с базисом μ; стало быть, из соотношения $\nu = \sup_n \nu_n$ следует, что ν есть мера

с базисом μ (следствие 1). Обратно, предположим, что ν есть мера с базисом μ: $\nu = g \cdot \mu$, где g локально μ-интегрируема и положительна. Тогда $\nu_n = \inf(g, n) \cdot \mu$ (следствие из предл. 2), и из теоремы Лебега (гл. IV, § 4, п. 3, предл. 4) сразу же вытекает, что $\nu = \sup_n \nu_n$.

Следствие 3. *Пусть* θ — *комплексная мера; существует такая универсально измеримая функция* v, *что* $|v| = 1$ *и* $\theta = v \cdot |\theta|$, $|\theta| = \overline{v} \cdot \theta$.

В самом деле, положим $\theta = \theta_1 - \theta_2 + i(\theta_3 - \theta_4)$, где $\theta_1 = (\mathrm{Re}\,\theta)^+$, $\theta_2 = (\mathrm{Re}\,\theta)^-$, $\theta_3 = (\mathrm{Im}\,\theta)^+$, $\theta_4 = (\mathrm{Im}\,\theta)^-$; поскольку положительные меры θ_i ($i = 1, 2, 3, 4$) мажорированы посредством $|\theta|$ (гл. III (2-е изд.), § 1, п. 6, формула (17)), то они в силу теоремы 2 являются мерами с базисом $|\theta|$. Отсюда следует существование такой локально $|\theta|$-интегрируемой функции v, что $\theta = v \cdot |\theta|$. Тогда предложение 2 приводит к соотношению $|\theta| = |v| \cdot |\theta|$, из которого следует, что $|v| = 1$ локально $|\theta|$-почти всюду (следствие 2 из предл. 3). Наконец, в силу предложения 8 имеем $\overline{v} \cdot \theta = (v\overline{v}) \cdot |\theta| = |\theta|$. Поскольку функция v определена лишь с точностью до локально $|\theta|$-пренебрежимой функции, то можно предположить, что v универсально измерима (§ 3, п. 4, предл. 7) и что $|v| = 1$ всюду.

Замечания. 1) Предположим, что λ — положительная мера, v — такая λ-измеримая функция, что $|v| = 1$ локально λ-почти всюду (откуда следует, что v локально λ-интегрируема) и что $\theta = v \cdot \lambda$. Предложение 2 сразу же показывает, что $\lambda = |\theta|$; иными словами, сформулированное в следствии 3 свойство характеризует положительную меру $|\theta|$.

2) Если $|\theta| \leqslant a\mu$, где μ — положительная мера и $a \geqslant 0$ — число, то θ есть мера с базисом μ.

Следствие 4. *Пусть* ρ *и* θ — *комплексные меры. Для того чтобы существовала такая локально* θ*-пренебрежимая функция* u, *что* $\rho = u \cdot \theta$, *необходимо и достаточно, чтобы всякий* θ*-пренебрежимый компакт был* ρ*-пренебрежимым.*

Необходимость очевидна. Обратно, предположим, что всякий θ-пренебрежимый компакт ρ-пренебрежим; из теоремы 2 следует существование такой локально $|\theta|$-пренебрежимой функции g,

что $|\rho| = g \cdot |\theta|$. С другой стороны, следствие 3 влечет существование функции v_1 (соотв. v_2) с абсолютным значением 1, измеримой относительно меры $|\rho|$ (соотв. θ) и такой, что $\rho = v_1 \cdot |\rho|$ (соотв. $|\theta| = \bar{v}_2 \cdot \theta$). Тогда согласно предложению 8 имеем $\rho = u \cdot \theta$, где $u = v_1 g \bar{v}_2$.

Следствие 5. *Пусть* μ *и* ν *— положительные меры на* T. *Условия* 1), 2), 3) *теоремы* 2 *эквивалентны также следующим*:

4) *Для любой* ν*-интегрируемой числовой функции* $f \geqslant 0$ *и любого числа* $\varepsilon > 0$ *найдется такое* $\delta > 0$, *что из соотношений* $0 \leqslant h \leqslant f$ *и* $\int^* h\, d\mu \leqslant \delta$ *следует* $\int^* h\, d\nu < \varepsilon$.

5) *Для любой функции* $g \in \mathscr{K}_+(T)$ *и любого числа* $\varepsilon > 0$ *существует такое* $\delta > 0$, *что для любого* $h \in \mathscr{K}_+(T)$, *мажорированного функцией* g *и удовлетворяющего неравенству* $\int h\, d\mu \leqslant \delta$, *имеем* $\int h\, d\nu \leqslant \varepsilon$.

6) *Для любого компактного множества* $K \subset T$ *и любого* $\varepsilon > 0$ *найдется такое* $\delta > 0$, *что из соотношений* $A \subset K$ *и* $\mu^*(A) \leqslant \delta$ *следует, что* $\nu^*(A) \leqslant \varepsilon$.

Импликации 4) $\Rightarrow$ 6) $\Rightarrow$ 3) очевидны.

Предположим, что существует конечная функция $k \geqslant 0$, универсально измеримая, локально μ-интегрируемая и такая, что $\nu = k \cdot \mu$, и покажем, что выполняется условие 4). Пусть $f \geqslant 0$ — ν-интегрируемая функция и $\varepsilon > 0$. Пусть, далее, для любого целого $n \geqslant 0$ через A_n обозначено множество тех $t \in T$, в которых $k(t) \geqslant n$. Функции $f\varphi_n$, убывая, стремятся поточечно к 0 и мажорируются функцией f, а значит, существует такое N, что $\int f\varphi_{A_N} d\nu \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ (гл. IV, § 4, п. 3, предл. 4). Если h есть функция на T, удовлетворяющая соотношениям $0 \leqslant h \leqslant f$ и $\int^* h\, d\mu \leqslant \frac{\varepsilon}{2N}$, то

$$\nu^*(h) \leqslant \nu^*(h\varphi_{A_N}) + \nu^*(h(1 - \varphi_{A_N})) \leqslant \nu^*(f\varphi_{A_N}) + \mu^*(h(1 - \varphi_{A_N})k) = \frac{\varepsilon}{2} + N\mu^*(h) \leqslant \varepsilon.$$

Тем самым доказано, что условия 4) и 6) эквивалентны условиям теоремы 2.

Ясно, что 4) влечет 5). Наконец, если условие 5) выполнено, то ν принадлежит полосе, порожденной μ (гл. II, § 2, п. 2, предл. 4), и значит, имеет базис μ (следствие 2).

Схолия. Для любого $\tilde{f} \subset L^1_{\text{loc}}(T, \mu; \mathbf{R})$ положим $\varphi(\tilde{f}) = f \cdot \mu$, где $f \in \tilde{f}$; отображение φ линейно, возрастает, инъективно (следствие 2 из предл. 3) и имеет в качестве образа в $\mathscr{M}(T)$ полосу B, порожденную μ (следствие 2 из теоремы 2). Стало быть, φ позволяет *отождествить* $L^1_{\text{loc}}(T, \mu; \mathbf{R})$ с некоторым пространством действительных мер на T; а поскольку все пространства $L^p_{\mathbf{R}}(T, \mu)$ являются подпространствами пространства $L^1_{\text{loc}}(T, \mu; \mathbf{R})$, то они могут быть также отождествлены с подпространствами пространства $\mathscr{M}(T)$. Аналогичные соображения имеют место и для функций и мер с комплексными значениями. Отметим, что рассматриваемое отображение φ есть изоморфизм структур упорядоченного векторного пространства для L^1_{loc} и B, но, очевидно, не является изоморфизмом структур топологического векторного пространства для этих пространств.

Всякая полоса во вполне решеточном пространстве сама является вполне решеточным пространством (гл. II, § 1, п. 5), поэтому пространство L^1_{loc} *вполне решеточно*; однако следует напомнить, что верхняя грань в L^1_{loc} не счетного семейства $(\hat{f}_\alpha)$ классов эквивалентности может не быть тождественной классу верхней огибающей функций f_α. И все же мы видели, что для *возрастающей последовательности* (f_n) локально μ-интегрируемых функций, верхняя огибающая f которых локально μ-интегрируема, $f \cdot \mu$ служит верхней гранью последовательности мер $(f_n \cdot \mu)$ в $\mathscr{M}(T)$ (следствие из предл. 6).

Приведем интересный факт, вытекающий из следствия 3 теоремы 2:

Предложение 9. *Пусть* θ *— ограниченная комплексная мера; для того чтобы* θ *была положительной мерой, необходимо и достаточно, чтобы* $\| \theta \| = \theta$ (1).

Необходимость очевидна. Обратно, предположим, что $\| \theta \| = \int d\theta$, и обозначим через v $|\theta|$-измеримую функцию с абсолютным значением 1, удовлетворяющую условию $\theta = v \cdot |\theta|$. Поскольку $\| \theta \| = \int d|\theta|$ (гл. III (2-е изд.), § 1, п. 8, следствие 2

из предл. 10) и $\int d\theta = \int v \cdot d\,|\,\theta|$ (теорема 1), то из условия вытекает, что $\int (1 - v)\, d\,|\,\theta\,| = 0$, а значит, и $\int \mathrm{Re}\,(1 - v)\, d\,|\,\theta\,| = 0$. Но функция $\mathrm{Re}\,(1 - v)$ положительна, и стало быть, обращается в нуль почти всюду, откуда следует, что $v = 1$ почти всюду, и доказательство завершено.

6. *Эквивалентные меры*

Предложение 10. *Пусть* μ *и* ν — *положительные меры на* T. *Следующие условия эквивалентны*:

a) *Локально пренебрежимые множества — одни и те же для* μ *и* ν.

b) *Полосы, порожденные* μ *и* ν *в* $\mathscr{M}(T)$, *совпадают*.

c) *Имеет место равенство* $\nu = g \cdot \mu$, *где* g *локально* μ-*интегрируема и* $g(t) > 0$ *локально почти всюду относительно* μ.

Условия a) и b) эквивалентны в силу следствия из теоремы 2 п. 5. Если они выполнены, то $\nu = g \cdot \mu$ и $\mu = h \cdot \nu$, где g (соотв. h) положительна и локально интегрируема относительно μ (соотв. ν). Следовательно (п. 4, предл. 8), hg локально μ-интегрируема, и $\mu = (hg) \cdot \mu$. Отсюда вытекает (п. 3, следствие 2 из предл. 3), что hg равна 1 локально почти всюду относительно μ, так что $g(t) > 0$ и $h(t) = 1/g(t)$ локально почти всюду относительно μ. Обратно, предположим, что $\nu = g \cdot \mu$, причем $g(t) > 0$ локально почти всюду относительно μ; поскольку $(1/g)\, g$ определена локально почти всюду и локально μ-интегрируема, то $1/g$ локально ν-интегрируема и $(1/g) \cdot \nu = \mu$ (п. 4, предл. 8).

Определение 3. *Говорят, что две комплексные меры* θ *и* θ' *на локально компактном пространстве* T *эквивалентны, если меры* $|\,\theta\,|$ *и* $|\,\theta'\,|$ *удовлетворяют условиям* a), b), c) *предложения* 10.

Следовательно, для того чтобы θ и θ' были эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы были эквивалентны $|\,\theta\,|$ и $|\,\theta'\,|$.

Замечание. Если μ и ν — положительные эквивалентные меры, то, как сразу же следует из предложения 4, п. 3, измеримыми функциями на T со значениями в произвольном топологическом пространстве G будут для них *одни и те же* функции.

Предложение 11. *Пусть* μ — *положительная мера на* T. *Если* T *счетно в бесконечности, то существует такая непрерывная функция* h, *что* $h(t) > 0$ *для любого* $t \in T$ *и что мера* $\nu = h \cdot \mu$ (*эквивалентная* μ) *ограничена.*

В самом деле, пусть (K_n) — последовательность компактных множеств, образующих покрытие T, и пусть для любого n через f_n обозначена такая функция из $\mathscr{K}(T)$, что $0 \leqslant f_n \leqslant 1$ и $f_n(t) = 1$ на K_n (гл. III (2-е изд.), § 1, п. 2, лемма 1). Пусть, далее, (a_n) — такая последовательность чисел $a_n > 0$, что $\sum_n a_n < +\infty$; тогда ряд $h = \sum_n a_n f_n$ нормально сходится на T, и стало быть, h является непрерывной функцией на T, причем $h(t) > 0$ для любого T по построению. Теперь, полагая $\nu = h \cdot \mu$, получаем (предл. 3; гл. IV, § 1, п. 3, предл. 13):

$$\nu^*(1) = \int^* h \, d\mu \leqslant \sum_n a_n \int f_n \, d\mu.$$

Принимая, например, $a_n = 2^{-n}\left(\int f_n \, d\mu\right)^{-1}$, когда $\int f_n \, d\mu > 1$, и $a_n = 2^{-n}$ в противном случае, приходим к соотношениям $\sum_n a_n < +\infty$ и $\nu^*(1) < +\infty$, чем и доказано предложение.

Предложение 12. *Пусть* (μ_n) — *последовательность ограниченных положительных мер на* T; *тогда существует такая ограниченная положительная мера* μ *на* T, *что отношение* $\mu^*(N) = 0$ *эквивалентно отношению: «каково бы ни было* n, $\mu_n^*(N) = 0$»; *каждая из мер* μ_n *есть мера с базисом* μ. *Если* μ' *есть другая положительная мера на* T, *обладающая тем же свойством, то* μ *и* μ' *эквивалентны.*

Последнее утверждение следует сразу же из определения 3. Для доказательства же существования μ можно ограничиться случаем, когда $\mu_n \neq 0$ при любом n; тогда семейство мер $\mu_n/(2^n \| \mu_n \|)$ суммируемо в $\mathscr{M}(T)$ и его сумма μ такова, что $\| \mu \| \leqslant 1$. Кроме того, в силу неравенства $\mu_n \leqslant 2^n \| \mu_n \| \cdot \mu$ соотношение $\mu(N) = 0$ влечет $\mu_n(N) = 0$ при любом n; обратно, если N — пренебрежимое множество относительно всех μ_n, то оно локально пренебрежимо относительно μ (§ 2, п. 2, следствие 2 из предл. 1) и, значит, μ-пренебрежимо, поскольку μ ограничена (§ 1, п. 2, следствие 2 из предл. 7).

7. *Сингулярные меры*

Напомним, что если имеются две меры ρ и σ на T, то они называются *сингулярными*, если $\inf(|\rho|, |\sigma|) = 0$ в $\mathscr{M}(T)$ (гл. II, § 1, п. 1). Известно, что действительные меры, сингулярные с некоторой заданной мерой, образуют полосу (гл. II, § 1, п. 5, теорема 1). Это определение сразу же распространяется на случай комплексных мер.

Определение 4. *Говорят, что комплексная мера* θ *на* T *сосредоточена на подмножестве* M *из* T, *или что* M *несет* θ, *если* CM *локально пренебрежимо относительно* θ.

Множество M несет θ в том и только том случае, если оно несет $|\theta|$. Утверждение, что M несет θ, равносильно утверждению, что M θ-измеримо и $\theta = \varphi_M \cdot \theta$. Если θ сосредоточена на M, то всякая мера с базисом $|\theta|$ также сосредоточена на M.

Предложение 13. *Для того чтобы комплексные меры* ρ *и* σ *на* T *были сингулярны, необходимо и достаточно, чтобы в* T *существовали такие два не пересекающихся множества* R *и* S, *что* ρ *сосредоточена на* R, *а* σ *— на* S; R *и* S *могут предполагаться универсально измеримыми.*

Положим $\mu = |\rho|$, $\nu = |\sigma|$, $\lambda = \mu + \nu$; поскольку μ и ν мажорируются λ, то найдутся такие локально λ-интегрируемые функции u и v (которые можно предположить универсально измеримыми (§ 3, п. 4, предл. 7)), что $\mu = u \cdot \lambda$, $\nu = v \cdot \lambda$. Тогда

$$\inf(|\rho|, |\sigma|) = \inf(\mu, \nu) = \inf(u, v) \cdot \lambda$$

(п. 2, следствие из предл. 2). Пусть A (соотв. B)-множество тех $t \in T$, в которых $u(t) > 0$, $v(t) = 0$ (соотв. $u(t) = 0$ и $v(t) > 0$). Если ρ и σ сингулярны, то $\inf(u, v) = 0$ локально λ-почти всюду (п. 3, следствие 2 из предл. 3), так что непересекающиеся универсально измеримые множества A и B несут соответственно μ и ν. Обратно, предположим, что μ и ν несомы соответственно непересекающимися множествами R и S; φ_R измерима относительно меры $\mu = u \cdot \lambda$, и $\mu = \varphi_R \cdot \mu$. В силу предложения 8, п. 4, функция $u' = u\varphi_R$ λ-измерима и $\mu = u' \cdot \lambda$. Точно так же, если $v' = v\varphi_S$, то $\nu = v' \cdot \lambda$; но $\inf(u', v') = 0$ (п. 2, следствие из предл. 2), и предложение доказано.

Следствие 1. *Для любой действительной меры* ν *на* T *существуют непересекающиеся множества* M *и* N, *несущие соответственно* ν^+ *и* ν^-.

Не следует смешивать понятия *носителя* меры ν с понятием множества, на котором ν сосредоточена (или несущего ν). Носитель S меры ν есть наименьшее *замкнутое* множество, несущее ν (гл. III (2-е изд., § 2, п. 2, предл. 2 и гл. IV, § 2, п. 2, предл. 5). Однако могут существовать подмножества из S, не совпадающие с S и несущие ν. Точнее, может оказаться, что $\inf(\mu, \nu) = 0$ для двух положительных мер μ и ν с одним и тем же носителем (упр. 5).

Отметим также, что пересечение множеств, несущих ν, есть множество тех точек $t \in T$, в которых $|\nu|(\{t\}) > 0$, и может оказаться пустым (например, в случае меры Лебега); стало быть, вообще говоря, не существует наименьшего множества, несущего ν.

Следствие 2. *Пусть* ρ *и* σ — *сингулярные комплексные меры*; ρ' *и* σ' — *комплексные меры, имеющие плотности соответственно относительно* ρ *и* σ; *тогда* ρ' *и* σ' *сингулярны.*

Следствие 3. *Пусть* ρ *и* σ — *сингулярные комплексные меры*; *тогда* $|\rho + \sigma| = |\rho| + |\sigma|$.

В самом деле, обозначим через v (соотв. w) такую универсально измеримую функцию с абсолютным значением 1, что $\rho = v \cdot |\rho|$ (соотв. $\sigma = w \cdot |\sigma|$) (следствие 3 из теоремы 2), а через A — такое универсально измеримое множество, несущее ρ, что $B = \complement A$ несет σ (предл. 13); тогда имеем также $\rho + \sigma = (v\varphi_A + w\varphi_B) \cdot (|\rho| + |\sigma|)$. Функция $v\varphi_A + w\varphi_B$ имеет абсолютное значение 1, и утверждение следует из предложения 2.

Теорема 3 (Лебег). *Всякая комплексная мера* θ *на* T *может быть записана единственным образом в виде* $\theta = g \cdot \mu + \theta'$, *где* g *локально* μ-*интегрируема, а* θ' *есть мера, сингулярная с* μ. *При этом* $|\theta| = |g| \cdot \mu + |\theta'|$.

В случае положительной меры θ это следует сразу же из теоремы Ф. Рисса (гл. II, § 1, п. 5, теорема 1), примененной ко вполне решеточному пространству $\mathscr{M}(T)$ действительных мер на T и к полосе, порожденной в этом пространстве мерой μ, если учесть следствие 2 из теоремы 2, п. 5; здесь, кроме того, θ' и $g \cdot \mu$ положительны, откуда следует, что g положительна локально μ-почти всюду (следствие 3 из предл. 3). В случае, когда θ не является положительной, положим $\nu = |\theta|$, $\nu = f \cdot \mu + \nu'$ (где f положи-

тельна, а ν' и μ сингулярны) и $\theta = v \cdot \nu$, где ν — универсально измеримая функция с абсолютным значением 1 (следствие 3 из теоремы 2). Тогда (предл. 8) $\theta = g \cdot \mu + \theta'$ с $g = vf$ (так что $|g| = f$) и $\theta' = v \cdot \nu'$ (так что $|\theta'| = \nu'$ в силу предл. 2); меры θ' и μ, согласно следствию 2 из предложения 13, сингулярны. Остается лишь доказать единственность разложения. Итак, допустим, что $\theta = g \cdot \mu + \theta' = g_1 \cdot \mu + \theta'_1$, где θ' и θ'_1 сингулярны с μ; $|\theta' - \theta'_1|$ мажорируется $|\theta'| + |\theta'_1|$; значит, $\theta' - \theta'_1$ сингулярна с μ, а стало быть, также и с $(g_1 - g) \cdot \mu$. Тогда из соотношения $\theta' - \theta'_1 = (g_1 - g) \cdot \mu$ вытекает, что обе части равны нулю, чем и доказана единственность.

Напомним (теорема 2, схолия), что пространство $L^1_{\text{loc}}(T, \mu; \mathbf{C})$ может быть отождествлено (отображением $g \mapsto g \cdot \mu$) с некоторым подпространством пространства $\mathscr{M}_{\mathbf{C}}(T)$. При этом соглашении теорема 3 принимает следующую форму:

Следствие. *Существует проектор p пространства $\mathscr{M}_{\mathbf{C}}(T)$ на пространство $L^1_{\text{loc}}(T, \mu; \mathbf{C})$, имеющий в качестве ядра $p^{-1}(0)$ множество комплексных мер, сингулярных с μ, и такой, что*

$$|\theta| = |p(\theta)| + |\theta - p(\theta)|, \quad p(|\theta|) = |p(\theta)|$$

для любой комплексной меры θ.

Если сузить p на множество ограниченных мер, то получим проектор p^1 пространства $\mathscr{M}^1_{\mathbf{C}}(T)$ на $L^1_{\mathbf{C}}(T, \mu)$; из равенства $\|\theta\| = \|\,|\theta|\,\|$ (1) выводим, что $\|\theta\| = \|p^1(\theta)\| + \|\theta - p^1(\theta)\|$ для любой ограниченной комплексной меры θ.

8. Приложения: I. Двойственность пространств L^p

Мы будем изучать здесь лишь случай действительных пространств L^p.

Напомним, что два числа p и q, удовлетворяющие условиям $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, $1 \leqslant q \leqslant +\infty$, $1/p + 1/q = 1$, называются *сопряженными показателями* (гл. IV, § 6, п. 4). Всякая функция $g \in \mathscr{L}^q$ определяет на L^p непрерывную линейную форму θ_g, которая получается факторизацией из линейной формы $f \mapsto \int fg\, d\mu$ на $\mathscr{L}^p$, причем справедливо равенство $N_q(g) = \|\theta_g\|$ (гл. IV (2-е изд.), § 6, п. 4, следствие из предл. 3). Следовательно, из отображения

$g \mapsto \theta_g$ факторизацией получается линейное изометрическое отображение φ пространства L^q в пространство $(L^p)'$, сопряженное к L^p. Мы покажем, что при $1 \leqslant p < +\infty$ φ отображает L^q *на* $(L^p)'$, так что мы сможем отождествить банаховы пространства L^q и $(L^p)'$ при помощи изоморфизма φ. Иными словами, имеет место

Теорема 4. *Пусть p и q — сопряженные показатели, причем $1 \leqslant p < +\infty$. Всякая непрерывная линейная форма на $\mathscr{L}^p(T, \mu)$ имеет вид $f \mapsto \int fg\, d\mu$, где g есть функция из $\mathscr{L}^q(T, \mu)$, класс которой в L^q однозначно определен.*

В самом деле, пусть θ — непрерывная линейная форма на $\mathscr{L}^p$; найдется такое число $a \geqslant 0$, что $|\theta(f)| \leqslant a \cdot N_p(f)$ для любой функции $f \in \mathscr{L}^p$. Рассмотрим сужение формы θ на пространство $\mathscr{K}(T)$ непрерывных функций с компактным носителем: для любого компактного подмножества K из T и любой функции $f \in \mathscr{K}(T, K)$ (пространство непрерывных функций с носителем, содержащимся в K) имеем $N_p(f) \leqslant (\mu(K))^{1/p} \|f\|$; значит, топология, индуцируемая в $\mathscr{K}(T, K)$ топологией из $\mathscr{L}^p$, будет менее сильной, чем топология равномерной сходимости, и стало быть, сужение формы θ на каждое множество $\mathscr{K}(T, K)$ непрерывно в этой топологии. Это означает, что сужение формы θ на $\mathscr{K}(T)$ есть действительная мера ν (гл. III (2-е изд.), § 1, п. 3, опр. 2).

Покажем, что $|\nu|(|f|) \leqslant a \cdot N_p(f)$ для любой функции $f \in \mathscr{K}(T)$. Достаточно доказать эту оценку для $f \geqslant 0$. Но для любой функции $\psi \in \mathscr{K}(T)$, удовлетворяющей неравенству $|\psi| \leqslant f$, имеем

$$|\nu(\psi)| \leqslant a \cdot N_p(\psi) \leqslant a \cdot N_p(f);$$

наше утверждение получается из выражения для абсолютного значения меры, приведенного в гл. III (2-е изд.), § 1, п. 6, формула (12). Соотношение $|\nu|(|f|) \leqslant a(\mu(|f|^p))^{1/p}$ при помощи перехода к нижней огибающей сразу же распространяется на случай, когда f есть характеристическая функция компакта, и тогда оно влечет, что всякий μ-пренебрежимый компакт ν-пренебрежим, так что ν есть мера с базисом μ (п. 5, теорема 2).

Следовательно, существует такая локально μ-интегрируемая функция h_1, что $|\nu|(f) = \int fh_1\, d\mu$ для любой функции $f \in \mathscr{K}(T)$. Покажем, что h_1 локально почти всюду равна некоторой функции

из $\mathscr{L}^q$. Если функция $f \geqslant 0$ из $\mathscr{K}(T)$ такова, что $N_p(f) \leqslant 1$, то $\int fh_1 \, d\mu = |\nu|(f) \leqslant a$. Стало быть, для любого непрерывного отображения f_0 пространства T в $[0, 1]$ с компактным носителем $\sup \int (f_0 h_1) f \, d\mu \leqslant a$, когда f пробегает множество положительных функций из $\mathscr{K}(T)$, для которых $N_p(f) \leqslant 1$. Отсюда по формуле (11) гл. IV, § 6, п. 4 получаем неравенство $N_q(f_0 h_1) \leqslant a$. Из этого вытекает, что $\sup_K N_q(\varphi_K h_1) \leqslant a$, когда K пробегает множество компактных подмножеств из T, что и доказывает наше утверждение (§ 1, предл. 9).

Пусть v — такая (действительная) универсально измеримая функция с абсолютным значением 1, что $\nu = v \cdot |\nu|$ (следствие 3 из теоремы 2), и пусть $g = vh_1$; тогда $\nu = g \cdot \mu$ и g принадлежит $\mathscr{L}^q$. Для любой функции $f \in \mathscr{K}(T)$ имеем $\theta(f) = \nu(f) = \int fg d\mu$. Иными словами, непрерывные линейные формы θ и θ_g совпадают на $\mathscr{K}(T)$; значит, они равны и на $\mathscr{L}^p$, поскольку $\mathscr{K}(T)$ всюду плотно в $\mathscr{L}^p$, чем и завершается доказательство.

Следствие. *Для любого числа p, $1 < p < \infty$, банахово пространство $L^p(T, \mu)$ рефлексивно.*

Вообще говоря, сопряженное к L^∞ не изоморфно L^1, и следовательно, L^1 и L^∞ не рефлексивны (упр. 10). Охарактеризуем непрерывные линейные формы на L^∞, которые получаются факторизацией из линейной формы $f \mapsto \int fg \, d\mu$ на $\mathscr{L}^\infty$, где $g \in \mathscr{L}^1$.

Упорядоченное векторное пространство $L^\infty(T, \mu)$ которое является подпространством пространства $L^1_{\text{loc}}(T, \mu)$, *вполне решеточно*; в самом деле, если (f_α) — семейство положительных функций из $\mathscr{L}^\infty$, для которых множество классов $(\dot{f}_\alpha)$ мажорировано в L^∞, то найдется такое $a \geqslant 0$, что $N_\infty(f_\alpha) \leqslant a$ для любого α. А поскольку $L^1_{\text{loc}}(T, \mu)$ вполне решеточно, то семейство $(\dot{f}_\alpha)$ имеет в $L^1_{\text{loc}}(T, \mu)$ верхнюю грань h; но $\dot{a} \geqslant \dot{f}_\alpha$ для любого α, поэтому $\dot{h} \leqslant \dot{a}$, и значит, $N_\infty(h) \leqslant a$, откуда и следует наше утверждение.

Предложение 14. *Для того чтобы положительная линейная форма* θ *на* $\mathscr{L}^\infty$ *имела вид* $f \mapsto \int fg\,d\mu$, *где* $g \in \mathscr{L}^1$, *необходимо и достаточно, чтобы для любого возрастающего фильтрующегося семейства* $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$ *положительных функций из* $\mathscr{L}^\infty$, *для которых множество классов* $(\dot{f}_\alpha)_{\alpha \in A}$ *мажорировано в* L^∞ *и имеет в этом пространстве верхнюю грань* $\dot{h}$, *выполнялось равенство*

$$\dot{\theta}(h) = \sup_{\alpha \in A} \dot{\theta}(f_\alpha).$$

Сначала докажем необходимость. В самом деле, мера $h \cdot \mu$ является верхней гранью в $\mathscr{M}(T)$ множества мер $f_\alpha \cdot \mu$ (п. 5, схолия); стало быть (гл. II, § 2, п. 2), для любой функции $\varphi \geqslant 0$ из $\mathscr{K}(T)$ имеем $\int h\varphi\,d\mu = \sup_{\alpha \in A} \int f_\alpha \varphi\,d\mu$. Если теперь число $a \geqslant 0$ таково, что $N_\infty(f_\alpha) \leqslant a$ для любого $\alpha \in A$ (что влечет неравенство $N_\infty(h) \leqslant a$), то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая функция $\varphi \in \mathscr{K}(T)$, что $\varphi \geqslant 0$ и $N_1(g - \varphi) \leqslant \varepsilon$, откуда следует, что $\int f_\alpha |\, g - \varphi \,|\, d\mu \leqslant a\varepsilon$ для любого $\alpha \in A$, и $\int h \,|\, g - \varphi \,|\, d\mu \leqslant a\varepsilon$. Тем самым доказано, что неравенство $\sup_{\alpha \in A} \int f_\alpha g\,d\mu \leqslant \int hg\,d\mu$ в действительности есть равенство.

Для доказательства достаточности воспользуемся следующей леммой:

Лемма 4. 1° *Пусть* f — *полунепрерывная снизу положительная ограниченная функция на* T. *Тогда ее класс* $\dot{f}$ *в* L^∞ *является верхней гранью множества классов* $\dot{\varphi}$, *где* φ *пробегает множество функций из* $\mathscr{K}(T)$, *удовлетворяющих условию* $0 \leqslant \varphi \leqslant f$.

2° *Пусть* f — *положительная ограниченная измеримая функция на* T. *Тогда ее класс* $\dot{f}$ *в* L^∞ *есть нижняя грань множества классов* $\dot{\psi}$, *где* ψ *пробегает множество полунепрерывных снизу ограниченных функций на* T, *удовлетворяющих условию* $\psi \geqslant f$.

1° Пусть f' — такая функция из $\mathscr{L}^\infty$, что $\dot{f}'$ есть верхняя грань в L^∞ множества классов $\dot{\varphi}$ функций φ из $\mathscr{K}(T)$, удовлетворяющих условию $0 \leqslant \varphi \leqslant f$; очевидно, $\dot{f}' \leqslant \dot{f}$. Пусть U — открытое отно-

сительно компактное подмножество из T; для любой функции $h \in \mathscr{K}(T)$, такой, что $0 \leqslant h \leqslant f\varphi_U$, по определению $h(t) \leqslant f'(t)$ локально почти всюду и значит, $h(t) \leqslant f'(t)\varphi_U(t)$ почти всюду; из этого заключаем, что $\int h\,d\mu \leqslant \int f'\varphi_U\,d\mu$. Но поскольку $f\varphi_U$ полунепрерывна снизу, то $\int f\varphi_U d\mu = \sup \int h\,d\mu$, где h пробегает множество функций из $\mathscr{K}(T)$, удовлетворяющих условию $0 \leqslant h \leqslant f\varphi_U$ (гл. IV, § 1, п. 1, опр. 1); следовательно,

$$\int f\varphi_U\,d\mu \leqslant \int f'\varphi_U\,d\mu;$$

а так как $f'\varphi_U \leqslant f\varphi_U$ почти всюду, то $f\varphi_U = f'\varphi_U$ почти всюду, откуда $f = f'$ локально почти всюду.

2° Пусть f' — такая функция из $\mathscr{L}^\infty$, что $\dot{f}'$ есть нижняя грань в L^∞ множества классов $\dot{\psi}$ полунепрерывных снизу ограниченных функций $\psi \geqslant f$; тогда $\dot{f}' \geqslant \dot{f}$. Пусть, далее, K — компактное подмножество из T; для любой полунепрерывной снизу ограниченной функции h, мажорирующей $f\varphi_K$, обозначим через $\overline{h}$ функцию, равную h на K и $\|f\| + \|h\|$ на $T - K$. Тогда $\overline{h}$ будет полунепрерывна снизу и $\overline{h} \geqslant f$, и значит, по определению, $\overline{h}(t) \geqslant f'(t)$ локально почти всюду; отсюда вытекает, что $h(t) \geqslant f'(t)\,\varphi_K(t)$ почти всюду, и стало быть, $\int h\,d\mu \geqslant \int f'\varphi_K\,d\mu$. Но $\int f\varphi_K\,d\mu = \inf \int h\,d\mu$, где h пробегает множество полунепрерывных снизу ограниченных функций, мажорирующих $f\varphi_K$ (гл. IV, § 1, п. 3, опр. 3); следовательно,

$$\int f\varphi_K\,d\mu \geqslant \int f'\varphi_K\,d\mu,$$

а поскольку $f\varphi_K \leqslant f'\varphi_K$ почти всюду, то $f\varphi_K = f'\varphi_K$ почти всюду, и значит, $f = f'$ локально почти всюду. Лемма доказана.

Пусть теперь θ — положительная линейная форма на $\mathscr{L}^\infty$, удовлетворяющая условию предложения 14. Сужение θ на $\mathscr{K}(T)$ есть положительная мера ν на T. Мы покажем, что для любой положительной функции $f \in \mathscr{L}^\infty(T, \mu)$ справедливо равенство $\theta(f) = \nu^*(f)$. Допустим сначала, что f полунепрерывна снизу

(и ограничена); в силу леммы 4 $\dot{f}$ есть верхняя грань фильтрующегося по возрастанию множества классов $\dot{\varphi}$, где φ пробегает фильтрующееся множество Φ таких функций из $\mathscr{K}(T)$, что $0 \leqslant \varphi \leqslant f$. А так как $\theta(f) = \sup_{\varphi \in \Phi} \theta(\varphi)$ по условию и $\nu^*(f) = \sup_{\varphi \in \Phi} \nu(\varphi)$ по определению, то наше утверждение доказано для этого случая. Предположим теперь, что f μ-измерима и ограничена; тогда, по определению, $\nu^*(f) = \inf_{\psi \in \Psi} \nu^*(\psi)$, где ψ пробегает фильтрующееся по убыванию множество Ψ полунепрерывных снизу ограниченных функций, $\geqslant f$. Если $a \geqslant \| f \|$, то применяя условие предложения к фильтрующемуся по возрастанию множеству классов функций $a - \psi$, где $\psi \in \Psi$ и $\psi \leqslant a$, на основании леммы получаем равенство $\theta(f) = \inf_{\psi \in \Psi} \theta(\psi)$, а стало быть, и равенство $\theta(f) = \nu^*(f)$. В частности, для любой μ-пренебрежимой функции $f \geqslant 0$ имеем $\theta(f) = 0$, значит, $\nu^*(f) = 0$, и следовательно (п. 5, теорема 2), ν есть мера *с базисом* μ; кроме того, $\nu^*(1) = \theta(1) < +\infty$, и значит (следствие из теоремы 1), $\nu = g \cdot \mu$, где $g \in \mathscr{L}^1(T, \mu)$. Наконец, поскольку любая μ-измеримая функция ν-измерима, то всякая положительная функция $f \in \mathscr{L}^\infty(T, \mu)$ ν-интегрируема, и тогда $\int fg \, d\mu = \nu^*(f) = \theta(f)$, чем и заканчивается доказательство.

Из предложения 14 заключаем, что линейные формы на $\mathscr{L}^\infty$ вида $f \mapsto \int fg \, d\mu$, где $g \in \mathscr{L}^1$, представляют собой разности $\theta_1 - \theta_2$, где θ_1 и θ_2 — положительные линейные формы, удовлетворяющие условию предложения 14.

9. Приложения: II. Функции мер

Пусть $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ — действительные меры на T и $u(x_1, \ldots, x_n)$ — конечная *положительно однородная* числовая функция, определенная на $\mathbf{R}^n$ (т. е. (гл. I, § 1, п. 1) такая функция, что

$$u(\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n) = \alpha u(x_1, \ldots, x_n) \qquad (12)$$

для любого скаляра $\alpha \geqslant 0$). На T существуют положительные меры λ, такие, что $|\mu_i| \leqslant \lambda$ при $1 \leqslant i \leqslant n$ (например, сумма

$\sum_{i=1}^{n} |\mu_i|$). Пусть λ, λ' — две такие меры на T. Можно написать $\mu_i = f_i \cdot \lambda = f_i' \cdot \lambda'$, где функция f_i (соотв. f_i') измерима и существенно ограничена относительно меры λ (соотв. λ') (п. 5, теорема 2). Мы установим следующий результат: *для того чтобы числовая функция* $u(f_1, \ldots, f_n)$ *была локально интегрируема относительно* λ, *необходимо и достаточно, чтобы функция* $u(f_1', \ldots, f_n')$ *была локально интегрируема относительно* λ', *и тогда*

$$u(f_1, \ldots, f_n) \cdot \lambda = u(f_1', \ldots, f_n') \cdot \lambda'.$$

Так как $|\mu_i| \leqslant \inf(\lambda, \lambda')$, то можно ограничиться случаем, когда $\lambda \leqslant \lambda'$. Тогда $\lambda = g \cdot \lambda'$, где g есть λ'-измеримая функция в пределах $0 \leqslant g \leqslant 1$ (п. 5., теорема 2); отсюда (п. 4, предл. 8) следует, что $\mu_i = f_i(g \cdot \lambda') = (f_i g) \cdot \lambda'$, откуда вытекает (п. 3, следствие 2 из предл. 3), что $f_i g$ равна f_i' локально почти всюду относительно λ'. Таким образом,

$$u(f_1', \ldots, f_n') = u(f_1 g, \ldots, f_n g) = u(f_1, \ldots, f_n)\, g$$

локально почти всюду относительно λ'. Стало быть, для того чтобы функция $u(f_1', \ldots, f_n')$ была локально λ'-интегрируема, необходимо и достаточно, чтобы функция $u(f_1, \ldots, f_n)\, g$ была локально интегрируема относительно λ', т. е. (п. 4, предл. 8) чтобы $u(f_1, \ldots, f_n)$ была локально интегрируема относительно λ, и тогда имеем (п. 4, предл. 8)

$$u(f_1', \ldots, f_n') \cdot \lambda' = (u(f_1, \ldots, f_n)\, g) \cdot \lambda' = u(f_1, \ldots, f_n) \cdot \lambda.$$

Итак, мера $u(f_1, \ldots, f_n) \cdot \lambda$ зависит только от мер $\mu_1, \ldots, \mu_n$ и от функции u; она обозначается также $u(\mu_1, \ldots, \mu_n)$. Эта мера будет, следовательно, определена, если u — такая положительно однородная функция, что для некоторой положительной меры λ, мажорирующей все $|\mu_i|$, функция $u(f_1, \ldots, f_n)$ локально λ-интегрируема, где f_i — плотности мер μ_i относительно λ. Отметим, что это условие заведомо выполняется для положительно однородной *непрерывной* функции u: действительно, тогда

$$|u(x_1, \ldots, x_n)| \leqslant a(|x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|)$$

(поскольку u ограничена в достаточно малой окрестности точки $(0, \ldots, 0)$), и так как $u(f_1, \ldots, f_n)$ λ-измерима (гл. IV, § 5, п. 3, теорема 1), то, в силу критерия интегрируемости (гл. IV, § 5, п. 6, теорема 5), она локально λ-интегрируема.

Пусть $u_1, \ldots, u_p$ — положительно однородные числовые функции, определенные на $\mathbf{R}^n$ и такие, что p функций $g_k = u_k(f_1, \ldots, f_n)$ $(1 \leqslant k \leqslant p)$ локально λ-интегрируемы. Пусть v есть положительно однородная числовая функция, определенная на $\mathbf{R}^n$ и такая, что $v(g_1, \ldots, g_p)$ локально λ-интегрируема. Положим $w(x_1, \ldots, x_n) = v(u_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, u_p(x_1, \ldots, x_n))$.

Тогда функция w будет положительно однородна, $w(f_1, \ldots, f_n)$ — локально λ-интегрируема, и по определению имеем $w(\mu_1, \ldots, \mu_n) = v(u_1(\mu_1, \ldots, \mu_n), \ldots, u_p(\mu_1, \ldots, \mu_n))$.

В частных случаях функций x^+, x^-, $|x|$, $x + y$, $\inf(x, y)$, $\sup(x, y)$ меры, определяемые вышеописанным способом, совпадают соответственно с теми, которые обозначаются μ^+, μ^-, $|\mu|$, $\mu + \nu$, $\inf(\mu, \nu)$, $\sup(\mu, \nu)$; это сразу же получается из предложения 2. Если μ и ν — действительные меры и $\theta = \mu + i\nu$, то $|\theta| = \sqrt{\mu^2 + \nu^2}$; в самом деле, пусть $\lambda \geqslant 0$ — мера, мажорирующая $|\mu|$ и $|\nu|$, а f, g — локально λ-интегрируемые функции, такие, что $\mu = f \cdot \lambda$, $\nu = g \cdot \lambda$; тогда $\sqrt{\mu^2 + \nu^2} = \sqrt{f^2 + g^2} \cdot \lambda$, $\theta = (f + ig) \cdot \lambda$, и значит (предл. 2), $|\theta| = \sqrt{f^2 + g^2} \cdot \lambda$.

Описанный метод можно применить к положительно однородной функции $(x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{1/2}$ для определения длины кривой в $\mathbf{R}^n$.

10. *Непрерывные меры; атомические меры*

Определение 5. *Мера θ на T называется непрерывной, если для любого $t \in T$ $|\theta|(\{t\}) = 0$.*

Пример. Мера Лебега на $\mathbf{R}$ является непрерывной (гл. IV, § 1, п. 3, замечание 1).

Утверждение, что μ есть непрерывная мера на T, означает, что всякое множество, дополнительное к конечному, несет $|\theta|$, или еще, что мера $|\theta|$ сингулярна с любой точечной мерой. Следовательно, непрерывные меры составляют полосу в $\mathscr{M}(T)$ (гл. II, § 1, п. 5, теорема 1).

Напомним (гл. III (2-е изд.), § 1, п. 3), что комплексная мера ρ на T называется *атомической*, если она имеет вид $\sum_{t \in T} \alpha(t)\, \varepsilon_t$, где α — такая комплексная функция на T, что $\sum_{t \in K} |\alpha(t)| < +\infty$ для

любого компакта K из T; это означает, что семейство $(\alpha(t)\,\varepsilon_t)_{t\in T}$ суммируемо (§ 2, п. 1, замечание 2). Тогда из замечания после следствия 3 из теоремы 2 п. 5 вытекает, что $|\rho| = \sum_{t\in T} |\alpha(t)|\,\varepsilon_t$. Входящая в эти формулы функция α определяется однозначно, поскольку $\alpha(t) = \rho(\{t\})$. Атомическая мера и непрерывная мера сингулярны.

Предложение 15. *Всякая комплексная мера σ на T может быть единственным образом представлена в виде $\rho + \theta$, где ρ — атомическая мера, θ — непрерывная мера; при этом $|\sigma| = |\rho| + |\theta|$.*

Единственность разбиения очевидна, ибо ρ — атомическая, а θ — непрерывна, и значит, должны выполняться соотношения

$$\rho = \sum_{t\in T} \rho(\{t\})\,\varepsilon_t = \sum_{t\in T} \sigma(\{t\})\,\varepsilon_t, \qquad \theta = \sigma - \rho.$$

Для доказательства существования достаточно заметить, что $\sum_{t\in K} |\sigma(\{t\})| \leqslant |\sigma|(K) < +\infty$ для любого компакта K, так что можно положить $\sum_{t\in T} \sigma(\{t\})\,\varepsilon_t = \rho$. Мера $\sigma - \rho$, очевидно, непрерывна, и соотношение $|\sigma| = |\rho| + |\sigma - \rho|$ вытекает сразу же из следствия 3 предложения 13, п. 8.

Отметим, что это доказательство показывает, что если σ несома множеством M и если $|\sigma|(\{t\}) > 0$ для любого $t \in M$, то σ — *атомическая* мера.

Упражнения

1) Пусть T и X — локально компактные пространства, $\mu \geqslant 0$ — мера на T, Λ: $t \mapsto \lambda_t$ — μ-согласованное отображение T в $\mathscr{M}_+(X)$ и g — локально интегрируемая функция относительно меры $\nu = \int \lambda_t\, d\mu(t)$. Построить пример, показывающий, что если X не счетно в бесконечности, то g не может быть локально λ_t-интегрируемой ни при каком значении t (ср. § 3, упр. 4).

2) Пусть g — положительная функция на T, измеримая и существенно ограниченная относительно μ, и пусть $\nu = g\cdot\mu$. Показать, что если функция f на T со значениями в банаховом пространстве или в $\overline{\mathbf{R}}$ μ-интегрируема, то она ν-интегрируема. (Заметить, что $\nu \leqslant a\mu$ для любой постоянной $a > 0$, и воспользоваться предл. 15, гл. IV, § 1, п. 3).

3) Пусть X — локально компактное пространство, Λ: $t \mapsto \lambda_t$ и Λ': $t \mapsto \lambda'_t$ — два μ-согласованных отображения T в $\mathscr{M}_+(X)$ и пусть $\nu = \int \lambda_t \, d\mu(t)$, $\nu' = \int \lambda'_t \, d\mu(t)$. Показать, что если λ'_t есть мера с базисом λ_t локально почти всюду относительно μ, то ν' есть мера с базисом ν. (Рассмотреть ν-пренебрежимое компактное подмножество K из X. Оно λ_t-пренебрежимо локально почти всюду, и значит, λ'_t-пренебрежимо локально почти всюду. Применить предл. 5, § 3.)

4) a) Пусть $\mu \geqslant 0$ — модерантная мера на T. Показать, что существует такая непрерывная функция $h \geqslant 0$ на T, что $h \cdot \mu$ ограничена и эквивалентна μ (рассуждать, как в предл. 11).

b) Пусть (μ_n) — последовательность положительных модерантных мер на T. Показать, что существует такая мера $\mu \geqslant 0$ на T, что каждая μ_n имеет базис μ (свести к случаю, когда каждая из μ_n ограничена).

5) Пусть ρ, σ — атомические меры на T; M, N — наименьшие множества, несущие соответственно $|\rho|$ и $|\sigma|$. Для того чтобы ρ и σ были сингулярны, необходимо и достаточно, чтобы $M \cap N = \varnothing$. Основываясь на этом, построить пример такой атомической меры ν на интервале $I = [0, 1]$ из $\mathbf{R}$, чтобы I был носителем мер ν^+ и ν^-.

6) a) Пусть μ — положительная мера на T. Показать, что если $A \subset T$ универсально измеримо и не является локально μ-пренебрежимым, то существует положительная мера ν, несомая A и такая, что $\nu \neq 0$ и $\nu \leqslant \mu$. (Взять $\nu = \varphi_K \cdot \mu$, где K — компактное подмножество из A, не являющееся μ-пренебрежимым.)

b) Пусть M — универсально измеримое подмножество из T. Для того чтобы положительная мера λ на T была несома множеством M, необходимо и достаточно, чтобы λ была сингулярной с любой положительной мерой, несомой $\mathbf{C}M$ (использовать a)).

c) Вывести из b), что меры ρ на T, такие, что $|\rho|$ несома M, образуют полосу в $\mathscr{M}(T)$. Эта полоса широко замкнута в $\mathscr{M}(T)$, если M — замкнутое подмножество из T (гл. III (2-е, изд.), § 2, предл. 6).

d) Показать, что мера Лебега на $I = [0, 1]$ есть широкий предел последовательности атомических мер, несомых фиксированным счетным множеством $A \subset I$ (ср. гл. III (2-е изд.), § 2, теорема 1 и предл. 13). Следовательно, полоса мер, несомых множеством A, не является широко замкнутой.

°7) a) Пусть μ — положительная мера на T и пусть A — такое μ-интегрируемое множество, что $\mu(A) > 0$. Показать, что если для любого μ-интегрируемого множества $B \subset A$ $\mu(B) = 0$ или $\mu(B) = \mu(A)$, то найдется такая точка $a \in A$, что $\mu(\{a\}) = \mu(A)$. (Рассмотреть пересечение таких компактных множеств $K \subset A$, что $\mu(K) = \mu(A)$; показать, что оно не пусто, имеет меру, равную $\mu(A)$, и сводится к единственной точке.)

b) Предположим, что μ — непрерывная мера. Показать, что для любого μ-интегрируемого множества A, такого, что $\mu(A) > 0$, и любого $\varepsilon > 0$ существует такое μ-интегрируемое подмножество $B \subset A$, что $0 < \mu(B) \leqslant \varepsilon$ (заметить с помощью a), что существует такое μ-интегрируемое подмножество $C \subset A$, что $0 < \mu(C) \leqslant (1/2)\,\mu(A)$). Вывести отсюда, что когда X пробегает множество μ-интегрируемых подмножеств из A, то множество значений $\mu(X)$ есть замкнутый интервал $[0, \mu(A)]$ (для любого числа β, $0 < \beta < \mu(A)$, обозначим через γ верхнюю грань мер таких измеримых подмножеств $X \subset A$, что $\mu(X) \leqslant \leqslant \beta$; показать вначале, что $\gamma = \beta$, используя предыдущий результат, а затем доказать, что существует возрастающая последовательность (X_n) измеримых подмножеств из A, для которых $\lim_{n\to\infty} \mu(X_n) = \beta$).

°8) a) Пусть ν — положительная атомическая мера на T и A — ν-интегрируемое подмножество из T. Показать, что множество значений $\nu(X)$, когда X пробегает множество ν-интегрируемых подмножеств из A, замкнуто в $\mathbf{R}$. (Пусть N — наименьшее множество, несущее ν. Предполагая $A \cap N$ бесконечным и располагая точки из $A \cap N$ в последовательность (a_n) рассмотреть отображение φ пространства-произведения $\{0, 1\}^N$ в $\mathbf{R}$, определенное равенством $\varphi((\varepsilon_n)) = \sum_n \varepsilon_n \nu(\{a_n\})$, и показать, что оно непрерывно.)

b) Вывести из a) и из упр. 7b), что если μ — произвольная положительная мера на T, а A — интегрируемое подмножество T, то множество значений $\mu(X)$, когда X пробегает множество μ-интегрируемых подмножеств из A, замкнуто в $\mathbf{R}$. Распространить этот результат на случай, когда μ — произвольная действительная мера на T.

c) Вывести из упр. 7b), что если μ — непрерывная действительная мера на T, то множество значений $\mu(X) = \mu^+(X) - \mu^-(X)$, где X пробегает множество $|\mu|$-интегрируемых подмножеств из T, есть замкнутый (ограниченный или нет) интервал из $\mathbf{R}$.

d) Построить пример такой положительной атомической меры ν на локально компактном, но не компактном пространстве T, что множество значений $\nu(X)$, где X пробегает множество ν-интегрируемых подмножеств из T, не замкнуто (выбрать ν так, чтобы $\inf_{t\in T} \nu(\{t\}) > 0$).

9) Пусть μ и ν — сингулярные положительные меры на T. Показать, что для любого числа p, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, топологическое векторное пространство $L^p(T, \mu + \nu)$ изоморфно пространству — произведению топологических векторных пространств $L^p(T, \mu)$ и $L^p(T, \nu)$.

10) a) Пусть $\mu \neq 0$ — положительная непрерывная мера на локально компактном пространстве T. Показать, что в $\mathscr{L}^1(T, \mu)$ найдется такая последовательность функций f_n, что $N_1(f_n) = 1$ при любом n и что последовательность непрерывных мер $f_n \cdot \mu$ широко сходится к точечной мере ε_a. Вывести отсюда, что $L^1(T, \mu)$ (а значит, также и $L^\infty(T, \mu)$) не является рефлексивным.

b) Пусть ν — положительная атомическая мера на T с бесконечным носителем. Пусть A — наименьшее множество, несущее ν, B — бесконечное счетное подмножество из A и λ — мера $\varphi_B \cdot \nu$. Показать, что сопряженное к $L^\infty(T, \lambda)$ не будет пространством счетного типа, и значит, не может быть изоморфно $L^1(T, \lambda)$ (ср. Топ. вект. пр-ва, гл. I (2-е изд.), § 2, упр. 1).

c) Вывести из a) и b), что для того чтобы положительная мера μ на локально компактном пространстве T была такова, что $L^1(T, \mu)$ рефлексивно, необходимо и достаточно, чтобы носитель μ был конечен (использовать упр. 9).

°11) Пусть S — стоуново компактное пространство (гл. II, § 1, упр. 13f)); говорят, что положительная мера μ на S *нормальна*, если для любого фильтрующегося по возрастанию семейства $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$ непрерывных функций на S, мажорированного в $\mathscr{C}(S)$ и такого, что f — его верхняя грань во вполне решеточном пространстве $\mathscr{C}(S)$ (верхняя грань не обязательно равна верхней огибающей семейства (f_α)), имеем $\mu(f) = \sup_{\alpha \in A} \mu(f_\alpha)$. Говорят, что действительная мера λ на S нормальна, если нормальны положительные меры λ^+ и λ^-.

a) Для того чтобы положительная мера μ на S была нормальна, необходимо и достаточно, чтобы любое нигде не плотное множество A было μ-пренебрежимо (для доказательства необходимости рассмотреть в S открытые и замкнутые множества, содержащие A; для доказательства достаточности заметить, что верхняя огибающая и верхняя грань в $\mathscr{C}(S)$ фильтрующегося по возрастанию мажорированного семейства (f_α) равны на дополнении тощего множества (ср. гл. II, § 1, упр. 13f)). Вывести отсюда, что носитель меры μ одновременно открыт и замкнут.

b) Пусть μ — положительная нормальная мера на S, f — числовая μ-измеримая функция и g — наибольшая полунепрерывная снизу функция на S такая, что $g \leqslant f$. Показать, что f и g равны почти всюду относительно μ (ср. гл. IV (2-е изд.), § 5, упр. 16b)). Вывести отсюда, что для любого μ-измеримого подмножества A из S множества $A - \mathring{A}$ и $\bar{A} - A$ μ-пренебрежимы.

c) Показать, что в банаховом пространстве $\mathscr{M}(S)$ мер на S множество нормальных мер есть замкнутое векторное подпространство, и оно является полосой относительно структуры вполне решеточного пространства в $\mathscr{M}(S)$.

°12) Говорят, что компактное стоуново пространство *гиперстоуново*, если объединение носителей положительных нормальных мер на H (упр. 11) всюду плотно.

a) Пусть T — локально компактное пространство и μ — положительная мера на T. Показать, что существует такой изоморфизм $u \mapsto \theta_u$ банахова пространства $L^\infty(T, \mu)$ на пространство $\mathscr{C}(H)$ непрерывных числовых функций на гиперстоуновом пространстве H, что $\theta_u^+ = \theta_{u^+}$ (ср. предл. 14 и гл. II, § 1, упр. 13).

b) Пусть h — компактное гиперстоуново пространство и пусть $(\mu_\iota)_{\iota\in I}$ — такое семейство положительных нормальных мер на H, что объединение носителей мер μ_ι всюду плотно в H. Показать, что для того чтобы множество было нигде не плотно в H, необходимо и достаточно, чтобы оно было μ_ι-пренебрежимо при любом $\iota \in I$ (заметить, что если A μ_ι-пренебрежимо, то это верно и для $\overline{A}$ (упр. 11b))). Вывести отсюда, что в гиперстоуновом пространстве всякое тощее множество нигде не плотно.

c) При тех же предположениях, что и в b), показать, что если f — числовая функция, μ_ι-измеримая при любом $\iota \in I$, то найдется такая непрерывная на H функция g, что f и g совпадают на дополнении нигде не плотного множества (использовать b) и упр. 11b)).

d) Пусть H — гиперстоуново пространство. Показать, что существует семейство $(G_\alpha)_{\alpha\in A}$ непустых открытых и замкнутых подмножеств из H, попарно не пересекающихся, таких, что их объединение T всюду плотно в H, и таких, что для любого $\alpha \in A$ найдется положительная нормальная мера μ_α на G_α с носителем G_α (применить теорему Цорна к множеству семейств положительных нормальных мер на H, носители которых попарно не пересекаются, и использовать упр. 11a)). Пусть μ — мера на T, сужение которой на каждое G_α есть μ_α (гл. III (2-е изд.), § 2, предл. 1). Показать, что отображение, ставящее каждой функции $f \in \mathscr{C}(H)$ в соответствие класс в $L^\infty(T, \mu)$ ее сужений на T, есть изоморфизм банахова пространства $\mathscr{C}(H)$ на $L^\infty(T, \mu)$ (для доказательства сюръективности использовать c)).

°13) Пусть T — локально компактное пространство, μ — положительная мера на T и (f_n) — последовательность функций из $\mathscr{L}^1(T, \mu)$; положим $\mu_n = f_n \cdot \mu$ и для любого μ-измеримого множества A

$$\mu_n(A) = \mu_n^+(A) - \mu_n^-(A) = \int_A f_n \, d\mu.$$

a) Показать, что если T не компактно, то последовательность (f_n) может быть не ограничена в $\mathscr{L}^1(T, \mu)$, и при этом последовательность интегралов $\int f_n g \, d\mu$ ограничена для любой функции $g \in \mathscr{K}(T)$.

b) Показать, что если последовательность $(\mu_n(A))$ ограничена для любого подмножества $A \subset T$, сводящегося к точке, и для любого открытого множества A, для которого мера, индуцируемая μ на границе A, имеет конечный носитель, то последовательность (f_n) ограничена в $\mathscr{L}^1$, или, что то же самое, последовательность норм $(\| \mu_n \|)$ ограничена. (Показать сначала, что каждая точка $t_0 \in T$ имеет такую открытую окрестность U, что последовательность чисел $|\mu_n|(U)$ ограничена. Для этого рассуждать от противного, доказывая, что в противном случае можно построить строго возрастающую последовательность (n_k) целых чисел, убывающую последовательность (U_k) окрестностей

точки t_0 и последовательность (W_k) квадрируемых относительно μ открытых множеств (гл. IV (2-е изд.), § 5, упр. 13), так, чтобы

$$\overline{U}_k \subset U_{k-1}, \quad \mu(U_k - \{t_0\}) \leqslant 1/k,$$

$$|\mu_{n_i}|(U_k - \{t_0\}) \leqslant 1 \text{ для } i < k, \ \overline{W} \subset U_k - \overline{U}_{k+1},$$

и окончательно,

$$|\mu_{n_k}(W_k)| > k + \sum_{i<k} |\mu_{n_k}(W_i)|.$$

Наконец, чтобы прийти к противоречию, рассмотреть объединение W множеств W_k («метод скользящего горба»). Затем аналогичным рассуждением показать, что найдется такое компактное подмножество $K \subset T$, что последовательность $|\mu_n|(T - K)$ ограничена.)

c) Вывести из b), что если для любого открытого множества $A \subset T$ последовательность $(\mu_n(A))$ ограничена, то последовательность (f_n) ограничена в $\mathscr{L}^1$.

d) Если взять на интервале $[0, 1]$ в качестве μ_n меру, определенную массой n в точке $t = 0$ и массой $-n$ в точке $t = -1/n$, то последовательность $(\mu_n(A))$ будет ограничена для любого открытого множества A, квадрируемого относительно всех мер $|\mu_n|$, в то время как последовательность норм $\|\mu_n\|$ не ограничена. Точно так же, если взять в качестве μ_n меру, определенную массой n в точке $t = 1/n$ и массой $-n$ в точке $t = 1/(n+1)$, то последовательность $(\mu_n(A))$ будет ограничена для любого интервала, содержащегося в $[0, 1]$ (а значит, и для любого конечного подмножества из A), без того чтобы последовательность $(\|\mu_n\|)$ была ограниченной.

14) Пусть θ — линейная форма на пространстве $\mathscr{L}^\infty(T, \mu)$; для того чтобы θ была формой типа $f \mapsto \int fg\,d\mu$, где $g \in \mathscr{L}^1(T, \mu)$, необходимо и достаточно, чтобы θ удовлетворяла следующим условиям: 1° для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что соотношение $\mu^*(A) \leqslant \delta$ влечет $|\theta(h)| \leqslant \varepsilon$ для любой μ-измеримой функции h, для которой $|h| \leqslant \varphi_A$; 2° для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое компактное множество K, что для любого μ-интегрируемого множества $B \subset T - K$ выполняется неравенство $|\theta(\varphi_B)| \leqslant \varepsilon$. (Использовать теорему Лебега — Никодима.)

°15) Пусть H — ограниченное подмножество из $\mathscr{L}^1(T, \mu)$, $\widetilde{H}$ — его канонический образ в банаховом пространстве $L^1(T, \mu)$. Показать, что следующие условия эквивалентны:

α) Имеет место совокупность двух условий:

α_1) для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое компактное множество $L \subset T$, что $\int_{T-L} |f|\,d\mu \leqslant \varepsilon$ для любой функции $f \in H$;

α_2) для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\eta > 0$, что для любого открытого множества $U \subset T$, удовлетворяющего неравенству $\mu^*(U) \leqslant \eta$, имеем $\int_U |f|\,d\mu \leqslant \varepsilon$ для любого $f \in H$.

β) Имеет место совокупность двух условий: α_1) и

β_2) для любого компактного множества $K \subset T$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется такая открытая окрестность U множества K, что $\int_{U-K} |f|\,d\mu \leqslant \varepsilon$ для любого $f \in H$.

γ) Для любой последовательности (g_n) функций из $\mathscr{L}^\infty$, равномерно ограниченной и сходящейся по мере к функции g, имеем

$$\lim_{n\to\infty} \int f g_n d\mu = \int f g d\mu$$

равномерно, когда f пробегает H.

δ) Для любой последовательности (h_n) непрерывных функций на T, сходящихся к 0 в бесконечности, равномерно ограниченной и такой, что $\lim_{n\to\infty} h_n(t) = 0$ для любого $t \in T$, имеем $\lim \int f h_n\,d\mu = 0$ *равномерно*, когда f пробегает H.

ζ) Для любой бесконечной последовательности (U_n) попарно не пересекающихся открытых множеств из T имеем $\lim_{n\to\infty} \int_{U_n} f\,d\mu = 0$ *равномерно*, когда f пробегает H. (Чтобы показать, что ζ) влечет β) и что β) влечет α), использовать «метод скользящего горба», так же, как в упр. 13b). Затем доказать, что α) влечет γ), что γ) влечет δ) и что δ) влечет ζ).)

Показать, что, если, кроме того, предположить, что для любого $t \in T$, для которого $\mu(\{t\}) \neq 0$, множество значений $f(t)$ *ограничено* в $\mathbf{R}$, когда f пробегает H, то предыдущие условия эквивалентны условию:

θ) $\widetilde{H}$ есть относительно компактное подмножество из L^1 относительно ослабленной топологии $\sigma(L^1, L^\infty)$. (Чтобы показать, что θ) влечет β), рассуждать от противного, используя теорему Шмульяна (Топ. вект. пр-ва, гл. IV, § 2, упр. 13) и «метод скользящего горба» Чтобы показать, что α) влечет θ), показать, что H ограничено в $\mathscr{L}^1$, а затем применить теорему Эберлейна (Топ. вект. пр-ва, гл. IV, § 2, упр. 15) и воспользоваться упр. 14.)

°16) a) Пусть (f_n) — последовательность функций из $\mathscr{L}^1(T, \mu)$. Показать, что следующие условия эквивалентны:

α) Последовательность $(\widetilde{f}_n)$ сходится в L' относительно ослабленной топологии $\sigma(L^1, L^\infty)$.

β) Множество классов $\widetilde{f_n}$ относительно компактно в L^1 относительно ослабленной топологии, и последовательность мер $f_n \cdot \mu$ широко сходится в $\mathscr{M}(T)$.

γ) Для любого открытого подмножества $U \subset T$ последовательность чисел $\int_U f_n \, d\mu$ сходится в R. (Чтобы показать, что β) влечет α), использовать критерий α) из упр. 15 и определение измеримой функции. Чтобы показать, что γ) влечет β), рассмотреть вначале частный случай пространства $L^1(\mathbf{N})$ (дискретная мера, определенная массой $+1$ в каждой точке), воспользовавшись упр. 4 (Топ. векст. пр-ва, гл. IV, § 5). В общем случае применять критерий из упр. 15, чтобы свести все к случаю пространства $L^1(\mathbf{N})$, сопоставив каждой функции f_n суммируемую последовательность $\left(\int_{Um} f_n \, d\mu\right)_{m \in \mathbf{N}}$.)

b) Вывести отсюда что в L^1 всякая последовательность Коши относительно ослабленной топологии сходится в этой топологии.

c) Пусть на интервале $T = [0, 1]$ μ есть мера Лебега; пусть для любого целого $n \geqslant 1$ через μ_n обозначена мера, определенная массой $1/n$ в каждой точке k/n $(0 \leqslant k < n)$; пусть, далее, ν — такая положительная мера на T, что $\mu = g \cdot \nu$, $\mu_n = f_n \cdot \nu$ (упр. 4b)). Показать, что последовательность (μ_n) широко сходится к μ, $\mu_n(A)$ сходится к $\mu(A)$ для любого конечного подмножества $A \subset T$ и для любого открытого множества A, для которого мера, индуцируемой мерой ν на границе A, имеет конечный носитель, но $\mu_n(U)$ не стремится к $\mu(U)$ для всех открытых множеств $U \subset T$ (ср. упр. 13b)).

17) a) Пусть μ — мера Лебега на интервале $T = [0, +\infty]$. Показать, что если $1 \leqslant r < s < +\infty$, то топологии, индуцируемые на $L^r \cap L^s$ ослабленными топологиями в L^r и L^s, не сравнимы (ср. гл. IV, § 6, упр. 8). Показать, что если f_n — характеристическая функция интервала $[n, n+1]$, то последовательность $(\widetilde{f_n})$ стремится к 0 в ослабленной топологии всех L^p, для которых $p > 1$, но это не имеет места для ослабленной топологии пространства L^1.

b) Пусть λ — мера Лебега на интервале $T = [0, 1]$. Показать, что если $r < s$, то ослабленная топология в L^s строго сильнее, чем топология, индуцируемая в L^s ослабленной топологией из L^r (ср. гл. IV, § 6, упр. 8).

c) Пусть μ — положительная мера на дискретном пространстве, относительно которой всякая точка имеет меру 1. Показать, что если $1 \leqslant r < s < +\infty$, то ослабленная топология в L^r строго сильнее, чем топология, индуцируемая в L^r ослабленной топологией из L^s (гл. IV, § 6, упр. 9).

18) Пусть A — множество, содержащееся в $L^r \cap L^s$ и ограниченное одновременно в L^r и в L^s $(1 < r < s < +\infty)$. Показать, что для

любого p, такого, что $r \leqslant p \leqslant s$, A ограничено в L^p и что топологии, индуцируемые в A ослабленными топологиями из L^p, идентичны (заметить, что $\mathscr{K}(T)$ плотно во всех пространствах L^q, где $1 \leqslant q < +\infty$). Показать, что это свойство перестает выполняться, если $r = 1$ (ср. упр. 17a)).

°19) Пусть μ — положительная мера на T.

a) Пусть (f_n) — последовательность функций в $\mathscr{L}^p$ $(1 < p < +\infty)$, ограниченная в $\mathscr{L}^p$ и сходящаяся по мере к 0. Показать, что последовательность $(\tilde{f}_n)$ сходится к 0 в L^p относительно ослабленной топологии.

b) Построить пример последовательности (f_n) функций из $\mathscr{L}^1$, ограниченной в $\mathscr{L}^1$ и сходящейся по мере к 0, но такой, что последовательность $(\tilde{f}_n)$ не сходится к 0 в ослабленной топологии пространства L^1 (взять в качестве μ меру Лебега на $T = [0, 1]$ и использовать критерий α) из упр. 15).

c) Пусть μ — мера Лебега на $T = [0, 1]$. Показать, что если $f_n(t) = \sin nt$, то последовательность $(\tilde{f}_n)$ сходится к 0 в ослабленной топологии всех L^p, для которых $1 \leqslant p < +\infty$, но не сходится по мере к 0.

20) a) Пусть (f_n) — такая последовательность функций из $\mathscr{L}^1$, что: 1° последовательность (f_n) сходится по мере к 0: 2° для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\eta > 0$, что из соотношения $\mu^*(A) \leqslant \eta$ следует, что $\limsup_{n\to\infty} \int_A^* |f_n| \, d\mu \leqslant \varepsilon$; 3° для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое интегрируемое множество B, что $\int_{T-B} |f_n| \, d\mu \leqslant \varepsilon$ для любого n. Показать, что последовательность (f_n) сходится в среднем к 0.

b) Пусть μ — мера Лебега на $T = [0, 1]$. Для $1 < p < +\infty$ обозначим через f_n функцию, равную $n^{2/p}$ на интервале $[1/(n+1), 1/n]$ и 0 в остальных точках. Показать, что последовательность (f_n) удовлетворяет трем условиям из a) и что последовательность $(\tilde{f}_n)$ сходится к 0 в ослабленной топологии пространства L^p, но не в топологии сходимости в среднем порядка p.

°21) a) Пусть (f_n) — такая последовательность функций из $\mathscr{L}^1$, что:

1° $\liminf_{n\to\infty} f_n(t) \geqslant 0$ почти всюду на T;

2° для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\eta > 0$, что из соотношения $\mu^*(A) \leqslant \mu$ следует $\limsup_{n\to\infty} \int_A^* |f_n| \, d\mu \leqslant \varepsilon$;

3° для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое интегрируемое множество B, что при любом n $\int_{T-B} |f_n| \, d\mu \leqslant \varepsilon$;

4° справедливо равенство $\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu = 0$.

Показать, что последовательность (f_n) сходится в среднем к 0. (Заметить, что каково бы ни было $\varepsilon > 0$, если C_m — множество тех $t \in T$, для которых $f_n(t) \geqslant -\varepsilon$ по крайней мере при одном $n \geqslant m$, то последовательность (C_m) убывает и имеет пренебрежимое пересечение.)

b) Пусть (f_n) — такая последовательность функций из $\mathscr{L}^1$, что: 1° существует интегрируемая функция g, для которой $f_n \geqslant g$ при любом n; 2° $\liminf_{n\to\infty} f_n(t) \geqslant 0$ почти всюду; 3° $\limsup_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu \leqslant 0$.

Показать, что последовательность (f_n) сходится в среднем к 0. (Сначала показать, что для любого измеримого множества A $\liminf_{n\to\infty} \int_A f_n \, d\mu \geqslant 0$; затем заметить, что для любого измеримого множества A

$$\limsup_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu \geqslant \limsup_{n\to\infty} \int_A f_n \, d\mu + \liminf_{n\to\infty} \int_{T-A} f_n \, d\mu.)$$

°22) Пусть в банаховом пространстве $E = \mathscr{M}^1(T)$ ограниченных мер на локально компактном пространстве T через H обозначено компактное множество в ослабленной топологии.

a) Показать, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая положительная мера μ_ε на T, что всякая мера $\nu \in H$ является суммой меры с базисом μ_ε и меры λ, сингулярной с μ_ε и имеющей норму $\leqslant \varepsilon$. (Использовать тот факт, что пространство E, наделенное своей нормой и своей структурой порядка, изоморфно пространству $L^1(S, \rho)$, где S — объединение компактных стоуновых пространств, а ρ — положительная мера на S (гл. IV, § 4, упр. 10), и применить в $L^1(S, \rho)$ критерий α_1) из упр. 15.)

b) Вывести из a), что существует такая положительная мера μ на T, что все меры $\nu \in H$ имеют базис μ (использовать упр. 4b)).

23) Пусть μ — положительная мера на локально компактном пространстве T, p — число, $1 \leqslant p < +\infty$, q — сопряженный показатель. Показать, что если g — такая конечная измеримая функция, что для любой функции $f \in \mathscr{L}^p$ функция fg интегрируема, то g локально почти всюду равна некоторой функции из $\mathscr{L}^q$. (Показать, что отображение $f \mapsto fg$ пространства $\mathscr{L}^p$ в $\mathscr{L}^1$ непрерывно, используя теорему о замкнутом графике (Топ. векг. пр-ва, гл. I, § 3, следствие 5 из теоремы 1).)

24) Пусть p, q — сопряженные показатели. Показать, что если B (соотв. C) — ограниченное подмножество из L^p (соотв. L^q), то отображение $B \times C$ в L^1, получаемое из отображения $(f, g) \mapsto fg$ факторизa-

цией, не обязательно непрерывно, если наделить L^p, L^q и L^1 соответственно топологиями $\sigma(L^p, L^q)$, $\sigma(L^p, L^q)$ и $\sigma(L^1, L^\infty)$ (ср. упр. 10d)).

°25) a) Доказать, что если u и v — произвольные действительные числа, то для $1 < p < +\infty$ выполняется неравенство

$$|u+v|^p \leqslant |u|^p + pvu|u|^{p-2} + a\sum_{r=2}^{[p]} |v|^r |u|^{p-r} + b|v|^p,$$

где a и b — постоянные, зависящие только от p, а $[p]$ — целая часть числа p (Функции действ. перем., гл. III, § 2, упр. 6).

b) Пусть (f_n) — последовательность, сходящаяся к 0 в L^p относительно ослабленной топологии ($1 < p < +\infty$). Показать, что существует такая подпоследовательность (f_{n_k}) последовательности (f_n), что если положить $s_m = \sum_{k=1}^{m} f_{n_k}$, то

$$\left| \int s_{m-1} |s_{m-1}|^{p-2} f_{n_m} d\mu \right| \leqslant 1$$

(определить последовательность (n_k) по индукции). Отсюда, используя a) и неравенство Гёльдера, вывести, что если $p > 2$, то найдутся такие постоянные a и b, что

$$N_1(|s_n|^p) \leqslant N_1(|s_{n-1}|^p) + a + bN_1(|s_{n-1}|^{p-2}),$$

и что если $1 < p \leqslant 2$, то найдется такая постоянная c, что

$$N_1(|s_n|^p) \leqslant N_1(|s_{n-1}|^p) + c.$$

Заключить, что

$$N_p(s_n) = O(n^{1/2}) \text{ для } p > 2,$$
$$N_p(s_n) = O(n^{1/p}) \text{ для } 1 \leqslant p \leqslant 2.$$

c) Показать, что предыдущие результаты не могут быть улучшены в общем случае (ср. упр. 19d) и 20b)).

°26) Пусть $\mu_1, \ldots, \mu_n$ — меры на локально компактном пространстве T, записываемые в виде $\mu_k = f_k \cdot \mu$, где $\mu \geqslant 0$ — некоторая мера и $|f_k| \leqslant 1$ (п. 9).

a) Пусть Φ — множество таких положительно однородных функций на $\mathbf{R}^m$, что $u(f_1, \ldots, f_m)$ локально μ-пренебрежима для любой функции $u \in \Phi$. Показать, что если последовательность (u_n) функций из Φ равномерно сходится на любом компактном подмножестве из $\mathbf{R}^m$ к функции u, то $u(\mu_1, \ldots, \mu_m)$ есть предел последовательности мер $u_n(\mu_1, \ldots, \mu_m)$ относительно квазисильной топологии в $\mathscr{M}(T)$ (гл. III (2-е изд.), § 2, упр. 8).

b) Предположим, что $u \in \Phi$ непрерывна на $\mathbf{R}^m$. Показать, что отображение $(\mu_1, \ldots, \mu_m) \mapsto u(\mu_1, \ldots, \mu_m)$ пространства $(\mathscr{M}(T))^m$ в $\mathscr{M}(T)$ непрерывно в квазисильной топологии (начать с рассмотрения случая, когда u липшицева; затем применить a) и теорему Вейерштрасса — Стоуна).

c) Предположим, что u непрерывна на $\mathbf{R}^m$. Пусть g — произвольная функция из $\mathscr{K}_+(T)$ и K — ее носитель. Показать, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое конечное открытое покрытие (A_i) множества K, состоящее из относительно компактных множеств, что для любого конечного открытого покрытия (B_j) множества K, более тонкого, чем (A_i), и любого семейства (h_j) непрерывных отображений T в $[0, 1]$ таких, что h_j имеет носитель в B_j и что $\sum_j h_j(t) = 1$ на K, выполняется неравенство

$$\left| \int g \cdot u(f_1, \ldots, f_m)\, d\mu - \sum_j u\left(\int g h_j f_1\, d\mu, \ \ldots, \ \int g h_j f_m\, d\mu \right) \right| \leqslant \varepsilon$$

(вначале рассмотреть случай, когда u липшицева, а f_k непрерывны, а затем перейти к случаю, когда u липшицева, а f_k локально интегрируемы, и наконец — к общему случаю, используя теорему Вейрштрасса — Стоуна).

d) Пусть $u(x_1, x_2)$ — функция на $\mathbf{R}^2$, положительно однородная, равная $\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, когда иррационально x_1/x_2, и 0 в противном случае. Пусть, далее, μ — мера Лебега на $T = [0, 1]$ и ν — мера на T, определенная как $d\nu(t) = t\,d\mu(t)$. Показать, что если $g \geqslant 0$ — непрерывная функция на T, то $\sum_j u\left(\int g h_j\, d\mu, \int g h_j\, d\nu \right)$ не стремится ни к какому пределу по фильтрующемуся множеству конечных открытых покрытий носителя функции g.

27) Пусть X — локально компактное пространство и Λ: $t \mapsto \lambda_t$ — скалярно существенно μ-интегрируемое отображение T в $\mathscr{M}_+(X)$. Предположим, что Λ предсогласовано для любой меры $\varphi_K \cdot \mu$, где K компактно.

a) Показать, что Λ предсогласовано для любой меры $\varphi_A \cdot$, где A — μ-измеримое подмножество из T (рассмотреть компактные подмножества из A).

b) Показать, что Λ предсогласовано для любой меры $f \cdot \mu$, где f положительна, μ-измерима и принимает лишь конечное число значений.

c) Показать, что Λ предсогласовано для любой меры $f \cdot \mu$, где f μ-измерима и заключена между 0 и 1. Вывести отсюда, что Λ μ-согласовано.

28) Пусть X — локально компактное пространство и Λ: $t \mapsto \lambda_t$ — μ-согласованное отображение T в $\mathscr{M}_+(X)$. И пусть $\mu' = g \cdot \mu$ — такая положительная мера с базисом μ, что Λ скалярно существенно μ'-интегрируемо.

a) Показать, что Λ μ'-интегрируемо (использовать упр. 27b) или соотношение $\mu' = \sup_n (\inf(\mu', n\mu))$ и упр. 9 из § 3).

b) Показать, что $\nu' = \int \lambda_t \, d\mu'(t)$ есть мера с базисом $\nu = \int \lambda_t d\mu(t)$.

c) Показать, что отображение $t \mapsto g(t)\lambda_t$ μ-согласовано и его интеграл равен ν'.

29) Пусть X — локально компактное пространство, Λ: $t \mapsto \lambda_t$ — μ-согласованное отображение T в $\mathscr{M}_+(X)$. И пусть g — положительная функция на X, универсально измеримая и локально ограниченная. Показать, что семейство $t \mapsto g \cdot \lambda_t$ μ-согласовано и что

$$\int (g \cdot \lambda_t) \, d\mu(t) = g \int \lambda_t \, d\mu(t)$$

при каждом из следующих условий: a) g модерантна относительно меры $\int \lambda_t \, d\mu(t)$; b) меры λ_t ограничены.

30) a) Пусть M — ограниченное подмножество из C. Показать, что замкнутая выпуклая оболочка множества M есть пересечение замкнутых дисков, содержащих M.

b) Пусть X — локально компактное пространство, μ — такая комплексная мера на X, что $\| \mu \| = \mu(1) = 1$, и f — непрерывная ограниченная комплексная функция на X. Показать, что $\mu(f)$ принадлежит замкнутой выпуклой оболочке множества $f(X)$ в C. (Использовать a).) Вывести отсюда новое доказательство предл. 9.

31) Пусть θ — комплексная мера на T и F — банахово пространство.

a) Показать, что пространство $L^1_{\text{loc}}(T, \theta; F)$ полно. (Записать $|\theta|$ в виде $\sum_\alpha \mu_\alpha$, где (μ_α) — суммируемое семейство мер $\geqslant 0$ на T, носители которых образуют локально счетное семейство попарно не пересекающихся компактных подмножеств. Тем самым определяется непрерывное отображение $L^1_{\text{loc}}(T, \theta; F)$ в $\prod_\alpha L^1_p(T, \mu_\alpha)$. Пусть $\mathfrak{F}$ — фильтр Коши в $L^1_{\text{loc}}(T, \theta; F)$. Его образ в $\prod_\alpha L^1_F(T, \mu_\alpha)$ сходится к некоторому элементу (f_α). Показать, что f_α определяют θ-измеримую функцию f на T, а затем — что f локально θ-интегрируема и что f есть предел фильтра $\mathfrak{F}$ в $L^1_{\text{loc}}(T, \theta; F)$.)

b) Пусть $p > 1$ — действительное число. Обозначим через $\mathscr{L}^p_{\text{loc}}(T, \theta; F)$ векторное пространство θ-измеримых функций f на T со значениями в F, таких, что $|f|^p$ локально θ-интегрируемо. Наделим его полунормами $f \mapsto \left(\int |f\varphi_K|^p \, d|\theta| \right)^{1/p}$, где K пробегает множество компактных подмножеств из T. Пусть $L^p_{\text{loc}}(T, \theta; F)$ — ассоциированное отделимое пространство. Показать, что это пространство полно. (Тот же метод, что и в a).)

§ 6. Образы меры

1. Образ положительной меры

Пусть X — локально компактное пространство и π — μ-*измеримое* отображение T в X. Утверждение, что пара $(\pi, 1)$ μ-адаптирована (§ 4, п. 1), равносильно утверждению, что для любой функции $f \in \mathscr{K}(X)$ функция $f \circ \pi$ *существенно* μ-*интегрируема.*

Предложение 1. *Пусть* π — μ-*измеримое отображение пространства* T *в локально компактное пространство* X. *Следующие свойства эквивалентны:*

a) *для любой функции* $f \in \mathscr{K}(X)$ *функция* $f \circ \pi$ *существенно* μ-*интегрируема*;

b) *для любого компактного множества* $K \subset X$ *множество* $\pi^{-1}(K)$ *существенно* μ-*интегрируемо.*

Как было замечено выше, a) равносильно тому, что пара $(\pi, 1)$ μ-адаптирована. Стало быть (§ 4, п. 4, теорема 2), для любого компактного множества $K \subset X$ функция $\varphi_K \circ \pi = \varphi_A$, где $A = \pi^{-1}(K)$ существенно μ-интегрируемо, или иными словами, a) влечет b). Обратно, допустим, что $\pi^{-1}(K)$ существенно μ-интегрируемо для любого компактного подмножества K из X, и покажем, что a) выполняется. В самом деле, пусть S — носитель функции f; поскольку S компактно, то, по условию, положив $A = \pi^{-1}(S)$, получаем:

$$\int^{\bullet} |f(\pi(t))|\, d\mu(t) \leqslant \|f\| \int^{\bullet} \varphi_S(\pi(t))\, d\mu(t) =$$

$$= \|f\| \int^{\bullet} \varphi_A(t)\, d\mu(t) < +\infty.$$

Но функция $f \circ \pi$ μ-измерима (гл. IV, § 5, п. 3, теорема 1), поэтому ясно, что $f \circ \pi$ существенно μ-интегрируема (§ 1, п. 3, предл. 9).

Свойство b), очевидно, эквивалентно следующему свойству (которое в свою очередь эквивалентно также a)):

c) *Для любой точки* $x \in X$ *существует такая окрестность* V, *что* $\pi^{-1}(V)$ *существенно* μ-*интегрируемо.*

Определение 1. *Пусть* μ — *положительная мера на локально компактном пространстве* T. *Отображение* π *пространства* T *в локально компактное пространство* X *называется* μ-*собственным* (или *собственным относительно меры* μ), *если пара* $(\pi, 1)$ μ-*адаптирована, т. е.* (§ 4, п. 1) *если* π μ-*измеримо и удовлетворяет* (*эквивалентным*) *условиям предложения* 1. *Тогда мера* $\int \varepsilon_{\pi(t)} d\mu\,(t)$ *на* X *называется образом меры* μ *посредством* π *и обозначается* $\pi\,(\mu)$.

Следовательно, если $\nu = \pi\,(\mu)$, то, по определению, для $f \in \mathscr{K}\,(X)$ имеем

$$\int f\,(x)\,d\nu\,(x) = \int f\,(\pi\,(t))\,d\mu\,(t). \tag{1}$$

Замечания. 1) Если μ *ограничена* (и в частности, если μ имеет компактный носитель), то всякое μ-измеримое отображение T в X является μ-собственным (гл. IV, § 5, п. 3, теорема 1 и п. 6, теорема 5).

2) Если π μ-измеримо и если для любого компактного подмножества K из X множество $\pi^{-1}\,(K)$ относительно компактно, то π μ-собственно (гл. IV (2-е изд.), § 5, п. 5, предл. 7 и п. 6, теорема 5); в частности, всякое непрерывное *собственное* отображение T в X (Общая топ., гл. I (4-е изд.), § 10, п. 2, теорема 1) μ-собственно для любой положительной меры μ на T. В том числе это верно для любого *гомеоморфизма* π пространства T на X; в этом случае мера $\nu = \pi\,(\mu)$ есть не что иное, как мера на X, полученная из μ при отображении π (гл. III (2-е изд.), § 1, п. 3).

3) Предположим, что топология в X имеет *счетный базис*; тогда всякое отображение π пространства T в X, удовлетворяющее условию b) предложения 1, μ-измеримо, и стало быть, μ-собственно. Достаточно применить теорему 4 гл. IV, § 5, п. 5, заметив, что в этом случае X метризуемо (Общая топ., гл. IX (2-е изд.), § 2, п. 9, следствие из предл. 16) и что для произвольного расстояния, согласующегося с топологией пространства X, любой замкнутый шар является счетным объединением компактных множеств.

2. *Интегрирование относительно образа положительной меры*

Пусть π — μ-собственное отображение T в X и пусть $\nu = \pi(\mu)$. Применяя результаты § 4, получаем следующие утверждения.

Предложение 2. *Для любой числовой функции* $f \geqslant 0$ *на* X

$$\int^{\bullet} f(x)\, d\nu(x) = \int^{\bullet} f(\pi(t))\, d\mu(t). \tag{2}$$

Это следует из теоремы 1, § 4, п. 2.

Следствие 1. *Для любого подмножества* A *из* X

$$\nu^{\bullet}(A) = \mu^{\bullet}(\pi^{-1}(A)).$$

Следствие 2. *Для того чтобы подмножество* A *из* X *было локально пренебрежимо относительно* ν, *необходимо и достаточно, чтобы* $\pi^{-1}(A)$ *было локально пренебрежимо относительно* μ.

Следствие 3. *Если мера* μ *сосредоточена на множестве* M, *то* $\pi(\mu)$ *сосредоточена на* $\pi(M)$.

В самом деле, если $N = X - \pi(M)$, то $\pi^{-1}(N)$ не пересекается с M, и значит, локально μ-пренебрежимо, а стало быть (следствие 2), N локально ν-пренебрежимо.

Следствие 4. *Пусть* S — *носитель меры* μ. *Если* π *непрерывно, то носителем меры* $\pi(\mu)$ *будет* $\overline{\pi(S)}$.

В самом деле, из следствия 3 вытекает, что $\pi(\mu)$ сосредоточена на $\pi(S)$, и значит, если S' — носитель меры $\pi(\mu)$, то $S' \subset \overline{\pi(S)}$. С другой стороны, $\pi^{-1}(X - S')$ есть открытое локально μ-пренебрежимое множество (следствие 2), и стало быть, μ-пренебрежимо (гл. IV, § 5, п. 2, следствие 2 из предл. 5). Следовательно, $\pi^{-1}(X - S') \subset T - S$, значит, $\pi(S) \subset S'$, чем и доказано следствие.

Предложение 3. *Для того чтобы отображение* f *пространства* X *в топологическое пространство* G *было* ν-*измеримо, необходимо и достаточно, чтобы отображение* $f \circ \pi$ *было* μ-*измеримо*

Это есть непосредственное следствие предложения 3, § 4, п. 3.

Следствие. *Для того чтобы подмножество* A *из* X *было* ν-*измеримо, необходимо и достаточно, чтобы* $\pi^{-1}(A)$ *было* μ-*измеримо.*

Напротив, образ при отображении π μ-измеримого подмножества M из T не обязательно ν-измерим, даже если π непрерывно, а M μ-пренебрежимо (упр. 7 и § 8, упр. 1).

Теорема 1. *Пусть f — функция на X принимающая значения в $\overline{R}$ или в банаховом пространстве F. Для того чтобы f была существенно ν-интегрируема, необходимо и достаточно, чтобы $f \circ \pi$ была существенно μ-интегрируема, и тогда*

$$\int f(x)\, d\nu(x) = \int f(\pi(t))\, d\mu(t). \tag{3}$$

Предположим, кроме того, что π — непрерывное собственное отображение. Тогда для того чтобы f была ν-интегрируема, необходимо и достаточно, чтобы функция $f \circ \pi$ была μ-интегрируема.

Достаточно применить теорему 2, § 4, п. 4.

Следствие. *Для того чтобы подмножество A из X было существенно ν-интегрируемо, необходимо и достаточно, чтобы $\pi^{-1}(A)$ было существенно μ-интегрируемо, и тогда $\nu(A) = \mu(\pi^{-1}(A))$.*

В частности, для любого компактного множества $K \subset X$ имеем $\nu(K) = \mu(\pi^{-1}(K))$. Отсюда и из следствия 3 предложения 2 вытекает, что если μ — *атомическая* мера (§ 5, п 10). то это будет верно и для $\pi(\mu) = \nu$. В самом деле, пусть M — множество тех $t \in T$, в которых $\mu(\{t\}) \neq 0$; поскольку μ несома множеством M, ν несома множеством $\pi(M)$; кроме того, для любого $x \in \pi(M)$ имеем $\nu(\{x\}) = \mu(\pi^{-1}(x)) > 0$, ибо $\pi^{-1}(x)$ содержит по крайней мере одну точку из M. Стало быть, ν — атомическая мера (§ 5, п. 10, предл. 15).

3. Свойства образа положительной меры

Предложение 4. *Пусть T, T', T'' — локально компактные пространства, μ — положительная мера на T, π — μ-измеримое отображение T в T', π'— отображение T' в T'' и $\pi'' = \pi' \circ \pi$.*

a) *Предположим, что π μ-собственно и $\mu' = \pi(\mu)$ Для того чтобы π' было μ'-собственно, необходимо и достаточно, чтобы π'' было μ-собственно, и тогда $\pi''(\mu) = \pi'(\pi(\mu))$* («транзитивность образа меры»).

b) *Предположим, что π' непрерывно и что π'' μ-собственно; тогда π μ-собственно, π' $\pi(\mu)$-собственно, и $\pi''(\mu) = \pi'(\pi(\mu))$.*

В предположениях a), для того чтобы π'' было μ-измеримо, необходимо и достаточно, чтобы π' было μ'-измеримо (п. 2, предл. 3). С другой стороны, если K — компактное подмножество из T'', то $\pi''^{-1}(K) = \pi^{-1}(\pi'^{-1}(K))$; для того чтобы $\pi''^{-1}(K)$ было существенно μ-интегрируемо, необходимо и достаточно, чтобы $\pi'^{-1}(K)$ было существенно μ'-интегрируемо; это вытекает из следствия теоремы 1. Наконец, если π'' μ-собственно, то полагая $\mu'' = \pi''(\mu)$, в силу теоремы 1, п. 2, получаем для любой функции $f \in \mathscr{K}(T'')$:

$$\int f(t'')\, d\mu''(t'') = \int f(\pi''(t))\, d\mu(t) =$$

$$= \int f(\pi'(\pi(t)))\, d\mu(t) = \int f(\pi'(t'))\, d\mu'(t'),$$

и a) доказано.

Пусть, в предположениях b), K' — компактное подмножество из T'. Тогда $K'' = \pi'(K')$ компактно, значит, $\pi''^{-1}(K'')$ существенно μ-интегрируемо, и стало быть, $\pi^{-1}(K') \subset \pi''^{-1}(K'')$ существенно μ-интегрируемо (гл. IV (2-е изд.), § 5, п. 5, предл. 7), так что π μ-собственно. Применяя a), получаем требуемое утверждение

Следствие. *Пусть T и T' — локально компактные пространства, μ — положительная мера на T, π — биективное отображение T на T' и π^{-1} — обратное отображение. Предположим, что π μ-собственно, и пусть $\mu' = \pi(\mu)$. Тогда π^{-1} μ'-собственно, и $\pi^{-1}(\pi(\mu)) = \mu$.*

Предложение 5. *Пусть T и X — локально компактные пространства, μ — положительная мера на T, π — μ-собственное отображение T в X и $g \geqslant 0$ — конечная числовая функция на X, для которой $g \circ \pi$ локально интегрируема относительно μ. Для того чтобы g была локально интегрируема относительно $\pi(\mu)$, необходимо и достаточно, чтобы π было собственным относительно меры $(g \circ \pi) \cdot \mu$, и тогда*

$$\pi((g \circ \pi) \cdot \mu) = g \cdot \pi(\mu). \tag{4}$$

Положим $\nu = \pi(\mu)$. Для того чтобы g была локально ν-интегрируема, необходимо и достаточно, чтобы gf была ν-интегрируема для любой функции $f \in \mathscr{K}(X)$; а поскольку gf имеет компактный носитель, то все сводится к утверждению, что gf существенно

ν-интегрируема, а это эквивалентно утверждению, что $(g \circ \pi)\,(f \circ \pi)$ существенно μ-интегрируема (теорема 1). Но в силу теоремы 1, § 5, п. 3 последнее равносильно тому, что $f \circ \pi$ существенно интегрируема относительно $\rho = (g \circ \pi) \cdot \mu$, а это, по определению, означает, что π ρ-собственно (поскольку π, очевидно, ρ-измеримо). Кроме того, имеем

$$\int fg\, d\nu = \int f(\pi(t))\, g(\pi(t))\, d\mu = \int f(\pi(t))\, d\rho(t)$$

(п. 2, теорема 1 и § 5, теорема 1), чем и доказано соотношение (4).

Предложение 6. *Пусть T и X — локально компактные пространства и $(\lambda_\alpha)_{\alpha \in A}$ — семейство положительных мер на T, фильтрующееся по отношению $\leqslant$ и имеющее в $\mathscr{M}(t)$ верхнюю грань μ. Для того чтобы отображение T в X было μ-собственным, необходимо и достаточно, чтобы оно было λ_α-собственным при любом $\alpha \in A$ и чтобы семейство $(\pi(\lambda_\alpha))_{\alpha \in A}$ было мажорировано в $\mathscr{M}(X)$. В этом случае*

$$\pi(\mu) = \sup_\alpha \pi(\lambda_\alpha). \tag{5}$$

Для того чтобы π было μ-измеримо, необходимо и достаточно, чтобы π было λ_α-измеримо при любом $\alpha \in A$ (§ 1, п. 4, следствие 2 из предл. 11). Допустим, что это условие выполнено; тогда утверждение, что π μ-собственно, эквивалентно утверждению, что для любой функции $f \in \mathscr{K}_+(T)$

$$\mu^*(f \circ \pi) < +\infty.$$

Но

$$\int^* (f \circ \pi)\, d\mu = \sup_\alpha \int^* (f \circ \pi)\, d\lambda_\alpha = \sup_\alpha \int^* f\, d(\pi(\lambda_\alpha))$$

(§ 1, п. 4, предл. 11); стало быть, левая часть конечна для любого $f \in \mathscr{K}_+(T)$ в том и только том случае, когда семейство $(\pi(\lambda_\alpha))$ имеет в $\mathscr{M}(X)$ верхнюю грань θ, и тогда $\int (f \circ \pi)\, d\mu = \int f\, d\theta$, что равносильно (5).

Следствие 1. *Пусть $(\mu_\alpha)_{\alpha \in A}$ — такое суммируемое семейство положительных мер на T, что $\mu = \sum_{\alpha \in A} \mu_\alpha$; для того чтобы отображение π пространства T в локально компактное пространство X было μ-собственным, необходимо и достаточно, чтобы оно было*

μ_α-собственно при любом $\alpha \in A$ и чтобы семейство $(\pi(\mu_\alpha))_{\alpha \in A}$ было суммируемо. В этом случае

$$\pi(\mu) = \sum_{\alpha \in A} \pi(\mu_\alpha). \tag{6}$$

Следствие 2. *Пусть T и X — локально компактные пространства, $(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ — конечная последовательность положительных мер на T и пусть $\mu = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$. Для того чтобы отображение π пространства T в X было μ-собственным, необходимо и достаточно, чтобы оно было λ_i-собственно для каждого индекса i, и тогда*

$$\sum_{i=1}^{n} \pi(\lambda_i) = \pi\Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\Big).$$

4. Образ комплексной меры

Пусть θ — комплексная мера на T и пусть π — отображение T в локально компактное пространство X: предположим, что π θ-измеримо и что для каждой функции $f \in \mathscr{K}(X; \mathbf{C})$ функция $f \circ \pi$ существенно θ-интегрируема. А поскольку утверждения, что функция измерима (соотв. существенно измерима) относительно θ или относительно $|\theta|$, равносильны, то это означает, что π $|\theta|$-собственно. Если $f \in \mathscr{K}(X; \mathbf{C})$, то

$$\left| \int (f \circ \pi)\, d\theta \right| \leqslant \int (|f| \circ \pi)\, d\,|\theta|; \tag{7}$$

отсюда сразу же вытекает, что линейная форма $f \mapsto \int (f \circ \pi)\, d\theta$ на $\mathscr{K}(X; \mathbf{C})$ есть *комплексная мера* на X (гл. III (2-е изд.), § 1, п. 3, предл. 6), и можно ввести следующее определение:

Определение 2. *Пусть θ — комплексная мера на локально компактном пространстве T. Отображение π пространства T в локально компактное пространство X называется θ-собственным, если оно $|\theta|$-собственно. Тогда мера $f \mapsto \int (f \circ \pi)\, d\theta$ называется образом меры θ при отображении π и обозначается $\pi(\theta)$.*

Теперь соотношение (7) запишется в виде:

$$|\pi(\theta)| \leqslant \pi(|\theta|). \tag{8}$$

Мера $\pi(\theta)$ может быть нулевой, без того чтобы θ была нулевой, в чем легко убедиться, взяв в качестве T пространство, состоящее из двух точек a и b, в качестве θ — меру $\varepsilon_a - \varepsilon_b$, а в качестве π — постоянное отображение.

Пусть θ и θ' — комплексные меры на T; если π является θ-собственным и θ'-собственным, то из следствия 2 предложения 6 вытекает, что π $(\theta + \theta')$-собственно, ибо $|\theta + \theta'| \leqslant |\theta| + |\theta'|$, и, очевидно, $\pi(\theta + \theta') = \pi(\theta) + \pi(\theta')$.

В частности, если θ — действительная мера и если π θ-собственно, то

$$\pi(\theta) = \pi(\theta^+) - \pi(\theta^-). \tag{9}$$

Многие полученные выше результаты сразу же распространяются на комплексные меры; приведем важнейшие из них.

Предложение 7. *Пусть θ — комплексная мера на T, π — θ-собственное отображение T в локально компактное пространство X и ν — мера-образ $\pi(\theta)$.*

a) *Пусть A — подмножество из X; если $\pi^{-1}(A)$ локально θ-пренебрежимо, то A локально ν-пренебрежимо.*

b) *Пусть f — отображение X в топологическое пространство; если $f \circ \pi$ θ-измерима, то f ν-измерима.*

c) *Пусть f — функция на X со значениями в банаховом пространстве F; если $f \circ \pi$ существенно θ-интегрируема, то f существенно ν-интегрируема и*

$$\int f(\pi(t))\, d\theta(t) = \int f(x)\, d\nu(x). \tag{10}$$

С учетом формулы (8) эти результаты выводятся из следствия 2 предложения 2, из предложения 3 и из теоремы 1, п. 2.

5. *Приложение: замена переменной в интеграле Лебега*

Пусть I — (не обязательно ограниченный) интервал из $\mathbf{R}$, a — его начало, b — его конец в $\overline{\mathbf{R}}$ и μ — мера Лебега на I. Будем для любой μ-интегрируемой функции f и любого интервала $H \subset I$ с началом α и концом β писать $\int_\alpha^\beta f(t)\, dt$ вместо $\int_H f(t)\, dt =$

$= \int_H f\,d\mu$ и будем полагать $\int_\beta^\alpha f(t)\,dt = -\int_\alpha^\beta f(t)\,dt$; смысл вводимых здесь символов совпадает с тем, который придавался им в Функциях действ. перем., гл. II, §§ 1, 2, когда f — линейчатая функция с компактным носителем (гл. IV, § 4, п. 4, пример).

Пусть g — *локально* μ-*интегрируемая* числовая функция на I и x_0 — точка из I; для любого $x \in I$ полагаем

$$G(x) = c + \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt \qquad (c = \text{const}). \tag{11}$$

Числовая функция G *непрерывна* на I; это следует сразу же из теоремы Лебега (гл. IV, § 4, п. 3, следствие 1 из теоремы 2), ибо произведение g и характеристической функции интервала с концами x и $x+h$ стремится к пренебрежимой функции, когда $h \to 0$. Стало быть, $G(I)$ есть *интервал* из $\mathbf{R}$. На протяжении всего этого пункта мы будем считать G отображением I на локально компактное пространство $G(I)$. Будем обозначать через λ меру $g \cdot \mu$ на I.

Предположим сначала, что g μ-*интегрируема*. Тогда то же рассуждение, что и выше, показывает, что пределы $G(a+)$ и $G(b-)$ существуют и *конечны*; кроме того, мера $|\lambda|$ *ограничена* (§ 5, п. 3, следствие из теоремы 1), и отображение G интервала I в $G(I)$ λ-*собственно*.

Предложение 8. *Пусть g μ-интегрируема. Если J — открытый интервал из $\mathbf{R}$ с концами $G(a+)$ и $G(b-)$, то образ при отображении G меры $g \cdot \mu$ есть мера $\varphi_J \cdot \nu$, если $G(a+) \leqslant G(b-)$, и мера $-\varphi_J \cdot \nu$, если $G(a+) \geqslant G(b-)$ (здесь ν означает меру Лебега на $G(I)$).*

Достаточно доказать, что для любой функции $f \in \mathscr{K}(G(I))$

$$\int_{G(a+)}^{G(b-)} f(\xi)\,d\xi = \int_a^b f(G(t))\,g(t)\,dt. \tag{12}$$

Но эта формула уже была доказана для $g \in \mathscr{K}(I)$ (Функции действ. перем., гл. II, § 2, п. 1, формула (1)). Перейдем к общему случаю; найдется такая последовательность (g_n) функций из $\mathscr{K}(I)$, что: 1° последовательность $(g_n(t))$ сходится к $g(t)$ почти всюду

на I; 2° существует такая μ-интегрируемая функция $h \geqslant 0$, что $|g_n| \leqslant h$ при любом n (гл. IV, § 3, п. 4, теорема 3). Из теоремы Лебега сразу же вытекает, что если положить $G_n(x) = c + \int_{x_0}^{x} g_n(t)\,dt$, то последовательность (G_n) будет *равномерно* сходиться на I к G, и числа $G_n(a+)$ и $G_n(b-)$ стремятся соответственно к $G(a+)$ и $G(b-)$. Пусть f' — функция из $\mathscr{K}(\mathbf{R})$, продолжающая f; изложенное выше показывает, что $f'(G_n(t))$ стремится к $f'(G(t)) = f(G(t))$ для $t \in I$; применяя теорему Лебега, получаем, что формула (12) вытекает из формулы

$$\int_{G(a+)}^{G(b-)} f'(\xi)\,d\xi = \int_a^b f'(G_n(t))\,g_n(t)\,dt$$

переходом к пределу.

Следствие. *Если функция f, определенная на $G(I)$ и принимающая значения в $\mathbf{R}$ или в банаховом пространстве, такова, что функция $t \mapsto f(G(t))\,g(t)$ интегрируема на I относительно меры Лебега, то f интегрируема на J относительно меры Лебега, и справедлива формула* (формула замены переменной в интеграле Лебега):

$$\int_{G(a+)}^{G(b-)} f(\xi)\,d\xi = \int_a^b f(G(t))\,g(t)\,dt. \tag{13}$$

В самом деле, $f(G(t))$ интегрируема относительно меры $|g|\cdot\mu$, а значит, также и относительно мер $g^+\cdot\mu$ и $g^-\cdot\mu$; из теоремы 1 (п. 2) следует, что f интегрируема относительно мер-образов $G(g^+\cdot\mu)$ и $G(g^-\cdot\mu)$, а стало быть, и относительно меры $\varphi_J\cdot\nu$, и что в силу предложения 8 и формулы (9) верна формула (13).

Может оказаться, что f интегрируема на J относительно меры Лебега, но $t \mapsto f(G(t))\,g(t)$ не интегрируема на I относительно меры Лебега (упр. 10).

Предположим теперь, что g почти всюду *сохраняет знак* (и локально μ-интегрируема); можно, например, предположить, что $g(t) \geqslant 0$ почти всюду на I. Тогда G есть непрерывная возрастающая функция на I, и значит, $G(a+)$ и $G(b-)$ существуют

(но могут быть бесконечны). Кроме того, G является *λ-собственным* отображением I в $G(I)$: в самом деле, если $G(b-) \in G(I)$, то найдется такое $x_1 \geqslant x_0$, что G постоянна для $x > x_1$, и тогда прообраз при отображении G компактного интервала $[G(x_0), G(b-)]$ является λ-интегрируемым множеством; если же, напротив, $G(b-) \notin G(I)$, то прообраз при отображении G любого компактного интервала с началом $G(x_0)$, содержащегося в $G(I)$, есть компактный интервал. Точно так же рассуждаем для случая компактных интервалов с концом $G(x_0)$; отсюда и следует наше утверждение. Имеет место также

Предложение 9. *Предположим, что $g \geqslant 0$ и локально μ-интегрируема. Тогда образ при отображении G положительной меры $g \cdot \mu$ есть мера Лебега на $G(I)$. Для того чтобы функция f, определенная на $G(I)$ и принимающая значения в $\overline{\mathbf{R}}$ или в банаховом пространстве, была интегрируема на $G(I)$ относительно меры Лебега, необходимо и достаточно, чтобы функция $t \mapsto f(G(t))\, g(t)$ была интегрируема на I относительно меры Лебега, и тогда выполняется соотношение* (13).

Первая часть утверждения следует из того, что формула (12) справедлива для любой функции $f \in \mathscr{K}(G(I))$; в самом деле, носитель функции $t \mapsto f(G(t))$ содержится в некотором интервале $K \subset I$, на котором g интегрируема — это вытекает из замечаний, сделанных выше, и достаточно применить к K предложение 8. Вторая часть утверждения является следствием теоремы 1, п. 2.

6. *Разбиение на слои. Прообраз меры при локальном гомеоморфизме*

Пусть X — локально компактное пространство, π — отображение X в локально компактное пространство T, μ — положительная мера на T и Λ: $t \mapsto \lambda_t$ — скалярно существенно μ-интегрируемое и широко μ-измеримое отображение T в $\mathscr{M}_+(X)$. Пусть, далее, $\nu = \int \lambda_t \, d\mu(t)$. Если λ_t *несома* $\pi^{-1}(t)$ *при любом* $t \in T$, то говорят, что равенство $\nu = \int \lambda_t \, d\mu(t)$ есть *разбиение на слои* (или *дезинтегрирование*) меры ν относительно π. Это понятие будет подробно изучаться в главе VI.

Предложение 10. *Сохраним принятые выше обозначения и предположим, что* π ν*-измеримо. Пусть* g *— функция* $t \mapsto \lambda_t^*(1)$ *на* T. *Для того чтобы* π *было* ν*-собственным, необходимо и достаточно, чтобы* g *была локально* μ*-интегрируема, и в этом случае*

$$\pi(\nu) = g \cdot \mu. \tag{14}$$

Вначале мы будем рассуждать, предполагая, что g конечна локально μ-почти всюду; а в конце доказательства мы освободимся от этого вспомогательного предположения. Так как π ν-измеримо по условию, то утверждение, что π ν-собственно, эквивалентно утверждению, что $\nu^*(f \circ \pi) < +\infty$ для любой функции $f \in \mathscr{K}_+(T)$; а поскольку g конечна локально почти всюду, то мы находимся в условиях применимости утверждения с) предложения 5, § 3, п. 2. Следовательно,

$$\int^* (f \circ \pi)\, d\nu = \int^* d\mu\,(t) \int^* (f \circ \pi)\, d\lambda_t = \int^* f(t)\, g(t)\, d\mu(t),$$

ибо λ_t сосредоточена на $\pi^{-1}(t)$. Функция g μ-измерима, поскольку Λ μ-согласовано (§ 3, п. 1, опр. 1). Стало быть, утверждение, что левая часть конечна для любой функции $f \in \mathscr{K}_+(T)$, эквивалентна утверждению, что g локально μ-интегрируема (§ 5, предл. 1), и формула (14) в рассматриваемом случае сразу же вытекает из указанных соотношений.

Таким образом, нам остается лишь освободиться от дополнительного условия. Если g локально μ-интегрируема, то она конечна локально μ-почти всюду, и тогда условие выполняется. Предположим теперь, что π ν-собственно, и покажем, что g конечна локально почти всюду. Пусть $\mathfrak{R}$ — μ-плотное множество таких компактов K, что $\Lambda \mid K$ широко непрерывно; поскольку g μ-измерима, то все сводится к тому, чтобы показать, что всякий компакт $K \in \mathfrak{R}$, удовлетворяющий условию $g \mid K = +\infty$, является μ-пренебрежимым. Пусть $\mathscr{H}$ — множество таких функций $h \in \mathscr{K}_+(X)$, что $h \leqslant 1$; положим $g_h(t) = \lambda_t(h)$; обозначим через Λ_h μ-согласованное отображение $t \mapsto h \cdot \lambda_t$, через ν_h — интеграл от Λ_h и через f — такой элемент из $\mathscr{K}_+(T)$, что $f \geqslant \varphi_K$. Если мы применим формулу (14) к отображению Λ_h, которое удовлетворяет дополнительному условию, то мы получим

$$\int (f \circ \pi)\, d\nu \geqslant \int (f \circ \pi)\, d\nu_h = \int f g_h\, d\mu.$$

Но функции $fg_h \mid K$ образуют фильтрующееся по возрастанию множество непрерывных функций на K, верхняя огибающая которых равна $+\infty$: по теореме Дини (Общая топ., гл. X (2-е изд.), § 4, п. 1, теорема 1) можно выбрать h так, чтобы $fg_h \mid K$ было больше любого положительного числа n, и тогда $\int (f \circ \pi)\, dv \geqslant n\mu(K)$. А поскольку левая часть здесь конечна, в силу того, что π ν-собственно, то отсюда получаем, что $\mu(K) = 0$.

Следствие 1. *Предположим, что π ν-измеримо.*

a) *Если $N \subset T$ локально μ-пренебрежимо, то $\pi^{-1}(N)$ локально ν-пренебрежимо.*

b) *Если f — μ-измеримое отображение T в топологическое пространство G, то $f \circ \pi$ ν-измеримо.*

Примем снова обозначения Λ_h, ν_h, g_h из конца предыдущего доказательства: при этом ν_h — ограниченная мера при любом $h \in \mathscr{H}$, π ν_h-собственно, g_h локально μ-интегрируема и $\pi(\nu_h) = g_h \cdot \mu$ есть мера с базисом μ. Отсюда следует, что N локально пренебрежимо (соотв. что f измерима) относительно меры $\pi(\nu_h)$ (§ 5, п. 3, следствие 1 из предл. 3 и следствие из предл. 4). Стало быть, $\pi^{-1}(N)$ локально пренебрежимо (соотв. $f \circ \pi$ измерима) относительно меры ν_h (следствие 2 из предл. 2, соотв. предл. 3). Наконец, заметим, что меры ν_h образуют фильтрующееся по возрастанию семейство положительных мер, верхняя грань которых равна ν (§ 3, п. 1, предл. 1), и применим следствие 1 (соотв. 2) из предложения 11, § 1, п. 4.

Следствие 2. *Предположим, что π ν-собственно, и пусть f — определенное на T отображение со значениями в банаховом пространстве или в $\overline{\mathbf{R}}$. Для того чтобы $f \circ \pi$ было существенно ν-интегрируемо, необходимо и достаточно, чтобы gf было существенно μ-интегрируемо.*

Это сразу же вытекает (с учетом предложения 10) из теоремы 1, § 5, п. 3 и из теоремы 1, п. 2.

Пример. Пусть X и T — локально компактные пространства и пусть π — *локальный гомеоморфизм* X в T. Иными словами в данном случае мы предполагаем, что всякая точка $x \in X$ обладает такой окрестностью V, что $\pi \mid V$ есть гомео-

морфизм V на некоторую окрестность точки $\pi(x)$; заменяя V на такую открытую относительно компактную окрестность W, что $\overline{W} \subset V$, получаем, что множество $\mathcal{U}$ открытых относительно компактных множеств U из X, обладающих тем свойством, что $\pi \mid \overline{U}$ есть гомеоморфизм $\overline{U}$ на его образ, составляет *открытое покрытие* пространства X. Пусть теперь μ — положительная мера на T; если U — элемент из $\mathcal{U}$, то $\pi(U)$ открыто в компактном пространстве $\pi(\overline{U})$, а значит, является локально компактным подпространством пространства T, и мы можем определить меру $\mu \mid \pi(U)$, индуцированную мерой μ на $\pi(U)$ (гл. IV (2-е изд.), § 5, п. 7). Пусть ν_U — образ $\mu \mid \pi(U)$ при обратном гомеоморфизме к $\pi \mid U$; мы покажем, что на X существует, и притом только одна, такая мера ν, которая индуцирует меру ν_U на любое открытое $U \in \mathcal{U}$. Эта мера называется *прообразом меры* μ *при локальном гомеоморфизме* π и обозначается $\pi^{-1}(\mu)$.

Единственность ν вытекает сразу же из принципа локализации (гл. III (2-е изд.), § 2, п. 1, следствие из предл. 1). Для доказательства существования отметим, что если $t \in T$, то всякая точка $x \in \pi^{-1}(t)$ обладает окрестностью, пересекающей $\pi^{-1}(t)$ лишь в точке x, так что $\pi^{-1}(t)$ есть *дискретное* подпространство пространства X и что семейство $(\varepsilon_x)_{x \in \pi^{-1}(t)}$ суммируемо; обозначим его сумму через λ_t. Покажем, далее, что отображение $t \mapsto \lambda_t$ скалярно существенно μ-интегрируемо и что его интеграл $\nu = \int \lambda_t \, d\mu(t)$ и является искомым прообразом. Это будет вытекать сразу же из следующей леммы:

Лемма 1. a) *Пусть f — элемент из $\mathscr{K}_+(X)$; функция $t \mapsto \lambda_t(f)$ положительна, полунепрерывна сверху, имеет компактный носитель и ее сужение на $\pi(X)$ непрерывно.*

b) *Пусть U — элемент из $\mathcal{U}$ и ν — интеграл от скалярно существенно μ-интегрируемой функции $t \mapsto \lambda_t$; образ меры $\nu \mid U$ при отображении $\pi \mid U$ равен $\mu \mid \pi(U)$.*

Доказательство a) можно свести посредством разбиения единицы (гл. III (2-е изд.), § 1, п. 2, лемма 1) к случаю, когда носитель S функции f содержится в открытом множестве $U \in \mathcal{U}$. Пусть g — отображение $t \mapsto \lambda_t(f)$; поскольку $\pi \mid U$ — гомеоморфизм, то $g \mid \pi(U)$ принадлежит $\mathscr{K}_+(\pi(U))$, и значит (учитывая,

что $\pi(U)$ открыто в $\pi(X)$), сужение g на $\pi(X)$ непрерывно. Но g положительно и сужение g на компакт $\pi(S)$ непрерывно, стало быть, g полунепрерывно сверху на T. Отсюда получаем, что g μ-интегрируемо.

Чтобы доказать b), обозначим через g элемент из $\mathscr{K}(\pi(U))$, через g^0 — его нуль-продолжение на T, через f-функцию $g \circ (\pi \mid U)$ и через f^0 — нуль-продолжение функции f на X. Утверждение эквивалентно равенству $\int g^0 \, d\mu = \int f^0 \, d\nu$. Но $f \in \mathscr{K}(U)$, стало быть, $f^0 \in \mathscr{K}(X)$, и значит, правый интеграл равен $\int \lambda_t(f^0) \, d\mu(t)$. Наконец, получаем $\lambda_t(f^0) = g^0(t)$, чем и завершается доказательство.

Отметим теперь, что $\pi(X)$ *открыто* в T, и значит, μ-измеримо; отображение $\Lambda : t \mapsto \lambda_t$ широко μ-измеримо, ибо его сужение на каждое из множеств $\pi(X)$ и $\complement\pi(X)$ широко непрерывно. При этих условиях формула $\pi^{-1}(\mu) = \int \lambda_t \, d\mu(t)$ определяет разбиение на слои (дезинтегрирование) $\pi^{-1}(\mu)$ относительно π, и предложение 10 дает нам следующий результат:

Предложение 11. *Пусть π — локальный гомеоморфизм локально компактного пространства X в локально компактное пространство T и пусть μ — положительная мера на T. Пусть n — числовая функция, которая каждой точке $t \in T$ ставит в соответствие число элементов множества $\pi^{-1}(t)$, если это число конечно, и $+\infty$ в противном случае. Для того чтобы π было $\pi^{-1}(\mu)$-собственным, необходимо и достаточно, чтобы n была локально μ-интегрируема, и в этом случае*

$$\pi(\pi^{-1}(\mu)) = n \cdot \mu. \tag{15}$$

Упражнения

1) Пусть T и X — локально компактные пространства, μ — положительная мера на T, π — *непрерывное* μ-собственное отображение T в X и $\nu = \pi(\mu)$.

а) Показать, что для любой числовой функции $g \geqslant 0$, определенной и полунепрерывной снизу на X, функция $g \circ \pi$ полунепрерывна снизу на T и $\nu^*(g) = \mu^*(g \circ \pi)$.

b) Показать, что если f — ν-интегрируемая функция со значениями в банаховом пространстве, то $f \circ \pi$ μ-интегрируема и $\int f\,d\nu = \int (f \circ \pi)\,d\mu$. Будет ли справедливо обратное без дополнительного условия (ср. § 4, упр. 2b))?

°2) Пусть T и X — локально компактные пространства и $\mathscr{P}$ — множество непрерывных собственных отображений пространства T в X, наделенное топологией компактной сходимости. Пусть, далее, H — такое подмножество из $\mathscr{P}$, что для любого компактного подмножества $K \subset X$ объединение множеств $\pi^{-1}(K)$, где π пробегает H относительно компактно в T.

a) Показать, что отображение $(\pi, \lambda) \mapsto \pi(\lambda)$ произведения $H \times \mathscr{M}(T)$ в $\mathscr{M}(T)$ может не быть непрерывным, если каждое из пространств $\mathscr{M}(T)$ и $\mathscr{M}(X)$ наделено квазисильной топологией (гл. III (2-е изд.), § 1, упр. 8).

b) Показать, что если B — ограниченное подмножество из $\mathscr{M}(T)$ то сужение на $H \times B$ отображения $(\pi, \lambda) \mapsto \pi(\lambda)$ непрерывно, если каждое из пространств $\mathscr{M}(T)$, $\mathscr{M}(X)$ выделено широкой топологией (использовать предл. 15, гл. III (2-е изд.), § 1).

c) Показать, что отображение $(\pi, \lambda) \mapsto \pi(\lambda)$ произведения $H \times \mathscr{M}_+(T)$ в $\mathscr{M}_+(X)$ непрерывно, если $\mathscr{M}(T)$ и $\mathscr{M}(X)$ наделены широкой топологией (ср. гл. III (2-е изд.), § 1, упр. 10).

d) Указать пример, когда $T = X$ компактно, а отображение $(\pi, \lambda) \mapsto \pi(\lambda)$ произведения $\mathscr{P} \times \mathscr{M}(T)$ в $\mathscr{M}(X) = \mathscr{M}(T)$ не является непрерывным, если $\mathscr{M}(T)$ наделено широкой топологией (взять в качестве T тор T и воспользоваться упр. 2b), гл. III (2-е изд.), § 4).

°3) Пусть T — локально компактное, но не компактное пространство, μ — положительная мера на T и $\mathfrak{S}$ — группа гомеоморфизмов пространства T. Привести пример, показывающий, что отображение $\pi \mapsto \pi(\mu)$ группы $\mathfrak{S}$ в $\mathscr{M}(T)$ может не быть непрерывным, если наделить $\mathfrak{S}$ топологией компактной сходимости, а $\mathscr{M}(T)$ — широкой топологией (взять в качестве T подпространство из $\mathbf{R}$, состоящее из 0 и точек n и $1/n$ ($n \geqslant 1$ — целое), а в качестве μ — меру, определенную соотношениями

$$\mu(\{0\}) = 0,\ \mu(\{1/n\}) = 1/n^2,\ \mu(\{n\}) = 1).$$

4) Для любого локально компактного пространства T обозначим через $\mathscr{M}^c(T)$ подпространство пространства $\mathscr{M}(T)$, составленное из мер с компактным носителем. Если T и X — локально компактные пространства, а π — непрерывное отображение T в X, то π λ-собственно и $\pi(\lambda) \in \mathscr{M}^c(X)$ для любой меры $\lambda \in \mathscr{M}^c(T)$. Построить пример, показывающий, что отображение $\lambda \mapsto \pi(\lambda)$ пространства $\mathscr{M}^c(T)$ в $\mathscr{M}^c(X)$ может не быть непрерывным, если наделить $\mathscr{M}^c(T)$ и $\mathscr{M}^c(X)$

широкой топологией (или квазисильной топологией (гл. III (2-е изд.), § 1, упр. 8)), и что π не является собственным отображением (ср. гл. III (2-е изд.), § 2, упр. 1).

5) a) Пусть ρ и σ — положительные меры на $\mathbf{R}$. Показать, что если $\rho(]a, b]) = \sigma(]a, b])$ для любого полуоткрытого интервала $]a, b]$, то $\rho = \sigma$.

b) Пусть I — интервал из $\mathbf{R}$ с концами α и β и пусть ψ — возрастающая конечная числовая функция на I; продолжим произвольным образом ψ на $\mathbf{R}$. Для того чтобы отображение ψ было собственным относительно меры $\varphi_I \cdot \mu$ (где μ — мера Лебега на $\mathbf{R}$), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие два условия: 1° α либо конечно, либо $\alpha = -\infty$ и $\lim_{x \to -\infty} \psi(x) = -\infty$; 2° β либо конечно, либо $\beta = +\infty$ и $\lim_{x \to +\infty} \psi(x) = +\infty$.

Пусть эти условия выполнены и пусть для любого $y \in \mathbf{R}$ через $\theta(y)$ обозначена верхняя грань множества тех $x \in I$, в которых $\psi(x) \leqslant y$ (для пустого множества она считается равной α). Показать, что θ есть конечная числовая функция, возрастающая и непрерывная справа на $\mathbf{R}$. Если ν — образ меры $\varphi_I \cdot \mu$ при отображении ψ, то $\nu(]a, b]) = \theta(b) - \theta(a)$ для любого полуоткрытого интервала $]a, b]$ из $\mathbf{R}$.

c) Обратно, показать, что для любой конечной числовой функции θ, возрастающей и непрерывной справа на $\mathbf{R}$, существует, и притом только одна, такая положительная мера ν на $\mathbf{R}$, что $\nu(]a, b]) = \theta(b) - \theta(a)$ для любого полуоткрытого интервала $]a, b]$ из $\mathbf{R}$ («мера Стилтьеса на $\mathbf{R}$, определенная при помощи θ»; вместо $\int f\, d\nu$ пишут $\int f\, d\theta$); при этом всякая положительная мера на $\mathbf{R}$ может быть получена таким способом. При каком условии мера ν будет непрерывной? Каким будет тогда образ меры ν при отображении θ?

6) a) Пусть K — канторово множество на интервале $I = [0, 1]$ (Общая топ., гл. IV, § 2, п. 5). Показать, что на $\mathbf{R}$ существуют непрерывная мера $\nu \geqslant 0$ с носителем K и полной массой 1 и такая непрерывная возрастающая функция θ, что $\theta(\mathbf{R}) = 1$ и $\theta(\nu) = \varphi_I \cdot \mu$ (где μ — мера Лебега; ср. Общая топ., гл. IV, § 8, упр. 16).

b) Вывести из a), что на $\mathbf{R}$ существует положительная *непрерывная* мера, сингулярная с мерой Лебега, носителем которой является весь интервал I (взять на каждом интервале J, смежном к K и содержащемся в I, меру, пропорциональную образу меры ν при аффинном отображении интервала I на J, а затем провести индукцию).

7) Пусть μ — мера Лебега на $\mathbf{R}$ и I — интервал $[0, 1]$ из $\mathbf{R}$. Если положить $\theta(x) = |x|$, то θ будет собственным отображением относительно меры $\varphi_I \cdot \mu$ и будет иметь место равенство $\theta(\varphi_I \cdot \mu) = \varphi_I \cdot \mu$. Построить пример множества, пренебрежимого относительно $\varphi_I \cdot \mu$ и имеющего при отображении θ образ, не измеримый относительно $\varphi_I \cdot \mu$ (ср. гл. IV, § 4, упр. 8).

°8) Пусть T — компактное пространство и μ — положительная непрерывная мера на T с полной массой 1.

a) Показать, что существует такое непрерывное отображение π пространства T на $E = [0, 1]$, что образ меры μ при отображении π есть мера Лебега λ на E. (Поступать, как при доказательстве теоремы Урысона (Общая топ., гл. IX, § 4, теорема 1), определяя для любого t в пределах $0 \leqslant t \leqslant 1$ такое открытое множество $U(t) \subset T$, квадрируемое относительно μ (гл. IV (2-е изд.), § 5, упр. 17), что $U(0) = \varnothing$ $U(1) = T$, $\overline{U(t)} \subset U(t')$ для $t < t'$ и, наконец, $\mu(U(t)) = t$; использовать упр. 7, § 5, чтобы доказать, что если V и W — такие открытые квадрируемые множества из T, что $\overline{V} \subset W$ и $\mu(V) < \mu(W)$, то существует такое открытое квадрируемое множество U, что $\overline{V} \subset U \subset \overline{U} \subset W$ и что

$$\frac{1}{3}\mu(W - V) \leqslant \mu(U - V) \leqslant \frac{2}{3}\mu(W - V).$$

И наконец, применить упр. 5a).)

b) Вывести из a), что в T существуют подмножества, не являющиеся μ-измеримыми (гл. IV, § 4, упр. 8), а также что в $\mathscr{L}^p(T, \mu)$ существуют последовательности, сходящиеся к 0 в среднем порядка p, но не сходящиеся к 0 ни в одной точке из T для $1 \leqslant p < +\infty$ (гл. IV, § 3, упр. 1), и такие последовательности (f_n), что $(\widetilde{f}_n)$ сходится к 0 в ослабленной топологии пространства $L^p(T, \mu)$, но не сходится к 0 по мере (§ 5, упр. 19).

c) Допустим, кроме того, что T *метризуемо*. Показать, что существуют μ-пренебрежимое подмножество N из T, λ-пренебрежимое подмножество M из E и такой *гомеоморфизм* π множества $E - M$ на $T - N$, что если продолжить (произвольным образом) π до отображения φ пространства E в T, а π^{-1} — до отображения ψ пространства T в E, то $\varphi(\lambda) = \mu$ и $\psi(\mu) = \lambda$. (Воспользовавшись упр. 17. гл. IV (2-е изд.), § 5, показать, что для любого целого $n > 0$ найдется конечное разбиение пространства T, состоящее из μ-пренебрежимого множества и из открытых квадрируемых множеств с диаметром $\leqslant 1/n$ (относительно метрики, согласующейся с топологией в T) и с мерой $\leqslant 1/n$. Отсюда, проведя индукцию и перейдя к пределу, вывести существование такого непрерывного отображения f множества $E - D$ в T, где D — счетное подмножество из E, что $f(\lambda) = \mu$; показать, что можно сделать так, чтобы f было гомеоморфизмом множества $E - D$ на подмножество из T меры 1.) (Ср. § 8, упр. 14.)

°9) Пусть μ и ν — положительные непрерывные меры на локально компактном пространстве T. Показать, что для того чтобы ν была мерой с базисом μ, достаточно, чтобы всякое μ-измеримое подмножество из T было также и ν-измеримым (рассуждать от противного, используя теорему 3 и предл. 13, § 5 и упр. 8b), § 6).

10) На интервале $I =]0, 1[$ из $\mathbf{R}$ определим следующую функцию g: $g(t) = -\sqrt{n}$ для $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right) < t \leqslant \frac{1}{n}$, $g(t) = \sqrt{n}$ для $\frac{1}{n+1} < t \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ и $g(t) = 0$ на $\mathbf{R} - I$; g интегрируема относительно меры Лебега. Положим

$$G(x) = \int_0^x g(t)\, dt;$$

показать, что функция f, равная $1/\sqrt{|x|}$ на интервале $[-1, +1]$, и нулю вне этого интервала, интегрируемая относительно меры Лебега, такова, что отображение $t \mapsto f(G(t))\, g(t)$ не будет интегрируемым на I.

°11) Примем обозначения п. 5, и пусть g — локально μ-интегрируемая числовая функция на I.

a) Для того чтобы G было λ-собственным отображением интервала I в $G(I)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия: 1) в $\overline{\mathbf{R}}$ существуют пределы $G(a+)$ и $G(b-)$; 2) если $G(a+) \in G(I)$, то g μ-интегрируема на интервале $]a, x_0[$; 3) если $G(b-) \in G(I)$, то g μ-интегрируема на интервале $]x_0, b[$.

b) Предположим, что пределы $G(a+)$ и $G(b-)$ существуют в $\overline{\mathbf{R}}$. Показать, что если функция f такова, что отображение $t \mapsto f(G(t))\, g(t)$ интегрируемо на I относительно меры Лебега, то f интегрируема на интервале с концами $G(a+)$ и $G(b-)$ относительно меры Лебега и справедлива формула (13). (Свести к случаю, когда x_0 есть одно из чисел a, b; если, например, $x_0 = a$, то заметить, что в I найдется такая строго возрастающая последовательность (b_n), стремящаяся к b, что последовательность $(G(b_n))$ будет либо возрастающей, либо убывающей; применить предл. 4, гл. IV, § 4, п. 3 и теорему Лебега.)

°12) a) Пусть g — конечная числовая функция, определенная на компактном интервале $I = [a, b]$ из $\mathbf{R}$. *Множеством роста вправо* (соотв. *влево*) *функции* g *на* I называется множество тех $x \in I$, для которых существует такое $y \in I$, что $x < y$ (соотв. $x > y$) и $g(x) < g(y)$. Показать, что если g непрерывна, то множество роста вправо (соотв. влево) функции g на I открыто в I, и что если $]\alpha, \beta[$ есть связная компонента этого множества, то $g(\alpha) = g(\beta)$ и $g(x) \leqslant g(\alpha)$ для $\alpha < x < \beta$.

b) Пусть r_1 и r_2 — действительные числа и $0 \leqslant r_1 < r_2$. Пусть, далее, g есть непрерывная *возрастающая* функция на I и пусть E' есть множество роста влево функции $g(x) - r_1 x$ на I, а E'' — объединение множеств роста вправо функции $g(x) - r_2 x$ на каждом из интервалов, являющихся замыканием связных компонент из E'. Показать, используя a), что если μ есть мера Лебега на I, то $\mu(E'') \leqslant \frac{r_1}{r_2}\mu(E')$.

c) *Верхними и нижними правыми производными числами* конечной числовой функции f на I в точке $x \in I$ называются соответственно числа

$$D_d^+ f(x) = \limsup_{h \to 0,\ h>0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

$$D_d^- f(x) = \liminf_{h \to 0\ h>0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Точно так же, *верхними и нижними левыми производными числами* функции f в точке x называются соответственно

$$D_g^+ f(x) = \limsup_{h \to 0\ h<0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

$$D_g^- f(x) = \liminf_{h \to 0\ h<0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Показать, что если f непрерывна и *возрастает*, то множество тех $x \in I$, в которых $D_d^+ f(x) = +\infty$, и множество тех $x \in I$, в которых $D_g^- f(x) < D_d^+ f(x)$, имеют относительно μ меру нуль (для любого рационального числа $r > 0$ (соотв. для любой пары (r_1, r_2) рациональных чисел $0 \leqslant r_1 < r_2$) рассмотреть множество тех $x \in I$, в которых $D_d^+ f(x) > r$ (соотв. $D_g^- f(x) < r_1$ и $D_d^+ f(x) > r_2$ одновременно), и применить b)). Вывести отсюда, что функция f имеет конечную производную для почти всех $x \in I$ («теорема Лебега») (применить также предыдущий результат к функции $-f(-x)$).

°13) Пусть на компактном интервале $I = [a, b]$ из $\mathbf{R}$ последовательность конечных непрерывных возрастающих функций (f_n) такова, что $f_n(a) = 0$ при любом n и что сумма $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ конечна на I. Показать, что существует такое пренебрежимое относительно меры Лебега множество $N \subset I$, что для любого $x \in I \complement N$ производные $f_n'(x)$ и $s'(x)$ существуют и $s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ («теорема Фубини»). (Использовать упр. 12. Заметить, что ряд с общим членом $f_n'(x)$ сходится почти всюду, затем, положив $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$, выбрать такую подпоследовательность (s_{n_k}), чтобы ряд с общим членом $s(x) - s_{n_k}(x)$ был сходящимся на I, и применить к этому ряду предыдущее замечание.)

14) Пусть f — числовая функция, определенная на компактном интервале $I = [a, b]$ из $\mathbf{R}$ и интегрируемая на нем относительно меры Лебега. Показать, что если $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, то F имеет почти всюду

на I производную, равную f (свести к случаю, когда $\geqslant 0$, затем, используя упр. 13, рассмотреть последовательно случай, когда f полунепрерывна снизу, а затем уже общий случай (ср. гл. IV, § 4, п. 4, следствие из теоремы 3)).

15) Пусть μ означает меру Лебега на R; говорят, что точка $x \in \mathbf{R}$ есть *точка плотности* подмножества A из R, если при h и k, стремящихся к 0 по строго положительным значениям, частное

$$\frac{\mu^*(A \cap [x-h,\ x+k])}{h+k}$$

стремится к 1. Показать, что для произвольного подмножества A из R множество точек из A, не являющихся его точками плотности, пренебрежимо относительно μ. (Свести к случаю, когда A содержится в компактном интервале $[a, b]$, и рассмотреть функцию $s_A(x) = \mu^*(A \cap [a, x])$. Выбрать такую убывающую последовательность (A_n) открытых множеств, содержащих A, чтобы ряд с общим членом $s_{A_n}(x) - s_A(x)$ сходился на $[a, b]$, и применить упр. 13).)

16) a) Пусть g — функция, интегрируемая относительно меры Лебега на $E = [0, 1]$. Положим $G(x) = \int_0^x g(t)\,dt$; показать, что в любой точке $x \in E$, в которой g непрерывна, G имеет производную, равную g.

b) Построить пример функции g, ограниченной и непрерывной почти всюду на E и такой, чтобы G не имела правой производной в точках некоторого несчетного подмножества из E (ср. Функции действ. перем., гл. I, § 2, упр. 9).

c) Показать, что функция, равная $x^2 \sin \frac{1}{x^2}$ для $x \neq 0$ и 0 для $x = 0$, имеет производную в каждой точке из E, но эта производная не интегрируема относительно меры Лебега на E.

17) Пусть T и X — локально компактные пространства и π — непрерывное отображение T в X. Показать, что если π μ-собственно для любой положительной меры μ на T, то оно является собственным. (Рассуждать от противного, используя предл. 7, Общая топ. (4-е изд.), гл. I, § 10.)

18) В предложении 4b) утверждение становится неверным, если исключить условие, что π' непрерывно. (Взять $T = \mathbf{R}$, $T' = \overline{\mathbf{R}}$, $T'' = \mathbf{R}$; в качестве μ взять меру Лебега, в качестве π — каноническую инъекцию; положить $\pi'(x) = x$ при $x \in R$ и $\pi'(\pm\infty) = 0$.)

19) Пусть T, X, Y — локально компактные пространства, $\pi\colon T \to X$, $\pi'\colon X \to Y$ — отображения, $\pi'' = \pi' \circ \pi$ и μ — действительная мера на T. Может оказаться, что π μ-собственно, π' $\pi(\mu)$-собственно, а π'' не μ-собственно. (Взять $T = \mathbf{R} \times \{0, 1\}$, $X = \mathbf{R}$, $Y = \{0\}$, $\pi =$

$= \mathrm{pr}_1$; в качестве μ взять меру, индуцирующую меру Лебега (соотв. противоположную мере Лебега) на пространстве $\mathbf{R} \times \{0\}$ (соотв. $\mathbf{R} \times \{1\}$), отождествленном канонически с $\mathbf{R}$.)

20) Пусть T, X, Y—локально компактные пространства, $t \mapsto \lambda_t$— μ-согласованное отображение T в $\mathscr{M}_+(X)$, $\nu = \int \lambda_t d\mu(t)$, π — ν-собственное отображение X в Y. Пусть справедливо *одно* из следующих условий: a) Y счетно в бесконечности, а ν модерантна; b) Y счетно в бесконечности, а λ_t ограничена локально почти всюду на T. Тогда π λ_t-собственно локально почти всюду на T, отображение $t \mapsto \pi(\lambda_t)$ μ-согласовано и его интеграл равен $\pi(\mu)$.

21) Пусть T, X, Y — локально компактные пространства, $\pi\colon T \to X$, $\pi'\colon X \to Y$ — универсально измеримые отображения. Тогда $\pi' \circ \pi$ универсально измеримо. (Пусть μ — положительная мера на T. Чтобы доказать, что $\pi' \circ \pi$ μ-измеримо, свести к случаю, когда T компактно, а π непрерывно, и использовать тот факт, что π' измеримо относительно $\pi(\mu)$.)

22) Пусть X, Y — компактные пространства, U — непрерывное линейное отображение банахова пространства $\mathscr{C}(X; \mathbf{R})$ в банахово пространство $\mathscr{C}(Y; \mathbf{R})$, $\pi\colon X \to Y$ — непрерывное отображение. Предположим, что для любого $y \in Y$ и любой функции $f \in \mathscr{C}(X; \mathbf{R})$

$$\inf_{\pi(x)=y} f(x) \leqslant (U \cdot f)(y) \leqslant \sup_{\pi(x)=y} f(x).$$

Показать, что при этих условиях существует такое широко непрерывное отображение $\sigma\colon y \mapsto \sigma_y$ пространства Y в $\mathscr{M}_+(X)$, что для любого $y \in Y$ мера σ_y несома множеством $\pi^{-1}(y)$ и что $(U \cdot f)(\pi(x)) = \langle f, \sigma_{\pi(x)} \rangle$ для любого $x \in X$; обратить это утверждение. (Рассмотреть транспонированное отображение ${}^tU$.)

§ 7. Интегрирование относительно индуцированной меры

1. *Интегрирование относительно индуцированной меры*

Пусть X — локально компактное подпространство пространства T, μ — положительная мера на T и μ_x — мера, индуцированная на X мерой μ (гл. IV (2-е изд.), § 5, п. 7). Определим для любого $t \in T$ меру λ_t *на* X следующим образом: $\lambda_t = \varepsilon_t$, если $t \in X$, и $\lambda_t = 0$, если $t \in \complement X$. Для любой конечной числовой функции g на X имеем $\int g(x)\, d\lambda_t(x) = g(t)$, если $t \in X$, и $\int g(x)\, d\lambda_t(x) = 0$, если $t \in \complement X$. Значит, если g — функция

из $\mathscr{K}(X)$, то, по определению меры μ_X,

$$\mu_X(g) = \int \langle g, \lambda_t \rangle \, d\mu(t). \tag{1}$$

Это означает, что можно записать (§ 3, п. 1):

$$\mu_X = \int \lambda_t \, d\mu(t). \tag{2}$$

Определим теперь отображение π пространства T в X, положив $\pi(t) = t$ для $t \in X$ и $\pi(t) = t_0$ для $t \in \complement X$, причем t_0 — произвольная точка из X; можно для любого $t \in T$ записать: $\lambda_t = \varphi_X(t)\, \varepsilon_{\pi(t)}$. Отображение π μ-измеримо, ибо его сужения на X и на $\complement X$ измеримы (гл. IV (2-е изд.), § 5, п. 10, предл. 16); отсюда сразу же вытекает, что пара (π, φ_X) μ-*адаптирована* (§ 4, п. 1). Стало быть, имеем следующие результаты:

Предложение 1. *Для любой числовой функции* $g \geqslant 0$ *на* X

$$\int^{\bullet} g \, d\mu_X = \int_X^{\bullet} g \, d\mu \tag{3}$$

(ср. § 5, п. 3, пример, для обозначения $\int_X^{\bullet}$).

Если принять во внимание замечания выше и (2), то соотношение (3) будет следовать из теоремы 1, § 4.

Следствие 1. *Для любого подмножества* B *из* X *справедливо равенство* $\mu_X^*(B) = \mu^*(B)$; *для того чтобы* B *было локально* μ_X*-пренебрежимо, необходимо и достаточно, чтобы оно было локально* μ*-пренебрежимо.*

Следствие 2. *Пусть* M *— подмножество из* T. *Если* μ *сосредоточена на* M, *то* μ_X *сосредоточена на* $M \cap X$.

Следствие 3. *Для того чтобы мера* μ_X *была нулевой, необходимо и достаточно, чтобы* X *было локально* μ*-пренебрежимо.*

Замечание. Если S — носитель меры μ, то множество $S \cap X$ (которое замкнуто в X) в силу следствия 2 содержит носитель меры μ_X, но может отличаться от него. Например, если μ — непрерывная мера и X — подпространство, состоящее из одной точки, то индуцированная мера μ_X является нулевой, и значит, ее носитель пуст. Отметим, однако, что носитель меры μ_X равен $S \cap X$, если X *открыто* в T.

Предложение 2. *Для того чтобы отображение g пространства X в топологическое пространство было μ_X-измеримо, необходимо и достаточно, чтобы оно было μ-измеримо на X* (§ 5, п. 3, пример).

Это вытекает из предложения 3, § 4.

Следствие. *Для того чтобы подмножество B из X было μ_X-измеримо, необходимо и достаточно, чтобы оно было μ-измеримо.*

Теорема 1. *Пусть g — функция на X со значениями в $\overline{\mathbf{R}}$ или в банаховом пространстве. Для того чтобы g была существенно μ_X-интегрируема, необходимо и достаточно, чтобы она была существенно μ-интегрируема на X* (§ 5, п. 3, пример), *и тогда*

$$\int g d\mu_X = \int\limits_X g \, d\mu. \tag{4}$$

Это следует из теоремы 2, § 4.

Следствие 1. *Для того чтобы подмножество B из X было существенно μ_X-интегрируемо, необходимо и достаточно, чтобы оно было существенно μ-интегрируемо, и тогда $\mu_X(B) = \mu(B)$.*

Следствие 2. *Пусть g — комплексная локально μ-интегрируемая функция на T; тогда сужение g_X функции g на X локально μ_X-интегрируемо и выполняется равенство*

$$(g \cdot \mu)_X = g_X \cdot \mu_X. \tag{5}$$

Это сразу же вытекает из теоремы 1, примененной к функциям fg ($f \in \mathscr{K}(T; \mathbf{C})$), и из определения меры, индуцированной комплексной мерой на X (гл. IV (2-е изд.), § 5, п. 7).

Следствие 3. *Пусть θ — комплексная мера на T; тогда*

$$|\theta|_X = |\theta_X|. \tag{6}$$

В самом деле, положим $|\theta| = \mu$ и применим следствие 2, взяв в качестве g комплексную функцию с абсолютным значением 1 и такую, что $\theta = g \cdot \mu$ (§ 5, п. 5, следствие 3 из теоремы 2); получаем $\theta_X = g_X \cdot \mu_X$; но g_X имеет абсолютное значение 1, и формула (6) вытекает из предложения 2, § 5, п. 2.

Замечания. a) Следствие 3 уже было доказано другим способом (гл. IV (2-е изд.), § 7, лемма 3).

b) На основании следствия 3 теоремы 1 и следствий 1, 2, 3 из предложения 1, предложение 2, а также теорема 1 и ее следствия 1, 2 сразу же распространяются на комплексную меру.

Схолия. Для любой функции f (соотв. g) на X (соотв. на T) со значениями в банаховом пространстве F или в $\bar{\mathbf{R}}$ обозначим через $\zeta(f)$ (соотв. $\rho(g)$) нуль-продолжение функции f на T (соотв. сужение g на X). Имеем $\zeta(\rho(g)) = \varphi_X \cdot g$, $\rho(\zeta(f)) = f$. Обозначим через μ' меру $\varphi_X \cdot \mu$ на T. Для любого $p \in [1, +\infty]$ из предложений 1 и 2 следует, что ζ отображает $\overline{\mathscr{L}}^p_F(X, \mu_X)$ в $\overline{\mathscr{L}}^p_F(T, \mu')$ и что ρ отображает $\overline{\mathscr{L}}^p_F(T, \mu')$ на $\overline{\mathscr{L}}^p_F(X, \mu_X)$ с сохранением нормы в обоих случаях и интеграла для $p = 1$ (теорема 1); переходом к ассоциированным отделимым пространствам получаем два взаимно обратных изоморфизма. Точно так же, если применить ζ и ρ к положительным числовым функциям, то получим сохранение существенного верхнего интеграла (предл. 1). Стало быть, если условиться *отождествлять* функцию на X с функцией на T, обращающейся в нуль на $T - X$, а меру μ_X — с мерой μ', то задачи, относящиеся к индуцированным мерам, будут сводиться к задачам, относящимся к мерам, определенным посредством плотностей, изучавшимся в § 5. Этот способ рассуждения применяется также к комплексным мерам, на основании следствия 3 из теоремы 1.

2. *Свойства индуцированных мер*

Предложение 3. *Пусть X — локально компактное подпространство пространства T и λ — комплексная мера на X. Следующие свойства эквивалентны:*

a) *каноническая инъекция $i\colon X \to T$ является λ-собственной;*

b) *для любого компакта K из T множество $K \cap X$ существенно λ-интегрируемо;*

c) *всякая точка $t \in T$ обладает такой окрестностью V, что $V \cap X$ существенно λ-интегрируемо;*

d) *существует такая мера θ на T, что $\theta_X = \lambda$.*

Если эти эквивалентные условия выполнены, то в обозначениях d) *имеем*

$$(i(\lambda))_X = \lambda \quad \text{и} \quad i(\lambda) = i(\theta_X) = \varphi_X \cdot \theta. \tag{7}$$

Поскольку инъекция i непрерывна, то эквивалентность свойств a), b) и c) вытекает из предложения 1, § 6, и из замечания, которое за ним следует, если применять их к положительной мере $|\lambda|$. Если λ индуцирована на X мерой θ на T, то $|\lambda| = |\theta|_X$ (формула (6)) и значит, $|\lambda|(K \cap X) = |\theta|(K \cap X) = |\theta|(K) < +\infty$ (предл. 1) для любого компакта K из T, так что d) влечет b). Предположим, что a) выполняется, и покажем, что $(i(\lambda))_X = \lambda$, откуда будет следовать d). Пусть g — элемент из $\mathscr{K}(X; \mathbf{C})$; по определению индуцированной меры, из предложения 7, § 6, п. 4, если обозначить g' нуль-продолжение g на T, имеем

$$\int g d(i(\lambda))_X = \int g' d(i(\lambda)) = \int (g' \circ i)\, d\lambda = \int g\, d\lambda.$$

Этим завершается доказательство эквивалентности четырех свойств. Если $\lambda = \theta_X$ и если $g \in \mathscr{K}(T; \mathbf{C})$, то

$$\int g d(i(\theta_X)) = \int (g \circ i)\, d(\theta_X) = \int g\varphi_X d\theta,$$

ибо $g\varphi_X$ есть нуль-продолжение $g \circ i$ на T. Это доказывает вторую формулу (7).

Следствие 1. *Если X замкнуто, то всякая комплексная мера λ на X индуцирована некоторой мерой на T.*

В самом деле, если K—компакт из T, то $K \cap X$ компактно, а значит, λ-интегрируемо.

Следствие 2. *Пусть θ — комплексная мера на T, π — θ-собственное отображение T в локально компактное пространство Y и π_X — его сужение на X. Тогда π_X θ_X-собственно, и $\pi_X(\theta_X) = \pi(\varphi_X \cdot \theta)$.*

В самом деле, $\pi_X = \pi \circ i$, где i — каноническая инъекция $X \to T$. Значит, если θ положительна, то следствие вытекает из предложения 3 и из транзитивности мер-образов (§ 6, п. 3, предл. 4). Случай неположительной комплексной меры получается отсюда по линейности.

Предложение 4. *Пусть X и Y — такие локально компактные подпространства из T, что $Y \subset X$. Если θ — комплексная мера на T, то мера $(\theta_X)_Y$ индуцированная на Y мерой θ_X, равна θ_Y* («транзитивность индуцированных мер»).

Достаточно заметить, что если g — элемент из $\mathscr{K}(Y, \mathbf{C})$, то нуль-продолжение g на T получается нуль-продолжением нуль-продолжения g на X, или еще (если использовать отождествления из схолии), что $\varphi_Y \cdot \theta = \varphi_Y (\varphi_X \cdot \theta)$ (§ 5, п. 4, предл. 8).

Предложение 5. *Пусть* $(\lambda_\alpha)_{\alpha \in A}$ — *фильтрующееся по возрастанию семейство положительных мер на* T, *имеющее верхнюю грань* λ, *и пусть* X — *локально компактное подпространство пространства* T. *Тогда семейство индуцированных мер* $\lambda_\alpha \mid X$ *мажорировано в* $\mathscr{M}(X)$, *и*

$$\sup_{\alpha \in A} (\lambda_\alpha \mid X) = \lambda \mid X. \tag{8}$$

С учетом отождествлений из схолии это предложение есть частный случай предложения 5, § 5, п. 4.

Следствие. *Пусть* $(\mu_i)_{i \in I}$ — *суммируемое семейство положительных мер на* T, *с суммой* μ. *Тогда семейство индуцированных мер* $\mu_i \mid X$ *суммируемо, и*

$$\sum_{i \in I} (\mu_i \mid X) = \mu \mid X. \tag{9}$$

Предложение 6. *Пусть* $\Lambda\colon t \mapsto \lambda_t$ — μ-*согласованное отображение* T *в* $\mathscr{M}_+(X)$, *где* X — *локально компактное пространство, счетное в бесконечности, и пусть* Y — *локально компактное подпространство в* X. *Положим* $\int \lambda_t \, d\mu(t) = \nu$. *Тогда отображение* $t \mapsto \lambda_t \mid Y$ *пространства* T *в* $\mathscr{M}_+(Y)$ μ-*согласовано, и*

$$\int (\lambda_t \mid Y) \, d\mu(t) = \nu \mid Y. \tag{10}$$

С учетом отождествлений из схолии это предложение есть частный случай предложения 7, § 5, п. 4.

Упражнения

1) Пусть X — локально компактное подпространство локально компактного пространства T. Показать, что для любой меры λ на T носитель меры λ_X есть след на X носителя меры $\nu = \varphi_X \cdot \lambda$.

2) Пусть T — локально компактное пространство, X — его локально компактное подпространство и μ — положительная мера на T; положим $\nu = \varphi_X \cdot \mu = j(\mu_X)$ (где j — каноническая инъекция X в T).

а) Показать, что всякое μ_X-пренебрежимое подмножество из X ν-пренебрежимо.

b) Показать, что для любой числовой функции $g \geqslant 0$, определенной на X, $\int^* g\, d\mu_X = \int_X^* g\, d\nu$ (применить a), а также формулу 7 из § 3).

c) Пусть $\boldsymbol{g}$ — функция на X со значениями в $\overline{\mathbf{R}}$ или в банаховом пространстве и $\boldsymbol{g}'$ — продолжение функции $\boldsymbol{g}$ на T, равное 0 на $T - X$. Для того чтобы $\boldsymbol{g}$ была μ_X-интегрируема, необходимо и достаточно, чтобы $\boldsymbol{g}'$ была ν-интегрируема, и тогда $\int \boldsymbol{g}\, d\mu_X = \int_X \boldsymbol{g}\, d\nu$ (использовать b)).

3) В обозначениях упр. 2 предположим, что X есть *открытое* подмножество из T.

a) Показать, что для любой числовой функции $g \geqslant 0$, определенной на X, $\int^* g\, d\mu_X = \int_X^* g\, d\mu$ (использовать упр. 2, предл. 3, § 5 и предл. 4, § 1).

b) Пусть $\boldsymbol{g}$ — функция на X со значениями в $\overline{\mathbf{R}}$ или в банаховом пространстве и $\boldsymbol{g}'$ — ее продолжение на T, равное 0 на $T - X$. Для того чтобы $\boldsymbol{g}$ была μ_X-интегрируема, необходимо и достаточно, чтобы $\boldsymbol{g}'$ была μ-интегрируема, и тогда $\int \boldsymbol{g}\, d\mu_X = \int_X \boldsymbol{g}\, d\mu$ (использовать a)).

4) Приняв обозначения упр. 2, показать, что если X *замкнуто* в T, то для любой числовой функции $f \geqslant 0$, определенной на T, $\int^* (f \circ j)\, d\mu_X = \int^* f\, d\nu$ (заметить, что отображение j является собственным, и применить предл. 2, § 4). Если, в тех же предпосылках, $\boldsymbol{f}$ есть отображение T в $\overline{\mathbf{R}}$ или в банахово пространство, то для того чтобы отображение $\boldsymbol{f} \circ j$ было μ_X-интегрируемо, необходимо и достаточно, чтобы $\boldsymbol{f}$ было ν-интегрируемо, и тогда $\int (\boldsymbol{f} \circ j)\, d\mu_X = \int \boldsymbol{f}\, d\nu$ (§ 4, теорема 2).

5) Пусть T — локально компактное пространство, μ — мера, определенная в упр. 5, гл. IV, § 1, и D — (замкнутое) множество точек из T вида $(0, y)$.

a) Показать, что мера μ_D, индуцированная на D мерой μ, является нулевой, но $\int^* \varphi_D\, d\mu = +\infty$ (ср. упр. 3a)).

b) Пусть $X = T - D$ и пусть j есть каноническая инъекция X в T; тогда $j(\mu_X) = \mu$, но

$$\int^* (\varphi_D \circ j)\, d\mu_X = 0, \qquad \int^* \varphi_D\, d\mu = +\infty \quad \text{(ср. упр. 4)}.$$

6) Пусть T — локально компактное пространство, X — его локально компактное подпространство и j — каноническая инъекция X

в T. Пусть, далее, λ — *такая положительная мера на* X, что для любого компактного множества $K \subset T$ пересечение $K \cap X$ существенно λ-интегрируемо. Показать, что мера $\nu = j(\lambda)$ есть наименьшая из положительных мер ρ на T, обладающих тем свойством, что $\rho_X = \lambda$ и что их носитель является замыканием в T носителя меры λ.

7) Пусть X, Y — локально компактные пространства, $\pi\colon X \to Y$ — непрерывное отображение, T — локально компактное подпространство пространства Y, $S = \pi^{-1}(T)$, $\pi_T\colon S \to T$—отображение, совпадающее с π на S, и ν — положительная мера на Y. Показать, что следующие три условия эквивалентны:

a) Если ν_T — мера, индуцированная мерой ν на T, то существует такая положительная мера μ_T на S, что $\pi_T(\mu_T) = \nu_T$.

b) Существует такая положительная мера λ на X, что $\pi(\lambda) = \nu_T$.

c) Существует такая положительная мера λ_S на S, что $(\pi \mid S)(\lambda_S) = \nu_T$.

8) Пусть X, Y — локально компактные пространства, $\pi\colon X \to Y$ — непрерывное отображение и ν — положительная мера на Y, сосредоточенная на $\pi(X)$. Предположим, что для любого $y \in \pi(X)$ найдутся окрестность V в Y и такая положительная мера λ_V на $\pi^{-1}(V)$, что образ λ_V при отображении $\pi_V\colon \pi^{-1}(V) \to V$, совпадающем с π, равен мере, индуцируемой ν_V. Показать, что при этих условиях существует такая положительная мера μ на X, что $\pi(\mu) = \nu$. (Рассмотреть множество $\mathfrak{G}$ пар (G, λ), для которых G открыто в Y, и λ есть такая положительная мера на X, что $\pi(\lambda) = \nu_G$. Упорядочить $\mathfrak{G}$ отношением «$G_1 \subset G_2$ и $\lambda_1 \leqslant \lambda_2$» между (G_1, λ_1) и (G_2, λ_2). Показать вначале, что упорядоченное множество $\mathfrak{G}$ индуктивно, а затем завершить рассуждение при помощи теоремы Цорна и упр. 7.)

9) Пусть X, Y — локально компактные пространства и $\pi\colon X \to Y$ — непрерывное отображение. Говорят, что отображение π *консервативно*, если для любой положительной меры ν на Y, сосредоточенной на $\pi(X)$, существует такая положительная мера μ на X, что $\nu = \pi(\mu)$.

a) Пусть X, Y, Z — локально компактные пространства, $\pi\colon X \to Y$ и $\pi'\colon Y \to Z$ — непрерывные отображения; положим $\pi'' = \pi \circ \pi'$ и предположим, что π *сюръективно*. Показать, что если π и π' консервативны, то таково же и π''; обратно, если π'' консервативно, то консервативно и π'.

b) Предположим, что для любого $y \in \pi(X)$ найдется такая его открытая окрестность V в Y, что если $\pi_V\colon \pi^{-1}(V) \to V$ есть отображение, совпадающее с π, то существует непрерывное сечение, ассоциированное с π_V (Общая топ., гл. I (4-е изд.), § 3, п. 5). Показать, что π консервативно (использовать упр. 8).

c) Пусть Y — интервал $[0, 1]$ из $\mathbf{R}$, X — множество Y, наделенное дискретной топологией, и $\pi\colon X \to Y$ — тождественное отображение. Показать, что отображение π не является консервативным.

10) Пусть X, Y — локально компактные пространства. Показать, что всякое непрерывное *собственное* отображение пространства X в Y консервативно. (Из условия вытекает, что при отображении $f \mapsto f \circ \pi$ пространства $\mathscr{K}(Y)$ в $\mathscr{C}(X)$ его образ E содержится в $\mathscr{K}(X)$; далее, для любой положительной меры ν на Y применяем к подпространству E из $\mathscr{K}(X)$ и к положительной линейной форме $f \circ \pi \mapsto \nu(f)$ на E следствие из предл. 1, Топ. векг. пр-ва, гл. II (2-е изд.), § 3, п .1.)

11) Пусть X, Y — локально компактные пространства, π: $X \to Y$ — непрерывное отображение и M — такое подмножество из Y, что $\pi^{-1}(M)$ содержится в счетном объединении компактных множеств. Тогда для любой положительной меры ν на Y, сосредоточенной на M, существует такая положительная мера μ на X, что $\pi(\mu) = \nu$ (использовать упр. 10).

§ 8. Произведения мер

1. *Интерпретация меры-произведения как интеграла мер*

Во всем этом параграфе через T, T' обозначаются локально компактные пространства, через μ—положительная мера на T, через μ' — положительная мера на T' и через $\nu = \mu \otimes \mu'$ — мера-произведение на $X = T \times T'$ (гл. III. (2-е изд.), § 4, п. 1).

Для любого $t \in T$ отображение $t' \mapsto (t, t')$ пространства T' в X является непрерывным и собственным. Пусть λ'_t — образ μ' при этом отображении; λ'_t есть положительная мера на X, и если $f \in \mathscr{K}(X)$, то обозначив через f_t частичное отображение $t' \mapsto f(t, t')$, имеем

$$\int f d\lambda'_t = \int f_t \, d\mu', \tag{1}$$

что выражается еще соотношением $\lambda'_t = \varepsilon_t \otimes \mu'$.

Кроме того, отображение $t \mapsto \lambda'_t(f)$ непрерывно и имеет компактный носитель (гл. III (2-е изд.), § 4, п. 1, лемма 2), а значит, отображение $t \mapsto \lambda'_t$ пространства T в $\mathscr{M}(X)$ широко непрерывно (и тем более широко μ-измеримо); следовательно, семейство мер $t \mapsto \lambda'_t$ *μ-согласовано* (§ 3, п. 1, предл. 2а)). По определению, интеграл от f относительно меры $\int \lambda'_t \, d\mu(t)$ равен

$$\int \langle f, \lambda'_t \rangle \, d\mu^*(t) = \int d\mu(t) \int f_t(t') \, d\mu'(t') = \int f(t, t') \, d\nu(t, t')$$

(гл. III (2-е изд.), § 4, п. 1, теорема 2); стало быть, $\nu = \int \lambda'_t \, d\mu(t)$.

Точно так же, для любого элемента $t' \in T'$ обозначим $\lambda'_{t'}$ отображение $t \mapsto (t, t')$ пространства T в X. Отображение $t' \mapsto \lambda_{t'}$ μ'-согласовано и широко непрерывно, и $\nu = \int \lambda_{t'}\, d\mu'\ (t')$. Нам понадобятся следующие леммы.

Лемма 1. *Для любой числовой функции* $f \geqslant 0$ *на* X

$$\int^* f_t\, d\mu' = \int^* f\, d\lambda'_t. \tag{2}$$

Поскольку $t' \mapsto (t, t')$ — непрерывное собственное отображение, то это следует из предложения 2, § 4, п. 2.

Лемма 2. *Пусть* f *— отображение* X *в топологическое пространство. Для того чтобы* f *было* λ'_t*-измеримо, необходимо и достаточно, чтобы* f_t *было* μ'*-измеримо.*

Это есть следствие предложения 3, § 6, п. 2.

Лемма 3. *Пусть* f *— функция на* X *со значениями в* $\overline{\mathbf{R}}$ *или в банаховом пространстве. Для того чтобы* f *была* λ'_t*-интегрируема, необходимо и достаточно, чтобы* f_t *была* μ'*-интегрируема, и тогда*

$$\int f_t d\mu' = \int f d\lambda'_t. \tag{3}$$

Это следует из теоремы 2, § 4, п. 4, если принять во внимание, что $t' \mapsto (t, t')$ непрерывно и собственно.

Замечание. Можно очень просто доказать леммы 1, 2, 3 без использования результатов §§ 4, 6, при помощи прямого рассуждения. Например, соотношение 2) очевидно по определению, если $f \in \mathscr{K}(T \times T')$. Если f полунепрерывна снизу на $X = T \times T'$, то достаточно заметить, что $t' \to f_t(t')$ есть верхняя огибающая функций $t' \mapsto g_t(t') = g(t, t')$, где g пробегает множество таких функций из $\mathscr{K}(X)$, что $0 \leqslant g \leqslant f$. Наконец, для произвольной f отметим, что если $h \geqslant f$ полунепрерывна снизу на X, то $t' \mapsto h(t, t')$ полунепрерывна снизу на T'; и обратно, если $t' \mapsto u(t')$ полунепрерывна снизу на T и такова, что $u(t') \geqslant f(t, t')$ для любого $t' \in T'$, то функция h, удовлетворяющая условиям $h(t, t') = u(t')$, $h(t_1, t') = +\infty$ для $t_1 \neq t$, полунепрерывна снизу на X и такова, что $h \geqslant f$. Как только лемма 1 доказана, мы получаем, что множество $(T - \{t\}) \times T'$ λ'_t-преиебрежимо, и тогда очень просто доказать леммы 2 и 3.

Равенство (3) позволяет без угрозы путаницы обозначать обе его части $\int f(t, t')\, d\mu'(t')$. Очевидно, что аналогичные результаты имеют место для мер $\lambda_{t'} = \mu \otimes \varepsilon_{t'}$.

Мы будем вместо $\int^* f(t, t')\, d\nu(t, t')$, $\int^\cdot f(t, t')d\nu(t, t')$, $\int f(t, t')\, d\nu(t, t')$ использовать обозначения

$$\int\int^* f(t, t')\, d\mu(t)\, d\mu'(t'),\quad \int\int^\cdot f(t, t')\, d\mu(t)\, d\mu'(t'),$$
$$\int\int f(t, t')d\mu(t)\, d\mu'(t')$$

в соответствии с обозначениями, принятыми в гл. III (2-е изд.), § 4, п. 1.

Интерпретация меры ν как интеграла $\int \lambda'_t\, d\mu(t)$ позволит нам сформулировать на языке мер-произведений результаты § 3. С другой стороны, мера λ'_t несома $\{t\} \times T' = \mathrm{pr}_1^{-1}(t)$, так что этот интеграл определяет разбиение на слои (дезинтегрирование) меры ν относительно проекции pr_1 произведения $T \times T'$ на T (§ 6, п. 6). Прежде чем изложить результаты, получаемые таким образом, приведем одно полезное свойство.

Предложение 1. *Пусть* $(\mu_\alpha)_{\alpha\in A}$ (соотв. $(\mu'_\beta)_{\beta\in B}$) — *суммируемое семейство положительных мер на* T (соотв. *на* T'), *сумму которого обозначим через* μ (соотв. *через* μ'). *Тогда семейство* $(\mu_\alpha \otimes \mu'_\beta)_{(\alpha,\beta)\in A\times B}$ *суммируемо на* $T \times T'$, *и*

$$\mu \otimes \mu' = \sum_{(\alpha,\beta)\in A\times B} \mu_\alpha \otimes \mu'_\beta. \qquad (4)$$

Эти свойства очевидны, когда A и B конечны. Отсюда следует, что если A' (соотв. B') — конечное подмножество из A (соотв. B), то $\sum_{(\alpha,\beta)\in A'\times B} \mu_\alpha \otimes \mu'_\beta \leqslant \mu \otimes \mu'$.

Стало быть, семейство $(\mu_\alpha \otimes \mu'_\beta)$ суммируемо. Для доказательства формулы (4) достаточно показать, что правая часть удовлетворяет характеристическому свойству мер-произведений (гл. III (2-е изд.), § 4, п. 1, теорема 1); это достигается следующими выкладками.

Пусть f — элемент $\mathscr{K}_+(T)$, f' — элемент из $\mathscr{K}_+(T')$; напомним, что $f \otimes f'$ означает функцию $(t, t') \mapsto f(t) f'(t')$ на $T \times T'$, которая принадлежит $\mathscr{K}_+(T \times T')$ (Алгебра, гл. II (3-е изд.),

§ 7, п. 7). Тогда по определению мер-произведений получаем:

$$\sum_{(\alpha,\beta)\in A\times B} \langle \mu_\alpha \otimes \mu'_\beta,\ f\otimes f'\rangle = \sum_{(\alpha,\beta)\in A\times B} (\langle \mu_\alpha,\ f\rangle \langle \mu'_\beta,\ f'\rangle) =$$

$$= \Big(\sum_{\alpha\in A} \langle \mu_\alpha,\ f\rangle\Big)\Big(\sum_{\beta\in B} \langle \lambda'_\beta,\ f'\rangle\Big) =$$

$$= \langle \mu,\ f\rangle \langle \mu',\ f'\rangle = \langle \mu\otimes\mu',\ f\otimes f'\rangle.$$

2. *Измеримые функции относительно произведения двух мер*

Предложение 2. *Пусть f — ν-измеримая функция на $T\times T'$ со значениями в топологическом пространстве G и пусть M — множество тех $t\in T$, для которых отображение $t'\mapsto f(t,t')$ не является μ'-измеримым.*

a) *Если f постоянна на дополнении ν-модерантного подмножества из $T\times T'$, то M μ-пренебрежимо.*

b) *Если μ' модерантна, то M локально μ-пренебрежимо.*

Утверждение a) вытекает из предложения 4 b) § 3, п. 2 и из замечаний п. 1. Для получения b) заметим, что μ' есть сумма последовательности μ'_n ограниченных мер (§ 2, п. 3, предл. 4); f измерима относительно $\mu\otimes\mu'_n \leqslant \nu$, и множество M является объединением множеств M_n, ассоциированных с мерами μ'_n (§ 2, п. 2, предл. 2). Стало быть, все сводится к случаю, когда μ' ограничена, что следует из предложения 4c), § 3, п. 2.

Это предложение сразу же распространяется на комплексные меры (гл. III (2-е изд.), § 4, п. 2, предл. 3).

Следствие. Пусть A — *ν-измеримое подмножество из $T\times T'$ и пусть M — множество тех $t\in T$, для которых сечение $A(t)$ множества A в t не является μ'-измеримым.*

a) *Если A ν-модерантно, то M μ-пренебрежимо.*

b) *Если проекция множества A на T' μ-модерантна, то M локально μ-пренебрежимо.*

Утверждение a) вытекает непосредственно из предложения 2. Для установления b) обозначим через B множество, являющееся объединением последовательности открытых μ'-интегрируемых множеств из T', содержащее проекцию A на T'; обозначим через μ'_1 модерантную меру $\varphi_B\cdot\mu'$; поскольку A измеримо относительно

$\mu \otimes \mu_1' \leqslant \mu \otimes \mu'$, то предложение 2 влечет, что $A(t)$ μ_1'-измеримо, кроме как для тех t, которые образуют локально μ-пренебрежимое множество. Но $A(t) \subset B$, и поэтому утверждение, что $A(t)$ μ_1-измеримо, равносильно утверждению, что $A(t)$ μ'-измеримо (§ 5, п. 3, предл. 4).

Предложение 3. *Пусть f — отображение T в топологическое пространство F. Если f μ-измеримо, то отображение $(t, t') \mapsto f(t)$ ν-измеримо. Обратно, если $\mu' \neq 0$ и если это отображение ν-измеримо, то функция f μ-измерима.*

Первое утверждение вытекает из следствия 1 предложения 10, § 6, п. 6. Предположим, что $\mu' \neq 0$, и обозначим через μ_1' ненулевую меру с компактным носителем, мажорированную мерой μ', а через ν_1 — меру $\mu \otimes \mu_1'$, и положим $a = \| \mu_1' \|$. Тогда проекция $T \times T'$ на T ν_1-собственна, и мера-образ $\mathrm{pr}_1(\nu_1)$ равна $a\mu$ (§ 6, п. 6, предл. 10). Если $(t, t') \mapsto f(t)$ ν-измеримо, то оно также ν_1-измеримо, и значит, f измеримо относительно меры $a\mu$ (§ 6, п. 2, предл. 3), откуда и следует предложение, поскольку $a \neq 0$)

Это утверждение сразу же распространяется на комплексные меры (гл. III, § 4, п. 2, предл. 3), равно как и следствия, приведенные ниже.

Следствие 1. *Пусть F, F', G — топологические пространства и пусть u — непрерывное отображение $F \times F'$ в G. Пусть, далее, f* (соотв. *f'*) *— функция на T* (соотв. *T'*) *со значениями в F* (соотв. *F'*), *измеримая относительно μ* (соотв. *μ'*). *Тогда функция $(t, t') \mapsto u(f(t), f'(t'))$ измерима относительно $\mu \otimes \mu'$.*

Поскольку отображения $(t, t') \mapsto f(t)$, $(t, t') \mapsto f'(t')$ в силу предложения 3 ν-измеримы, то следствие вытекает из теоремы 1 гл. IV, § 5, п. 3.

Следствие 2. *Если $A \subset T$ и $A' \subset T'$ измеримы (соответственно относительно μ и μ'), то $A \times A'$ измеримо относительно $\mu \otimes \mu'$.*

Это сразу же вытекает из следствия 1.

Следствие 3. *Рассмотрим положительные числовые функции* (соотв. *функции с комплексными значениями*) *f на T и f' на T'. Если эти функции измеримы относительно соответственно μ и μ',*

то функция $f \otimes f'$: $(t, t') \mapsto f(t) f'(t')$ *измерима относительно* $\mu \times \mu'$.

Случай комплексных функций или конечных действительных функций непосредственно вытекает из следствия 1. В случае положительных числовых функций для любого целого $n \geqslant 0$ положим $f_n = \inf(f, n)$, $f'_n = \inf(f', n)$; тогда (при обычном соглашении $0 \cdot (+\infty) = 0$) $f \otimes f' = \sup_n (f_n \otimes f'_n)$, откуда и получаем утверждение.

Предложение 4. *Пусть* A — *подмножество из* T. *Если* A *локально* μ-*пренебрежимо, то* $A \times T'$ *локально* ν-*пренебрежимо. Обратно, если* $A \times T'$ *локально* ν-*пренебрежимо и* $\mu' \neq 0$, *то* A *локально* μ-*пренебрежимо.*

Первое утверждение вытекает из следствия 1 предложения 10, § 6, п. 6. Для доказательства второго утверждения примем обозначения из доказательства предложения 3; $A \times T' = \mathrm{pr}_1^{-1}(A)$ локально пренебрежимо относительно меры ν_1, значит, A локально пренебрежимо относительно $a\mu$ (§ 6, п. 2, следствие 2 предл. 2), откуда и следует утверждение, поскольку $a \neq 0$.

Это предложение сразу же распространяется на произведение двух комплексных мер (гл. III (2-е изд.), § 4, п. 2, предл. 3), равно как и следствие ниже.

Следствие. *Если мера* μ (соотв. μ') *сосредоточена на* M (соотв. M'), *то* $\mu \otimes \mu'$ *сосредоточена на* $M \times M'$.

В самом деле, $(T \times T') - (M \times M')$ есть объединение множеств $(T - M) \times T'$ и $T \times (T' - M')$, которые локально пренебрежимы относительно $\mu \otimes \mu'$ в силу предложения 4.

3. *Интегрирование положительных функций*

Напомним, что мы приняли соглашение считать произведение $0 \cdot (+\infty)$ равным 0. Это соглашение ведет, в частности, к следующему: если $f \geqslant 0$ — числовая функция, определенная на локально компактном пространстве, наделенном положительной мерой λ, то $\lambda^*(af) = a \cdot \lambda^*(f)$ для любой константы a такой, что $0 \leqslant a \leqslant +\infty$. Это очевидно, если $a = 0$; если $a = +\infty$, то $\lambda^*(af) = a \cdot \lambda^*(f)$ или $\lambda^*(af) = a \cdot \lambda^*(f) = +\infty$ в зависимости от того,

будет ли $f\lambda$-пренебрежима или нет; наконец, если $0 < a < +\infty$, то известно, что $\lambda^*(af) = a \cdot \lambda^*(f)$.

Предложение 5. *Пусть $f \geqslant 0$ — числовая функция, полунепрерывная снизу на $T \times T'$. Тогда функция*

$$t \mapsto \int^* f(t, t')\, d\mu'(t')$$

полунепрерывна снизу на T, и

$$\int\int^* f(t, t')\, d\mu(t)\, d\mu'(t') = \int^* d\mu(t) \int^* f(t, t')\, d\mu'(t'). \qquad (5)$$

Это есть следствие предложения 2, § 3, п. 1, если учесть лемму 1, п. 1.

Следствие 1. *Пусть $f \geqslant 0$ (соотв $f' \geqslant 0$) — полунепрерывная снизу функция на T* (соотв. *на T'*); *тогда функция $f \otimes f'$; $(t, t') \mapsto f(t) f'(t')$ полунепрерывна снизу на $T \times T'$ и*

$$\int\int^* f(t) f'(t')\, d\mu(t)\, d\mu'(t') = \left(\int^* f(t)\, d\mu(t)\right)\left(\int^* f'(t')\, d\mu'(t')\right). \qquad (6)$$

Пусть G (соотв. G') — множество таких функций $g \in \mathscr{K}_+(T)$ (соотв. $g' \in \mathscr{K}_+(T')$), что $g \leqslant f$ (соотв. $g' \leqslant f'$); тогда

$$f \otimes f' = \sup_{g \in G,\ g' \in G'} g \otimes g'.$$

Функции $g \otimes g'$ принадлежат $\mathscr{K}_+(T \times T')$, значит, $f \otimes f'$ полунепрерывна снизу, и (6) сразу же вытекает из предложения 5 (или получается непосредственно переходом к пределу из предыдущей формулы).

Следствие 2. *Пусть A — μ-модерантное подмножество из T и A' — μ'-модерантное подмножество из T'; тогда $A \times A'$ ν-модерантно в $T \times T'$.*

Принимая во внимание определение модерантных множеств (§ 1, п. 2, предл. 5), достаточно показать, что если B — открытое интегрируемое множество из T, а B' — открытое интегрируемое множество из T', то открытое множество $B \times B'$ интегрируемо. Это сразу же вытекает из следствия 1.

Следствие 3. *Пусть A — μ-пренебрежимое подмножество из T, а B' — μ'-модерантное подмножество из T'; тогда $A \times B'$ ν-пренебрежимо.*

В самом деле, $A \times B'$ локально ν-пренебрежимо (предл. 4) и ν-модерантно (следствие 2), а значит, ν-пренебрежимо (§ 1, п. 2, следствие 1 предл. 7).

Следствия 2 и 3 распространяются на произведение двух комплексных мер, если применить их абсолютным значениям (гл. III (2-е изд.), § 4, предл. 3).

Предложение 6. *Пусть $f \geqslant 0$ — числовая функция на $T \times T'$. Тогда*

$$\int\int^* f(t, t')\, d\mu(t)\, d\mu'(t') \geqslant \int^* d\mu(t) \int^* f(t, t')\, d\mu'(t').$$

Это вытекает из предложения 3, § 3, п. 2, если принять во внимание (2).

Предложение 7. *Пусть f — ν-измеримая положительная числовая функция на $T \times T'$.*

a) *Если f ν-модерантна, то функции $t \mapsto \int^* f(t, t')\, d\mu'(t')$, $t' \mapsto \int^* f(t, t')\, d\mu(t)$ измеримы соответственно относительно μ и μ', и*

$$\int\int^* f(t, t')\, d\mu(t)\, d\mu'(t') = \int^* d\mu(t) \int^* f(t, t')\, d\mu'(t') = \int^* d\mu'(t') \int^* f(t, t')\, d\mu(t). \tag{7}$$

b) *Если мера μ' модерантна, то функция $t \mapsto \int^* f(t, t')\, d\mu'(t')$ μ-измерима, и*

$$\int\int^* f(t, t')\, d\mu(t)\, d\mu'(t') = \int^* d\mu(t) \int^* f(t, t')\, d\mu'(t'). \tag{8}$$

В случае ограниченной меры μ' утверждение a), равно как и утверждение b), являются следствием предложения 5, § 3, п. 2.

Для случая, когда μ' модерантна, представим μ' как сумму $\sum_{n\in N} \mu'_n$ последовательности ограниченных мер (§ 2, п. 3, предл. 4). Тогда функция $t \mapsto \int^* f(t, t')\, d\mu'_n(t')$ μ-измерима, и

$$\int\int^* f(t, t')d\mu(t)\, d\mu'_n(t') = \int^* d\mu(t) \int^* f(t, t')\, d\mu'_n(t').$$

Но $\mu \otimes \mu' = \sum_{n\in N} (\mu \otimes \mu'_n)$ (предл. 1); утверждение b) получается теперь суммированием по n (§ 2, п. 2, предл. 1).

Следствие 1. *Пусть H — подмножество из $T \times T'$ и пусть A — множество тех $t \in T$, для которых сечение $H(t)$ множества H в t не является μ'-пренебрежимым.*

a) *Если H ν-пренебрежимо, то A μ-пренебрежимо.*

b) *Если H локально ν-пренебрежимо и если μ' модерантна, то A локально μ-пренебрежимо.*

Свойство a) сразу же вытекает из предложения 7 (или из предл. 6). При условии b) все сводится к утверждению, что $H(t$ локально μ'-пренебрежимо или μ'-пренебрежимо, поскольку μ' модерантна (§ 1. п. 2, предл. 7). Стало быть, свойство b) вытекает из формулы (8).

Это следствие сразу же распространяется переходом к абсолютным значениям на произведение двух комплексных мер. То же самое справедливо относительно следствия 2.

Следствие 2. *Если множество $A \subset T \times T'$ ν-пренебрежимо, то для почти всех $t \in T$ сечение $A(t)$ множества A в t μ'-интегрируемо, функция $t \mapsto \mu'(A(t))$ μ-интегрируема, и*

$$\nu(A) = \int \mu'(A(t))\, d\mu(t). \tag{9}$$

Предложение 8. *Для любой пары числовых функций $f \geqslant 0$, $f' \geqslant 0$, определенных соответственно на T и на T',*

$$\int\int^* f(t) f'(t')\, d\mu(t)\, d\mu'(t') = \left(\int^* f(t)\, d\mu(t)\right)\left(\int^* f'(t')\, d\mu'(t')\right). \tag{10}$$

Вначале рассмотрим случай, когда μ и μ' — меры *с компактным носителем*; тогда это верно и для $\mu \otimes \mu'$, и все символы $\int^{\cdot}$, $\int\int^{\cdot}$ могут быть заменены верхними интегралами. В силу предложения 6

$$\int\int^{*} f(t)\, f'(t')\, d\mu(t)\, d\mu'(t') \geqslant$$

$$\geqslant \int^{*} d\mu(t) \int^{*} f(t)\, f'(t')\, d\mu'(t') =$$

$$= \left(\int^{*} f(t)\, d\mu(t)\right)\left(\int^{*} f'(t')\, d\mu'(t')\right).$$

Чтобы установить обратное неравенство, выберем функцию $h \geqslant f$ (соотв. $h' \geqslant f'$), являющуюся нижней огибающей последовательности (h_n) (соотв. (h'_n)) полунепрерывных снизу функций и такую, что

$$\int^{*} h(t)\, d\mu(t) = \int^{*} f(t)\, d\mu(t)$$

$\left(\text{соотв. } \int^{*} h'(t')\, d\mu'(t') = \int^{*} f'(t')\, d\mu'(t')\right)$; существование таких функций вытекает сразу же из определения верхнего интеграла (гл. IV, § 1, п. 3, опр. 4) и из теоремы Лебега. Применив предложение 7 к измеримой функции $h \otimes h'$, получим:

$$\int\int^{*} f(t)\, f'(t')\, d\mu(t)\, d\mu'(t') \leqslant$$

$$\leqslant \int\int^{*} h(t)\, h'(t')\, d\mu(t)\, d\mu'(t') = \left(\int^{*} h(t)\, d\mu(t)\right)\left(\int^{*} h'(t')\, d\mu'(t')\right) =$$

$$= \left(\int^{*} f(t)\, d\mu(t)\right)\left(\int^{*} f'(t')\, d\mu'(t')\right),$$

т. е. искомое неравенство. Стало быть, предложение доказано для случая, когда μ и μ' — меры с компактным носителем. В общем случае достаточно представить μ (соотв. μ') в виде суммы семейства $(\mu_\alpha)_{\alpha \in A}$ (соотв. $(\mu'_\beta)_{\beta \in B}$) мер с компактным носителем (§ 2, п. 3, предл. 4), записать формулу (10) для каждой меры $\mu_\alpha \otimes \mu'_\beta$ и просуммировать по (α, β), принимая во внимание предложение 1 (§ 2, п. 1, предл. 1).

Следствие 1. *В обозначениях предложения* 8 *имеем*:

$$\int\int^{*} f(t) f'(t')\, d\mu(t)\, d\mu'(t') =$$

$$= \left(\int^{*} f(t)\, d\mu(t)\right)\left(\int^{*} f(t')\, d\mu'(t')\right), \qquad (11)$$

кроме того случая, когда один из множителей в правой части равен 0, *а другой равен* $+\infty$.

Когда оба множителя в правой части конечны, функции f и f' модерантны (§ 1, п. 2, предл. 7), и значит, функция $f \otimes f'$ модерантна (следствие 2 из предл. 5) стало быть, указанное свойство сводится к формуле (10) (§ 1, п. 2, предл. 7). Когда один из множителей равен $+\infty$, а другой отличен от нуля, то правая часть равна $+\infty$, и равенство (11) следует из предложения 6.

Следствие 2. *Пусть f и f' — функции со значениями в* $\mathbf{C}$ *или в* $\overline{\mathbf{R}}$, *определенные соответственно на T и на T' и существенно интегрируемые* (соотв. *интегрируемые*) *относительно мер* μ *и* μ' *соответственно. Тогда функция $f \otimes f'$ существенно интегрируема* (соотв. *интегрируема*) *относительно меры* $\mu \otimes \mu'$, *и*

$$\int\int f(t)\, f'(t')\, d\mu(t)\, d\mu'(t') = \left(\int f(t)\, d\mu(t)\right)\left(\int f'(t')\, d\mu'(t')\right). \qquad (12)$$

Если f и f' положительны, то $f \otimes f'$ измерима в силу следствия 3 предложения 3, и утверждение вытекает из формулы (10) (соотв. (11)) и из критерия существенной интегрируемости (§ 1, п. 3, предл. 9) (соотв. из критерия интегрируемости, гл. IV, § 5, п. 6, теорема 5). Отсюда немедленно получается общий случай.

Следствие 2 сразу же распространяется на произведение двух комплексных мер.

4. *Интегрирование функций со значениями в банаховом пространстве*

Теорема 1 (Лебега — Фубини). *Пусть f — функция на $T \times T'$ со значениями в банаховом пространстве F или в* $\overline{\mathbf{R}}$; *и пусть N — множество тех $t \in T$, для которых функция $t' \mapsto f(t, t')$ не является μ'-интегрируемой*

а) *Предположим, что f ν-интегрируема; тогда N μ-пренебрежимо, функция $t \mapsto \int f(t, t')\, d\mu'(t')$ (определенная для $t \notin N$) μ-интегрируема и*

$$\int\int f(t, t')\, d\mu(t)\, d\mu'(t') = \int d\mu(t) \int f(t, t')\, d\mu'(t'). \qquad (13)$$

b) *Предположим, что f существенно ν-интегрируема и что мера μ' модерантна; тогда N локально μ-пренебрежимо, функция* $t \mapsto \int f(t, t')\, d\mu'(t')$ *(определенная для $t \notin N$) существенно μ'-интегрируема, и справедливо равенство* (13).

Утверждение a) вытекает сразу же из теоремы 1, § 3, п. 3. Чтобы доказать b), обозначим через g ν-интегрируемую функцию, равную f локально почти всюду, а через H — множество тех (t, t'), в которых $f(t, t') \neq g(t, t')$. В силу следствия 1 предложения 7 сечение $H(t)$ μ'-пренебрежимо, кроме тех $t \in T$, которые образуют локально μ-пренебрежимое множество. Стало быть, утверждение относительно f следует из a), примененного к g. ▮

Схолия. *Пусть f — функция на $T \times T$ со значениями в $\overline{\mathbf{R}}$ или в банаховом пространстве, ν-измеримая и ν-модерантная. Для того чтобы интегралы*

$$\int\int f(t, t')\, d\mu(t)\, d\mu'(t'),$$

$$\int d\mu(t) \int f(t, t')\, d\mu'(t'),$$

$$\int d\mu'(t') \int f(t, t')\, d\mu(t)$$

существовали и были равны между собой, необходимо и достаточно, чтобы одно из двух чисел

$$\int^* d\mu(t) \int^* |f(t, t')|\, d\mu'(t'), \qquad \int^* d\mu'(t') \int^* |f(t, t')|\, d\mu(t)$$

было конечно.

Это есть непосредственное следствие из теоремы 1, предложения 7 и критерия интегрируемости (гл. IV, § 5, п. 6 теорема 5).

Замечания. 1) Если мера μ' не является модерантной, то может оказаться, что f существенно ν-интегрируема, а функция $t \mapsto (t, t')$ не является μ'-интегрируемой ни при каком значении $t \in T$ (§ 3, упр. 4).

2) Пусть μ, μ' — комплексные меры и пусть $\nu = \mu \otimes \mu'$. Если f ν-интегрируема (иначе говоря, $|\nu|$-интегрируема), то применение теоремы к мерам $|\mu|$ и $|\mu'|$, произведение которых равно $|\nu|$ (гл. III (2-е изд.), § 4, п. 2, предл. 3), приводит к тому, что $t' \to f(t, t')$ μ'-ин-

тегрируема для μ-почти всех t. Отсюда, разбивая меры μ и μ′ на линейные комбинации положительных мер, получаем, что утверждение a) распространяется на комплексные меры. Точно так же рассуждаем и в случае b).

Предложение 9. *Пусть* F, F', G — *банаховы пространства и пусть* $(x, y) \mapsto |x \cdot y|$ — *непрерывное билинейное отображение* $F \times F'$ *в* G. *Пусть* f (соотв. f' — *функция на* T (соотв. T') *со значениями в* F (соотв. F'), *существенно интегрируемая относительно* μ (соотв. μ′). *Пусть, наконец,* g — *функция* $(t, t') \mapsto [f(t) \cdot f'(t')]$; *тогда* g *существенно интегрируема относительно* $\mu \otimes \mu'$, *и*

$$\int\int [f(t)\cdot f'(t')]\, d\mu(t)\, d\mu'(t') = \left[\left(\int f(t)\, d\mu(t)\right)\cdot\left(\int f'(t')\, d\mu'(t')\right)\right]. \qquad (14)$$

Если при этом f *и* f' *интегрируемы, то* g *интегрируема.*

Функция $(t, t') \mapsto [f(t) \cdot f'(t')]$ $(\mu \otimes \mu')$-измерима в силу следствия 1 предложения 3. С другой стороны, если b означает норму билинейного отображения $(x, y) \mapsto [x \cdot y]$, то согласно предложению 8

$$\int\int^{\bullet} |[f(t)\cdot f'(t')]|\, d\mu(t)\, d\mu'(t') \leqslant b\int\int^{\bullet} |f(t)|\cdot|f'(t')|\, d\mu(t)\, d\mu'(t') = b\left(\int^{\bullet} |f(t)|\, d\mu(t)\right)\left(\int^{\bullet} |f'(t')|\, d\mu'(t')\right).$$

Это показывает, что функция $[f(t) \cdot f'(t')]$ существенно интегрируема относительно $\mu \otimes \mu'$ (§ 1, п. 3, предл. 9). Предположим, что f и f' интегрируемы: тогда f и f' модерантны, g модерантна (следствие 2 предл. 5), и значит, интегрируема (§ 1, п. 3, следствие предл. 9). В этом случае формула (14) вытекает из теоремы Лебега — Фубини и линейности интеграла (гл. IV, § 4, п. 2, теорема 1). Чтобы завершить теперь изучение случая, когда f и f' существенно интегрируемы, применим (14) к интегрируемым функциям f_1 и f_1', равным локально почти всюду f и f', заметив, что $[f \cdot f'] = [f_1 \cdot f_1']$ локально почти всюду на $T \times T'$ (предл 4)

Этот результат сразу же распространяется на произведение двух комплексных мер.

5. Операции над произведением двух мер

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10. *Пусть* g (соотв. g') — *комплексная функция* (*или функция со значениями в* $\overline{\mathbf{R}}$), *определенная на* T (соотв. T').

a) *Если* g (соотв. g') *локально интегрируема относительно* μ (соотв. μ'), *то функция* $g \otimes g'$: $(t, t') \mapsto g(t)\, g'(t')$ *локально интегрируема относительно* $\nu = \mu \otimes \mu'$, *и*

$$(g \cdot \mu) \otimes (g' \cdot \mu') = (g \otimes g') \cdot (\mu \otimes \mu'). \tag{15}$$

b) *Обратно, если* $g \otimes g'$ *локально* ν-*интегрируема и если* g' *не является локально* μ'-*пренебрежимой, то* g *локально* μ-*интегрируема.*

a Пусть K и K' — компактные подмножества из T и T' соответственно; следствие 2 предложения 8 показывает, что функция $(t, t') \mapsto g(t\ g'(t')\, \varphi_{K \times K'}(t, t')$, равная $(g\varphi_K) \otimes (g'\varphi_{K'})$, ν-интегрируема. Следовательно, $g \otimes g'$ локально ν-интегрируема. Тогда правая часть в (15) удовлетворяет характеристическому свойству мер-произведений (гл. III, § 5, п. 1, теорема 1).

b) Предположим теперь, что $g \otimes g'$ локально ν-интегрируема и что g' не является локально μ'-пренебрежимой. Пусть μ_1 — такая положительная мера с компактным носителем, что $\mu_1 \leqslant \mu$; поскольку $g \otimes g'$ $(\mu_1 \otimes \mu')$-измерима, то $t \mapsto g(t)\, g'(t')$ μ_1-измерима всюду, кроме локально μ'-пренебрежимого множества значений t' (предл. 2). А так как g' не является нулевой локально μ'-почти всюду, то из этого выводим, что g μ_1-измерима, а затем, разбивая μ на сумму семейства мер к компактным носителем (§ 2, п. 3, предл. 4 и 2, п. 2, предл. 2), что g μ-измерима. Установив это, мы можем свести все к случаю, когда $g \geqslant 0$ и $g' \geqslant 0$, заменив g и g' в случае необходимости их абсолютными значениями. Пусть K — произвольный компакт из T и K' — такой компакт из T', что $\int g' \varphi_{K'}\, d\mu' \neq 0$. Согласно предложению 8

$$\left(\int^{\bullet} g\, \varphi_K\, d\mu\right)\left(\int^{\bullet} g' \varphi_{K'}\, d\mu'\right) = \int\int^{\bullet} (g \otimes g')\, \varphi_{K \times K'}\, d\mu\, d\mu' < +\infty.$$

Значит, первый сомножитель в левой части конечен, чем и завершается доказательство.

Это предложение в силу предложения 3, гл. III (2-е изд.), § 4, п. 2 распространяется на комплексные меры.

Предложение 11. *Пусть* π (соотв. π') — *отображение* T (соотв. T') *в локально компактное пространство* T_1 (соотв. T'_1).

a) *Если* π (соотв. π') μ-*собственно* (соотв. μ'-*собственно*), *то отображение* $\pi \times \pi'$ $(\mu \otimes \mu')$-*собственно*,

$$u(\pi \times \pi')(\mu \otimes \mu') = \pi(\mu) \otimes \pi'(\mu').$$

b) *Обратно, если* $\pi \times \pi'$ $(\mu \otimes \mu')$-*собственно и* $\mu' \neq 0$, *то* π μ-*собственно.*

a) В самом деле, $\pi \times \pi'$ $(\mu \otimes \mu')$-измеримо в силу следствия 1 предложения 3, п. 2. С другой стороны, если K (соотв. K') есть компактное подмножество из T_1 (соотв. T'_1), то $\pi^{-1}(K)$ и $\pi'^{-1}(K')$ существенно интегрируемы соответственно относительно μ и μ'; стало быть, $\pi^{-1}(K) \times \pi'^{-1}(K')$ существенно интегрируемо относительно $\mu \otimes \mu'$ (следствие 2 предл. 8). Это показывает, что $\pi \times \pi'$ $(\mu \otimes \mu')$-собственно. Пусть теперь $\mu_1 = \pi(\mu)$, $\mu'_1 = \pi'(\mu')$, $\nu_1 = (\pi \times \pi')(\mu \otimes \mu')$; для $f \in \mathscr{K}(T_1)$ и $f' \in \mathscr{K}(T'_1)$ имеем

$$\int\int f(\pi(t))\, f'(\pi'(t'))\, d\mu(t)\, d\mu'(t') =$$

$$= \left(\int f(\pi(t))\, d\mu(t)\right)\left(\int f'(\pi'(t'))\, d\mu'(t')\right)$$

(следствие 2 предл. 8), чем и доказано, что $\nu_1 = \mu_1 \otimes \mu'_1$ (гл. III (2-е изд.), § 4, п. 1, теорема 1).

b) Предположим теперь, что $\pi \times \pi'$ $\mu \otimes \mu'$-собственно и что $\mu' \neq 0$. Пусть μ_1 — мера с компактным носителем, мажорированная мерой μ. Поскольку функция $\pi \times \pi'$ измерима относительно $\mu_1 \otimes \mu'$, то отображение $(\pi(t), \pi'(t'))$ μ-измеримо всюду, кроме тех t', которые образуют локально μ'-пренебрежимое множество (п. 2, предл. 2). А так как $\mu' \neq 0$, то отсюда следует, что π μ_1-измеримо, и окончательно, что π μ-измеримо (§ 2, п. 3, предл. 4 и § 2, п. 2 предл. 2). Остается показать, что $\mu^*(f \circ \pi) < +\infty$ для любой функции $f \in \mathscr{K}_+(T_1)$. Если μ — нулевая мера, то это очевидно. Если же μ — ненулевая, то ненулевой будет и $\mu \otimes \mu'$, а значит, $(\pi \times \pi')(\mu \otimes \mu') \neq 0$ (§ 6, п. 2, предл. 2). Согласно лемме 1 гл. III (2-е изд.), § 4 найдутся такие функции $g \in \mathscr{K}_+(T_1)$, $g' \in \mathscr{K}_+(T'_1)$, что

$$\langle (\pi \times \pi')(\mu \otimes \mu'),\ g \otimes g' \rangle \neq 0.$$

А поскольку это выражение по определению мер-образов равно $(\mu \otimes \mu', (g \circ \pi) \otimes (g' \circ \pi'))$, то предложение 8 влечет, что $\mu'^{\bullet}(g' \circ \pi') \neq 0$. Тогда в силу предложения 8 и предложения 2, § 6, п. 2

$$\left(\int^{\bullet} (f \circ \pi)\, d\mu\right)\left(\int^{\bullet} (g' \circ \pi')\, d\mu'\right) = \int\int^{\bullet} (f \circ \pi) \otimes (g' \circ \pi')\, d\mu\, d\mu' =$$

$$= \int\int^{\bullet} (f \otimes g')\, d((\pi \times \pi')(\mu \otimes \mu')) < +\infty.$$

Стало быть, первый интеграл в левой части конечен, чем и завершается доказательство.

Этот результат сразу же распространяется на произведение двух комплексных мер (применить предложение к их абсолютным значениям). То же самое справедливо и относительно следующего предложения.

Предложение 12. *Пусть* X (соотв. X') — *локально компактное подпространство пространства* T (соотв. T'). *Тогда мера* $(\mu \otimes \mu')_{X \times X'}$, *индуцированная на локально компактном подпространстве* $X \times X'$ *пространства* $T \times T'$, *равна произведению* $\mu_X \otimes \mu'_{X'}$ *мер, индуцированных на* X *и* X' *соответственно мерами* μ *и* μ'.

В самом деле, если

$$f \in \mathscr{K}(X) \text{ и } f' \in \mathscr{K}(X'),$$

то

$$\int\limits_{X \times X'}\int f(t) f'(t')\, d\mu(t)\, d\mu'(t') = \left(\int\limits_X f(t)\, d\mu(t)\right)\left(\int\limits_{X'} f'(t')\, d\mu'(t')\right)$$

согласно следствию 2 предложения 8, чем показано, по определению индуцированной меры (гл. IV (2-е изд.), § 5, п. 7), что

$$(\mu \otimes \mu')_{X \times X'} = \mu_X \otimes \mu'_{X'}$$

(гл. III (2-е изд.), § 4, п. 1, теорема 1).

6. *Интегрирование относительно конечного произведения мер*

Предыдущие результаты без труда распространяются на произведение конечного числа мер. Пусть, например, T_1, T_2, T_3 — локально компактные пространства, μ_i — положительная мера на T_i $(i = 1, 2, 3)$ и $\nu = \mu_1 \otimes \mu_2 \otimes \mu_3$ — мера-произведение

на $T = T_1 \times T_2 \times T_3$. И пусть f — ν-интегрируемая функция со значениями в $\mathbf{R}$ или в банаховом пространстве; простое применение теоремы Лебега — Фубини показывает, что функция $t_3 \mapsto f(t_1, t_2, t_3)$ μ_3-интегрируема всюду, кроме точек $(t_1, t_2) \in T_1 \times T_2$, образующих пренебрежимое множество (относительно $\mu_1 \otimes \mu_2$), что функция

$$(t_1, t_2) \mapsto \int f(t_1, t_2, t_3)\, d\mu_3(t_3),$$

определенная почти всюду на $T_1 \times T_2$, $(\mu_1 \otimes \mu_2)$-интегрируема и что

$$\int\int\int f(t_1, t_2, t_3)\, d\nu(t_1, t_2, t_3) = \int\int d\mu_1(t_1)\, d\mu_2(t_2) \int f(t_1, t_2, t_3)\, d\mu_3(t_3).$$

Повторное применение той же теоремы показывает, что для почти всех $t_1 \in T_1$ функция

$$t_2 \mapsto \int f(t_1, t_2, t_3)\, d\mu_3(t_3)$$

определена почти всюду на T_2 и μ_2-интегрируема; кроме того, функция

$$t_1 \mapsto \int d\mu_2(t_2) \int f(t_1, t_2, t_3)\, d\mu_3(t_3),$$

определенная почти всюду на T_1, μ_1-интегрируема и

$$\int\int\int f(t_1, t_2, t_3)\, d\nu(t_1, t_2, t_3) = \int d\mu_1(t_1) \int d\mu_2(t_2) \int f(t_1, t_2, t_3)\, d\mu_3(t_3).$$

Точно так же доказывается, что для почти всех $t_1 \in T_1$ функция $(t_2, t_3) \mapsto f(t_1, t_2, t_3)$ $(\mu_2 \otimes \mu_3)$-интегрируема, что функция

$$t_1 \mapsto \int\int f(t_1, t_2, t_3)\, d\mu_2(t_2)\, d\mu_3(t_3),$$

определенная почти всюду, μ_1-интегрируема и что

$$\int\int\int f(t_1, t_2, t_3)\, d\nu(t_1, t_2, t_3) = \int d\mu_1(t_1) \int\int f(t_1, t_2, t_3)\, d\mu_2(t_2)\, d\mu_3(t_3).$$

Мы предоставляем читателю обобщение тем же способом других результатов, доказанных выше для произведения двух мер.

7. *Приложение: Мера евклидова шара в* $\mathbf{R}^n$

Пусть μ — мера Лебега на $\mathbf{R}$, а μ_n — мера Лебега на $\mathbf{R}^n$ — произведение n множителей, равных μ. Зададимся целью вычислить меру

$$V_n = \mu_n(B_n)$$

единичного евклидова шара. Согласно следствию 2 предложения 7

$$V_n = \int_{-1}^{+1} \mu_{n-1}(B_n(z_n))\, dz_n. \tag{16}$$

Сечение $B_n(z_n)$ есть подмножество из $\mathbf{R}^{n-1}$, определенное соотношением

$$\sum_{i=1}^{n-1} z_i^2 \leqslant 1 - z_n^2,$$

или, иными словами, это множество, полученное из шара B_{n-1} посредством гомотетии с коэффициентом $\sqrt{1-z_n^2}$. Но из предложения 11 и формулы

$$\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z)\, dz,$$

справедливой для $f \in \mathscr{K}(\mathbf{R})$, следует, что образ меры μ_{n-1} при гомотетии $x \mapsto \alpha x$ есть мера $\alpha^{1-n}\mu_{n-1}$. Следовательно,

$$\mu_{n-1}(B_n(z_n)) = \left(\sqrt{1-z_n^2}\right)^{n-1} V_{n-1}.$$

Перейдя к (16) и сделав замену переменного $z_n = \sin\varphi$ (при $-\pi/2 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$), получим:

$$V_n = V_{n-1} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos^n\varphi\, d\varphi = 2V_{n-1} \int_0^{\pi/2} \cos^n\varphi\, d\varphi. \tag{17}$$

Но мы знаем (Функции действ. перем., гл. VII, § 1, п. 3, формула (20)), что

$$\int_0^{\pi/2} \cos^m\varphi\, d\varphi = \frac{1}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+2}{2}\right)};$$

подставляя в (17) и принимая во внимание выражение для $\Gamma(1/2)$ (Функции действ. перем., гл. VII, § 1, п. 3, формула (21)), получаем окончательно:

$$V_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)}. \tag{18}$$

Упражнения

1) Пусть T и T' — локально компактные пространства, μ — положительная мера на T и μ' — положительная мера на T'. Показать, что если μ' ограничена, то проекция pr_1 произведения $T \times T'$ на T есть $(\mu \otimes \mu')$-собственное отображение и $\mathrm{pr}_1(\mu \otimes \mu') = a \cdot \mu$, где $a = \mu'(T')$. Получить отсюда пример $(\mu \otimes \mu')$-пренебрежимого подмножества из $T \times T'$, проекция которого на T не является μ-измеримой.

2) Пусть T — интервал $[0, 1]$ из $\mathbf{R}$, наделенный топологией, индуцированной топологией $\mathbf{R}$, и T'-интервал $[0, 1]$ из $\mathbf{R}$, наделенный дискретной топологией; пусть, далее, μ есть мера Лебега на T, μ' есть дискретная мера на T', определенная при помощи массы $+1$ в каждой точке из T', и $\nu = \mu \otimes \mu'$ есть мера-произведение на

$$X = T \times T'.$$

a) Для любого $t \in T$ множество $\{t\}$ μ'-пренебрежимо, но множество $\{t\} + T'$ не ν-пренебрежимо.

b) «Диагональ» Δ из $T \times T'$ (множество точек (t, t), где t пробегает интервал $[0, 1]$), есть такое замкнутое в $T \times T'$ локально ν-пренебрежимое, но не ν-пренебрежимое множество, что для любого $t \in T$ справедливо равенство $\mu'(\Delta(t)) = 1$, а для любого $t' \in T'$ — равенство $\mu(\Delta^{-1}(t')) = 0$ (ср. § 3, упр. 3).

c) Рассмотрим на пространстве $X \times X = Y$ меру-произведение $\rho = \nu \otimes \nu$. Показать, что в Y существует такое локально ρ-пренебрежимое множество A, что для любого $x \in X$ множества $A(x)$ и $A^{-1}(x)$ ν-измеримы, но не локально пренебрежимы. (Если $x = (t, t')$, где $t \in T$, а $t' \in T$, то определить A, так, чтобы $A(x)$ содержало все точки $(s, t) \in X$, где $0 \leqslant s \leqslant 1$.)

3) Пусть T — локально компактное пространство, μ-положительная мера на T и $f \geqslant 0$ — числовая функция на T. В пространстве-произведении $T \times \mathbf{R}_+$ через D_f обозначим множество тех точек (t, x), для которых $0 \leqslant x \leqslant f(t)$; с другой стороны, пусть ν — мера Лебега на $\mathbf{R}_+$.

a) Показать, что для того чтобы f была μ-измерима, необходимо и достаточно, чтобы множество D_f было измеримо относительно меры-произведения $\lambda = \mu \otimes \nu$. (Для доказательства необходимости показать, что если f μ-измерима, то для любого компактного подмножества K из T множество $D_f \cap (K \times \mathbf{R}_+)$ является объединением λ-пренебрежимого множества и счетного семейства множеств вида $A \times I$, где A есть μ-измеримое множество, а I — интервал из $\mathbf{R}_+$. Для доказательства достаточности показать, что если условие выполнено, то для любого компактного подмножества K из T найдется такое всюду плотное множество $H \in \mathbf{R}_+$, что при любом $\alpha \in H$ множество

$$K \cap f^{-1}([\alpha, +\infty])$$

μ-измеримо; воспользоваться для этого следствием 2 из предл. 7.)

b) Показать, что для μ-интегрируемости функции f необходимо и достаточно, чтобы множество D_f было λ-интегрируемо, и тогда $\lambda(D_f) = \int f\,d\mu$. Кроме того, если через g обозначена убывающая числовая функция на $\mathbf{R}_+$, определяемая равенством

$$g(t) = \mu(f^{-1}([t, +\infty]))$$

(и, возможно, равная $+\infty$ при $t = 0$), то

$$\int f\,d\mu = \int_0^{+\infty} g(t)\,dt.$$

4) a) Пусть T, T' — локально компактные пространства, счетные в бесконечности, μ — положительная мера на T и μ' — положительная мера на T'. Показать, что для любого $(\mu \otimes \mu')$-измеримого отображения f пространства $T \times T'$ в $\mathbf{R}$ функция

$$F: t \mapsto \int^* |f(t, t')|\,d\mu'(t')$$

μ-измерима (рассмотреть T' как объединение возрастающей последовательности компактных множеств).

b) Предположим, кроме того, что для почти всех $t \in T$ (относительно μ) функция $f(t, \cdot)$ μ'-интегрируема и что для почти всех $t' \in T'$ (относительно μ') функция $f(\cdot, t)$ μ-интегрируема; наконец, предположим, что функция (определенная почти всюду относительно μ)

$$t \mapsto \int f(t, t')\,d\mu'(t')$$

μ-интегрируема. Показать, что при этих условиях функция (определенная почти всюду относительно μ')

$$t' \mapsto \int f(t, t')\,d\mu(t)$$

μ'-интегрируема и что

$$\int d\mu'(t') \int f(t, t')\,d\mu(t) = \int d\mu(t) \int f(t, t')\,d\mu'(t').$$

(В силу a) найдется разбиение T, состоящее из μ-пренебрежимого множества N и такой последовательности (K_n) компактных множеств, что каждая из функций $f\varphi_{K_n \times T'}$ $(\mu \otimes \mu')$-интегрируема. Положить

$$g_n(t') = \sum_{j=1}^{n} \int_{K_j} f(t, t')\,d\mu(t)$$

и применить упр. 20, § 5.)

c) Пусть T — интервал $[0, 1]$ из $\mathbf{R}$, из μ — мера Лебега на T. Пусть, далее, для любого целого $n > 0$

$$A'_n = \left[\frac{1}{2^n}, \frac{3}{2^{n+1}}\right[, \quad A''_n \left[\frac{3}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^{n-1}}\right[$$

и пусть в пространстве $T \times T$

$$B'_n = A'_n \times A'_n, \quad B''_n = A''_n \times A''_n,$$
$$C'_n = A'_n \times A''_n, \quad C''_n = A''_n \times A'_n.$$

Положим $f(t, t') = 4^{n+1}$ на B'_n, и B''_n, $f(t,t') = -4^{n+1}$ на C'_n и C''_n при любом целом $n > 0$ и $f(t, t') = 0$ в остальных точках из $T \times T'$. Показать, что

$$\int d\mu(t') \int f(t, t')\, d\mu(t) \quad \text{и} \quad \int d\mu(t) \int f(t, t')\, d\mu(t')$$

определены и равны между собой и, однако, функция f не интегрируема относительно меры $\mu \otimes \mu$.

°5) Пусть T и T' — локально компактные пространства, μ — положительная мера на T и μ' — положительная мера на T'; предположим, что любое компактное подмножество из T метризуемо. Пусть, далее, f — такое отображение $T \times T'$ в метризуемое пространство G, что: 1) при любом $t \in T$ отображение $t' \mapsto f(t, t')$ μ'-измеримо; 2) при любом $t' \in T'$ отображение $t \mapsto f(t, t')$ непрерывно. Показать, что при этих условиях отображение f $(\mu \otimes \mu')$-измеримо. (Заметить, что для любого компактного подмножества K из T сужение функции f на $K \times T'$ служит пределом для некоторой последовательности $(\mu \otimes \mu')$-измеримых функций.)

°6) a) Пусть T — локально компактное пространство, ν — положительная мера на T, I — интервал из $\mathbf{R}$ и μ — положительная мера на I. Далее, пусть A — такое подмножество произведения $I \times T$, что: 1) при любом $x \in I$ сечение $A(x) \subset T$ множества A в x ν-измеримо; 2) отношение $x \leqslant y$ влечет $A(x) \subset A(y)$. Показать, что A $(\mu \otimes \mu)$-измеримо. (Свести к случаю, когда I и T компактны, а μ — непрерывная мера; рассмотреть такую возрастающую последовательность $(x_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ точек из I с концами x_0 и x_n, что $\mu([x_i, x_{i+1}]) \leqslant \varepsilon$ при $0 \leqslant i \leqslant n-1$, и выбрать в $I \times T$ два подмножества B и C, измеримые относительно $\lambda = \mu \otimes \nu$ и такие, что

$$B \subset A \subset C$$

и

$$\lambda(C - B) \leqslant \varepsilon \nu(T).)$$

b) Вывести из a), что если f есть такая числовая функция на $I \times T$, что: 1) для каждого $x \in I$ функция $t \mapsto f(x, t)$ ν-измерима; 2) для каждого $t \in T$ функция $x \mapsto f(x, t)$ возрастает, то f $(\mu \otimes \nu)$-измерима.

c) Пусть g — такая числовая функция на $I \times T$, что : 1) для каждого $x \in I$ функция $t \mapsto g(x, t)$ ν-измерима; 2) для каждого $t \in T$ функция $x \mapsto g(x, t)$ монотонна. Вывести из b), что g $(\mu \otimes \nu)$-изме-

рима. (Пусть $T_1 \subset T$ — множество тех $t \in T$, для которых отображение $x \mapsto g(x, t)$ возрастает; показать, что T_1 ν-измеримо. Для этого любой паре (r_1, r_2) рациональных чисел $r_1 \leqslant r_2$ из I сопоставить множество D_{r_1, r_2} тех точек $t \in T$, для которых

$$g(r_1, t) \leqslant g(r_2, t),$$

и выразить T_1 в виде пересечения множеств D_{r_1, r_2}.)

°7) a) Пусть T и T' — локально компактные пространства и пусть T' имеет счетный базис. Далее, пусть μ — положительная мера на T и μ' — положительная мера на T'. И наконец, пусть $f \geqslant 0$ — числовая функция на $T \times T'$, ограниченная на любом компактном подмножестве из $T \times T'$ и такая, что: 1) для почти всех $t \in T$ функция $t' \mapsto f(t, t')$ μ'-измерима; 2) для любой функции $h \in \mathscr{K}(T')$ функция

$$t \mapsto \int f(t, t)\, h(t')\, d\mu'(t'),$$

определенная почти всюду, μ-измерима. Показать, что при этих условиях существует такая измеримая относительно $\mu \otimes \mu'$ функция g, что для почти всех $t \in T$ равенство $f(t, t') = g(t, t')$ имеет место всюду, кроме некоторого (зависящего от t) μ'-пренебрежимого множества A_t. (Показать, что для любой функции $\varphi \in \mathscr{K}(T \times T')$ функция $t' \mapsto f(t, t')\varphi(t, t')$ μ'-интегрируема для почти всех $t \in T$ и что функция

$$t \mapsto \int f(t, t')\varphi(t, t')\, d\mu'(t'),$$

определенная почти всюду, μ-интегрируема; использовать лемму 1, гл. III, (2-е изд.), § 4, п. 1. Затем заметить, что

$$\varphi \mapsto \int d\mu(t) \int f(t, t')\varphi(t, t')\, d\mu'(t')$$

есть положительная мера на $T \times T'$, имеющая базис $\mu \otimes \mu'$ и применить теорему Лебега — Никодима; наконец, воспользоваться тем фактом, что в $\mathscr{K}(T')$ существует счетное всюду плотное множество.)

b) Предположим, кроме того, что T метризуемо. Показать, что условия из a) будут выполнены, если: 1) для почти всех $t' \in T'$ функция $t \mapsto f(t, t')$ μ-измерима; 2) для почти всех $t \mapsto T$ функция $t' \mapsto f(t, t')$ непрерывна почти всюду (относительно μ'). (Использовать упр. 13, гл. IV, § 5.)

c) Возьмем $T = T' = [0, 1]$ и примем гипотезу континуума (Теор. мн., гл. III, § 6, п. 4). Пусть $x \prec y$ есть отношение полного упорядочения в T, при котором не существует наибольшего элемента и при котором для любого $x \in T$ множество элементов $z \prec x$ счетно. Показать, что если в качестве $\mu = \mu'$ взять меру Лебега, то характеристическая функция f множества тех пар (t, t'), в которых $t \prec t'$, удовлетворяет условиям из a), но в то же время $\int f(t, t')\, d\mu(t) = 0$

при любом $t' \in T$ и

$$\int f(t, t')\, d\mu'(t') = 1$$

при любом $t \in T$.

8) Пусть T — локально компактное пространство, μ — ненулевая положительная мера на T, A — дискретное пространство и λ — мера на A, определенная при помощи массы $+1$ в каждой точке из A.

a) Для того чтобы отображение f произведения $A \times T$ в топологическое пространство было $(\lambda \otimes \mu)$-измеримо, необходимо и достаточно, чтобы при любом $\alpha \in A$ отображение $t \mapsto f(\alpha, t)$ было μ-измеримо.

b) Для того чтобы функция f, определенная на $A \times T$ и принимающая значения в $\overline{\mathbf{R}}$ или в банаховом пространстве, была $(\lambda \otimes \mu)$-интегрируема, необходимо и достаточно, чтобы: 1) функция $t \mapsto f(\alpha, t)$ всюду, кроме счетного множества значений $\alpha \in A$, обращалась тождественно в нуль; 2) для любого $\alpha \in A$ функция $t \mapsto f(\alpha, t)$ была μ-интегрируема; 3) выполнялось условие

$$\sum_{\alpha \in A} \int |f(\alpha, t)|\, d\mu(t) < +\infty.$$

Для того чтобы f была существенно $(\lambda \otimes \mu)$-интегрируема, необходимо и достаточно, чтобы: 1) для каждого $\alpha \in A$ функция $t \mapsto f(\alpha, t)$ была существенно μ-интегрируема; 2) выполнялось условие

$$\sum_{\alpha \in A} \int |f(\alpha, t)|\, d\mu(t) < +\infty;$$

тогда

$$\int\int f\, d\lambda\, d\mu = \sum_{\alpha \in A} \int f(\alpha, t)\, d\mu(t).$$

c) Пусть X — локально компактное пространство и $(\alpha, t) \mapsto \rho_{\alpha,t}$ — семейство положительных мер на X $(\alpha \in A,\ t \in T)$. Для того чтобы семейство $(\alpha, t) \mapsto \rho_{\alpha,t}$ было $(\lambda \otimes \mu)$-согласовано, необходимо и достаточно, чтобы при любом $\alpha \in A$ семейство $t \mapsto \rho_{\alpha,t}$ было μ-согласовано и чтобы семейство мер

$$\left(\int \rho_{\alpha,t}\, d\mu(t)\right)_{\alpha \in A}$$

было суммируемо.

9) Пусть u и v — возрастающие функции, непрерывные справа на $\mathbf{R}$ и такие, что $u(x) = v(x) = 0$ для $x < 0$. Пусть, далее, w — возрастающая функция, непрерывная справа на $\mathbf{R}$ и заданная соотношениями: $w(t) = u(t)\, v(t)$ для $t \geqslant 0$ и $w(t) = -u(t)\, v(t)$ для $t < 0$; пусть λ, μ и ν — меры Стилтьеса, отвечающие, соответственно, функциям u, v и w (§ 6, упр. 5).

Всякой функции f на $\mathbf{R}$ со значениями в $\overline{\mathbf{R}}$ или в банаховом пространстве F поставим в соответствие функцию $\bar{f}$, определенную на $\mathbf{R}^2$ условиями: $\bar{f}(x, y) = f(x)$, если $y < x$, и $\bar{f}(x, y) = f(y)$, если $y \geqslant x$. Показать, что для того чтобы f была ν-интегрируема, необходимо и достаточно, чтобы $\bar{f}$ была интегрируема относительно меры-произведения $\lambda \otimes \mu$ и что тогда

$$\int f d\nu = \int\int \bar{f}\, d\lambda\, d\mu$$

(сначала доказать это для характеристических функций интервалов). Вывести отсюда формулу

$$\int f(x)\, du(x) = \int f(x)\, v(x-)\, du(x) + \int f(x)\, u_s'(x+)\, dv(x).$$

В частности, если u и v непрерывны на $\mathbf{R}$, то имеет место формула интегрирования по частям:

$$\int_a^b u(x)\, dv(x) = u(b)\, v(b) - u(a)\, v(a) - \int_a^b v(x)\, du(x).$$

10) Пусть T и X — локально компактные пространства, λ — положительная мера на T и μ — такая ограниченная положительная мера на X, что $\mu(X) = 1$. Пусть, далее, $f > 0$ есть числовая функция на $T \times X$, интегрируемая вместе с функцией $\log f$ относительно меры $\lambda \otimes \mu$. Доказать неравенство

$$\log\left(\int \exp\left(\int \log f\, d\mu\right) d\lambda\right) \leqslant \int \left(\log \int f\, d\lambda\right) d\mu$$

и показать, что неравенство может достигаться лишь для функции f, эквивалентной функции вида $g \otimes h$ (применить неравенство для среднего геометрического (гл. IV, § 6, упр. 7d)) при всех $t \in T$ к функции

$$x \longmapsto f(t, x) \Big/ \int f(t, x)\, d\lambda(t)).$$

11) Пусть $p \geqslant 1$ — конечное действительное число, T и X — локально компактные пространства, λ — положительная мера на T, μ — положительная мера на X и $f \geqslant 0$ — функция на $T \times X$, интегрируемая вместе с f^p относительно меры $\lambda \otimes \mu$. Доказать неравенство

$$\left(\int^* \left(\int f\, d\mu\right)^p d\lambda\right)^{1/p} \leqslant \int^* \left(\int f^p\, d\lambda\right)^{1/p} d\mu.$$

(При каждом $t \in T$ применить неравенство Гёльдера к функции $x \mapsto f(t, x)$, заданной соотношением

$$f(t, x) = g(t, x) \left(\int f^p(t, x)\, d\lambda(t) \right)^{1/(pq)},$$

где q — показатель, сопряженный с p.) Показать, что равенство может достигаться лишь для функции f, эквивалентной функции вида $g \otimes h$.

°12) Пусть T_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ — локально компактные пространства и μ_i — положительная мера на T_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Для каждого индекса i через E_i обозначим произведение $\prod_{j \neq i} T_j$; пусть $f_i \geqslant 0$ — функция, измеримая относительно $\mu = \bigotimes_{i=1}^{n} \mu_i$ на $T = \prod_{i=1}^{n} T_i$ и *не зависящая* от t_i; показать, что если для $1 \leqslant k \leqslant n$ функция f_k^{n-1} интегрируема относительно меры $\mu_1 \otimes \ldots \otimes \mu_{k-1} \otimes \mu_{k+1} \otimes \ldots \otimes \mu_n$, то функция $f_1 f_2 \ldots f_n$ μ-интегрируема и

$$\int f_1 f_2 \ldots f_n \, d\mu_1 \, d\mu_2 \ldots d\mu_n \leqslant \left(\prod_{k=1}^{n} J_k \right)^{1/(n-1)},$$

где для каждого индекса k

$$J_k = \int f_k^{n-1} d\mu_1 \ldots d\mu_{k-1} \, d\mu_{k+1} \ldots d\mu_n$$

(провести индукцию по n, применив теорему Лебега — Фубини и неравенство Гёльдера).

Вывести отсюда, что если A есть μ-измеримое подмножество из T, A_i — его проекция на E_i и если A_i интегрируемо и имеет меру m_i (относительно меры $\bigotimes_{j \neq i} \mu_j$ на E), то A μ-интегрируемо и

$$\mu(A) \leqslant (m_1 m_2 \ldots m_n)^{1/(n-1)}.$$

Выявить случай равенства в этих двух неравенствах.

Обобщить на случай, когда вместо n произведений из $n - 1$ пространств T_i рассматривается $\binom{n}{p}$ произведений из p пространств T_i и когда на T интегрируется произведение $\binom{n}{p}$ положительных функций, каждая из которых зависит только от p переменных t_i. Например, показать, что если $F_{ij} = T_i \times T_j$ $(i < j)$ и если f_{ij} зависит лишь от переменных t_i, t_j, то

$$\int \left(\prod_{i<j} f_{ij} \right) d\mu_1 \, d\mu_2 \ldots d\mu_n \leqslant \left(\prod_{i<j} \int f_{ij}^{n-1} \, d\mu_i \, d\mu_j \right)^{1/(n-1)}.$$

°13) Пусть $(T_\iota)_{\iota\in I}$ — семейство компактных пространств и пусть для каждого $\iota \in I$ через μ_ι обозначена положительная мера на T_ι с полной массой, равной 1. Пусть T есть пространство-произведение $\prod_{\iota\in I} T_\iota$ и μ есть мера-произведение $\bigotimes_{\iota\in I} \mu_\iota$ на T (гл. III (2-е изд.), § 4. п. 5).

a) Пусть для любого $\iota \in I$ через K_ι обозначено компактное подмножество из T_ι; показать, что если

$$K = \prod_{\iota\in I} K_\iota, \text{ то } \mu(K) = \prod_{\iota\in I} \mu_\iota(K_\iota).$$

b) Пусть M — компактное подмножество из T и $\mu(M) > 0$. Показать, что существует такое *счетное* подмножество J из I, что если положить

$$H = I - J, \quad T_J = \prod_{\iota\in J} T_\iota,$$

$$\mu_J = \bigotimes_{\iota\in J} \mu_\iota, \quad T_H = \prod_{\iota\in H} T_\iota,$$

то

$$M \subset N \times T_H,$$

где N есть μ_J-измеримое подмножество из T_J, удовлетворяющее равенству $\mu_J(N) = \mu(M)$. (Заметить, что для любого $n > 0$ существует открытая окрестность множества M, являющаяся объединением конечного числа элементарных множеств, имеющих меру, отличающуюся от $\mu(M)$ менее чем на $1/n$.) Вывести отсюда, что для почти всех $x \in N$ сечение $\mathscr{M}(x) \subset T_H$ (если отождествить T с произведением $T_J \times T_H$) содержит произведение носителей мер μ_ι для $\iota \in H$ (воспользоваться теоремой Лебега — Фубини).

c) Показать, что если I *счетно* и если для любого $\iota \in I$ A_ι есть μ_ι-измеримое подмножество из T_ι, то множество $A = \prod_{\iota\in I} A_\iota$ μ-измеримо и

$$\mu(A) = \prod_{\iota\in I} \mu_\iota(A_\iota).$$

d) Предположим, что I несчетно. Пусть для любого $\iota \in I$ через A_ι обозначено μ_ι-измеримое подмножество из T_ι. Для того чтобы $A = \prod_{\iota\in I} A_\iota$ было μ-измеримо, необходимо и достаточно, чтобы имел место один из следующих двух случаев: 1) $\prod_{\iota\in I} \mu_\iota(A_\iota) = 0$; 2) A_ι содержит носитель меры μ_ι для всех индексов ι, кроме, быть может, некоторого счетного подмножества из I. В каждом из двух случаев имеем $\mu(A) = \prod_{\iota\in I} \mu_\iota(A_\iota)$. (Предположив, что ни один из этих случаев

не выполняется, показать, что тогда можно ограничиться рассмотрением случая, когда $\mu_\iota(A_\iota) = 1$ при любом $\iota \in I$. Используя b), показать, что ни A, ни $T - A$ не могут содержать компактное множество с ненулевой мерой.)

°14) Пусть K — интервал $[0, 1]$ из $\mathbf{R}$, λ — мера Лебега на K, A — несчетное множество и μ — мера на $T = K^A$, являющаяся произведением мер λ на каждом из сомножителей.

a) Показать, что всякое замкнутое *метризуемое* подпространство X пространства T μ-пренебрежимо (использовать упр. 13b) и упр. 11 из Общ. топ., гл. IX, § 2).

b) Пусть Y — локально компактное пространство со счетным базисом, ν — положительная мера на Y и π — ν-собственное отображение Y в T. Показать, что образ $\pi(\nu)$ сингулярен к μ (используя a), показать, что мера $\pi(\nu)$ сосредоточена на μ-пренебрежимом множестве).

15) Пусть $(T_\iota)_{\iota \in I}$ — произвольное семейство компактных пространств и пусть для каждого $\iota \in I$ через μ_ι обозначена положительная мера на T_ι с полной массой 1; пусть, далее, μ есть мера-произведение $\bigotimes_{\iota \in I} \mu_\iota$ на $T = \prod_{\iota \in I} T_\iota$. Для любого разбиения (L, M) множества I на два множества отождествим T с произведением $T_L \times T_M$, где $T_L = \prod_{\iota \in L} T_\iota$; для любого $t \in T$ положим $t_L = \mathrm{pr}_L t$, так что t отождествляется с (t_L, t_M); пусть μ_L есть мера $\bigotimes_{\iota \in L} \mu_\iota$ на T_L. Пусть $p \geqslant 1$ — конечное действительное число; для любой функции f из $\mathscr{L}^p_F(T, \mu)$ (F — банахово пространство или $F = \overline{\mathbf{R}}$) положим

$$f_L(t) = \int f(t_L, t_M)\, d\mu_M(t_M).$$

Показать, что f_L стремится к f *в среднем порядке* p по фильтрующемуся множеству конечных подмножеств L из I, а f_M стремится *в среднем порядка* p к постоянной функции, равной $\int f\, d\mu$. (Приблизить f непрерывной функцией, зависящей лишь от конечного числа переменных.)

Вывести отсюда, что если μ-измеримое подмножество A из T таково, что для любого $t \in A$ всякая точка $t' \in T$ с координатами, равными координатам точки t, кроме *конечного* числа индексов, также принадлежит A, то либо $\mu(A) = 0$, либо $\mu(A) = 1$.

°16) Пусть (T_n) — бесконечная последовательность компактных пространств, μ_n — положительная мера с полной массой, равной 1, на T_n, и μ — мера-произведение $\bigotimes_{n=1}^{\infty} \mu_n$ на

$$T = \prod_{n=1}^{\infty} T_n.$$

a) Пусть $f \geqslant 0$ — μ-интегрируемая функция на T. Пусть (L_n) — возрастающая последовательность подмножеств из N; положим $M_n = N - L_n$ и обозначим $g = \sup_n f_{L_n}$, $h = \sup_n f_{M_n}$ (обозначения упр. 15). Пусть для любого $\alpha > 0$ через A_α обозначено множество точек $t \in T$, в которых $h(t) > \alpha$. Показать, что

$$\alpha \cdot \mu(A_\alpha) \leqslant \int f \, d\mu \text{ и } \alpha \cdot \mu(B_\alpha) \leqslant \int f \, d\mu.$$

(Заметить, что A_α есть множество тех $t \in T$, для которых по крайней мере одно из значений $f_{L_n}(t) > \alpha$, и выразить его в виде счетного объединения множеств G_n, не имеющих попарно общих точек и таких, что

$$\alpha \cdot \mu(G_n) \leqslant \int_{G_n} f \, d\mu.)$$

b) Предположим, что (L_n) есть возрастающая последовательность конечных подмножеств из N, объединение которых составляет N. Показать, что f_{L_n} стремится к f почти всюду и что f_{M_n} стремится почти всюду к постоянной $\int f \, d\mu$ на T. (Для любого $\varepsilon > 0$ рассмотреть непрерывную функцию, зависящую от конечного числа переменных и такую, что

$$\int |f - g| \, d\mu \leqslant \varepsilon,$$

а затем применить a) к функции $|f - g|$.)

°17) Пусть $(T_\iota)_{\iota \in I}$ — произвольное семейство компактных пространств; пусть для каждого $\iota \in I$ через μ_ι обозначена положительная мера на T_ι с полной массой, равной 1, и пусть μ есть мера-произведение $\bigotimes_{\iota \in I}$ на $T = \prod_{\iota \in I} T_\iota$. Далее, пусть для любого $\iota \in I$ $f_\iota \geqslant 0$ есть функция на T_ι, μ_ι-интегрируемая и такая, что $\int f_\iota \, d\mu_\iota \leqslant 1$; положим $\mu'_\iota = f_\iota \cdot \mu$ и $\mu' = \bigotimes_{\iota \in I} \mu'_\iota$ (гл. III (2-е изд.), § 4, упр. 6). Допустим, что $\mu' \neq 0$.

a) Для любого конечного подмножества J из I положим

$$T_J = \prod_{\iota \in J} T_\iota, \qquad \mu_J = \bigotimes_{\iota \in J} \mu_\iota,$$

$$\mu'_J = \bigotimes_{\iota \in J} \mu'_\iota, \qquad f_J(t) = \prod_{\iota \in J} f_\iota(\mathrm{pr}_\iota t),$$

$$g_J = \sqrt{f_J}, \qquad \mu''_J = \sqrt{\mu_J \mu'_J}$$

(§ 5, п. 9) и

$$\rho(\mu_J, \mu'_J) = \mu''_J(T_J) = \int g_J \, d\mu_J.$$

Показать, что для того чтобы функция g_J сходилась в смысле среднего квадратического к функции из $\mathscr{L}^2(T, \mu)$ по упорядоченному фильтрующемуся множеству конечных подмножеств из I, необходимо и достаточно, чтобы произведение чисел $\rho(\mu_\iota, \mu'_\iota)$ сходилось в $\mathbf{R}^*_+$, т. е. было > 0. (Оценить для двух конечных подмножеств J, L, $J \subset L$, норму $N_2(g_J - g_L)$ при помощи $\rho(\mu_\iota, \mu'_\iota)$. Вывести затем, что функции f_J будут сходиться в среднем к функции $f \geqslant 0$, удовлетворяющей равенству $\mu' = f \cdot \mu$.

b) Показать, что если произведение $\prod_{\iota \in J} \rho(\mu_\iota, \mu'_\iota)$ равно нулю, то меры μ и μ' будут сингулярны (рассмотреть множество A_J тех точек $t \in T$, в которых $g_J(t) > 1$, и оценить меры $\mu(A_J)$ и $\mu'(T - A_J)$).

°18) Пусть, в дополнение к обозначениям упр. 17, ν_ι есть положительная мера на T_ι с полной массой, равной 1, и пусть $\nu = \bigotimes_{\iota \in I} \nu_\iota$.

a) Показать, что если одна из мер ν_ι сингулярна к мере μ_ι того же индекса, то ν сингулярна к μ.

b) Для любого индекса $\iota \in I$ положим $\nu_\iota = \mu'_\iota + \mu''_\iota$, где μ'_ι имеет базис μ_ι, а μ''_ι сингулярна к μ'_ι (§ 5, теорема 3); допустим, что $\mu''_\iota \neq 0$ при любом $\iota = I$. Показать, что если $\mu''_\iota \neq 0$ для несчетного множества индексов, то найдется такое число α, что $0 < \alpha < 1$ и что для бесконечного числа индексов ι_n имеем $\mu'_{\iota_n}(T_{\iota_n}) \leqslant \alpha$ (используя a), показать, что в этом случае μ сингулярна с ν; используя упр. 17, доказать вторую часть предложения).

19) Пусть X — локально компактное пространство, Y — локально компактное пространство, счетное в бесконечности, A — универсально измеримое подмножество из $X \times Y$.

a) Показать для любого $x \in X$, что сечение $A(x)$ есть универсально измеримое подмножество из Y. Кроме того, для любой положительной меры μ на Y функция $x \mapsto \mu^*(A(x))$ универсально измерима на X (использовать теорему Лебега — Фубини).

b) Пусть μ — такая положительная мера на Y, что для почти всех $y \in Y$ (относительно μ) сечение $A^{-1}(y)$ множества A счетно. Показать, что множество N тех $x \in X$, для которых $\mu^*(A(x)) > 0$, не может содержать никакого счетного компактного множества.

20) a) Пусть ν — положительная мера на единичной окружности U: $|z| = 1$ в C и пусть μ — комплексная мера $j \cdot \nu$, где $t: z \mapsto z$ есть каноническая инъекция U в C так, что $|\mu| = \nu$. Пусть ρ — прообраз ν при локальном каноническом гомеоморфизме φ: $t \mapsto e^{it}$ прямой $\mathbf{R}$ на U (§ 6, п. 6). И пусть A — ν-измеримое подмножество

из U; показать, что если

$$\mu(A) = |\mu(A)|\, e^{i\omega},$$

то

$$|\mu(A)| \leqslant \left| \int_{\omega-\pi/2}^{\omega+\pi/2} e^{i\theta}\, d\rho(\theta) \right|.$$

b) Вывести из a), что когда A пробегает множество μ-измеримых подмножеств из U, то

$$\sup_A |\mu(A)| \geqslant \sup_\omega \left| \int_{\omega-\pi/2}^{\omega+\pi/2} \operatorname{Re} e^{i(\theta-\omega)}\, d\rho(\theta) \right| \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\omega \int_{\omega-\pi/2}^{\omega+\pi/2} \operatorname{Re} e^{i(\theta-\omega)}\, d\rho(\theta),$$

и заключить отсюда, что

$$\sup_A |\mu(A)| \geqslant \frac{1}{\pi} \|\mu\| \qquad (*)$$

(оценить последний интеграл при помощи теоремы Лебега — Фубини).

c) Показать, что неравенство (*) справедливо для *любой* ограниченной комплексной меры μ на локально компактном пространстве X, когда A пробегает множество μ-измеримых подмножеств из X. (Пусть $\mu = h \cdot |\mu|$, где h принимает свои значения в U. Рассмотреть меру-образ $\nu = h(|\mu|)$ на U и показать, что $h(\mu) = j \cdot \nu$; затем применить b) к $h(\mu)$.)

21) Обозначим через λ меру Лебега на $\mathbf{R}^n$.

a) Пусть C_0 — куб (Общая топ., гл. VI, § 1, п. 1) в $\mathbf{R}^n$ и пусть u — интегрируемая (относительно λ) числовая функция на C_0. Пусть, далее, s — такое действительное число, что

$$s \geqslant \frac{1}{\lambda(C_0)} \int_{C_0} |u|\, d\lambda.$$

Показать, что найдется последовательность (I_k) открытых кубов, содержащихся в C_0, попарно не пересекающихся и удовлетворяющих следующим условиям:

1) $|u(x)| \leqslant s$ почти всюду на множестве $C_0 - \bigcup_k I_k$;

2) если положить

$$u_k = \frac{1}{\lambda(I_k)} \int_{I_k} |u(x)|\, d\lambda(x),$$

то $u_k \leqslant 2^n s$ для любого k;

3) $\sum_k \lambda(I_k) \leqslant \frac{1}{s} \int_{C_0} |u(x)|\, d\lambda(x)$.

(Разделив каждую из проекций куба C_0 на два равных интервала, выбрать среди 2^n открытых кубов без общих точек такие кубы I_{1i}, чтобы все соответствующие «средние значения» u_{1i} были $\geqslant s$, и показать, что при таком выборе s $u_{1i} \leqslant 2^n s$. Точно так же разбить на 2^n кубов каждый куб первого разбиения, не фигурировавший среди I_{1i}, что даст нам второе конечное семейство кубов I_{2i}, выбранных среди всех новых полученных кубов так, чтобы соответствующее среднее значение u_{2i} было $\leqslant s$. Продолжить по индукции. Чтобы доказать, что выполняется условие 1), рассуждать от противного, отметив, что подмножество B_m из $C_0 - \bigcup_k I_k$, где $|u(x)| \geqslant s - 1/m$, с точностью до пренебрежимого множества является пересечением убывающей последовательности (U_n) открытых множеств, где U_r — объединение кубов r-го разбиения, не фигурирующих среди I_k и содержащих точку из B_m.)

b) Пусть $\mathscr{F}$ — множество числовых интегрируемых функций u на C_0, обладающих следующим свойством: если для любого куба $C \subset C_0$ $m_C(u)$ есть среднее значение

$$\frac{1}{\lambda(C)} \int_C u(x)\, d\lambda(x),$$

то

$$\int_C |u(x) - m_C(u)|\, d\lambda(x) \leqslant \lambda(C);$$

если $u \in \mathscr{F}$, то то же самое имеет место для $u - c$ при любом действительном c. Для любой функции $u \in \mathscr{F}$, любого числа $\sigma > 0$ и любого куба $C \subset C_0$ обозначим через $S(\sigma, u, C)$ множество тех $x \in C$, для которых

$$|u(x) - m_C(u)| \geqslant \sigma.$$

Наконец, через $G(\sigma)$ обозначим такое наименьшее число, что

$$\lambda(S(\sigma, u, C)) \leqslant G(\sigma) \int_C |u(x) - m_C(u)|\, d\lambda(x),$$

когда u пробегает $\mathscr{F}$, а C есть множество кубов, содержащихся в C_0; имеем $G(\sigma) \leqslant 1/\sigma$. Показать, что если

$$\sigma/2^n > s \geqslant 1,$$

то

$$G(\sigma) \leqslant \frac{1}{s} G(\sigma - 2^n s).$$

(Можно ограничиться доказательством того, что для некоторого $u \in \mathscr{F}$

$$\lambda(S(\sigma, u, C_0)) \leqslant \frac{1}{s} G(\sigma - 2^n s) \int_{C_0} |u(x) - m_{C_0}(u)|\, d\lambda(x),$$

и для упрощения можно предположить, что $m_{C_0}(u) = 0$. После этого использовать разбиение C_0 на объединение кубов I_k и на множество, где $|u(x)| \leqslant s$ почти всюду, отметив, что если $x \in I_k$ принадлежит $S(\sigma, u, C_0)$, то

$$|u(x) - m_{I_k}(u)| \geqslant \sigma - 2^n s,$$

и следовательно,

$$\lambda(I_k \cap S(\sigma, u, C_0)) \leqslant G(\sigma - 2^n s) \int_{I_k} |u(x) - m_{I_k}(u)|\, d\lambda(x).)$$

c) Вывести из b), что найдутся такие две зависящие только от n константы B и b, что для любой функции $u \in \mathscr{F}$ и любого $\sigma > 0$

$$\lambda(S(\sigma, u, C_0)) \leqslant Be^{-b\sigma}\lambda(C_0).$$

(Взять в b) $s = e$.)

ГЛАВА IX

МЕРЫ НА ОТДЕЛИМЫХ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

Пусть T — некоторое множество и A — его подмножество; будем через φ_A обозначать характеристическую функцию множества A, если это не ведет к недоразумению. Множество $\overline{\mathbf{R}}_+^T$ (конечных или бесконечных) положительных числовых функций на T будет обозначаться через $\mathscr{F}_+(T)$, или просто $\mathscr{F}_+$, если не может возникнуть сомнений относительно T; это множество будет всегда наделено своей естественной структурой порядка. Напомним, что произведение двух элементов из $\mathscr{F}_+$ определено всегда благодаря соглашению: $0\cdot(+\infty)=0$. Если A есть подмножество из T, то сужение $f \mid A$ функции f, определенной на T, может в этой главе записываться f_A, если это не вызывает путаницы; аналогичная запись будет использоваться и для индуцированных мер. С другой стороны, если $f \in \mathscr{F}_+(A)$, то f^0 будет означать нуль-продолжение функции f на T, т. е. функцию, определенную на T, совпадающую с f на A и равную 0 на $T - A$.

Все топологические пространства, рассматриваемые в этой главе, если не оговаривается противное, считаются отделимыми. Начиная с § 1, п. 4, исключая § 5, все меры предполагаются положительными (если не оговаривается противное).

§ 1. Предмеры и меры на топологическом пространстве

1. Заграждения

Определение 1. *Пусть T — некоторое множество. Заграждением на T называется всякое отображение p множества $\mathscr{F}_+(T)$ в $\overline{\mathbf{R}}_+$, обладающее следующими свойствами:*

a) *Если* f *и* g *— два элемента из* $\mathscr{F}$ *и* $f \leqslant g$, *то* $p(f) \leqslant p(g)$.
b) *Если* f *— элемент из* $\mathscr{F}_+$, *а* $t \geqslant 0$ *— число, то* $p(tf) = tp(f)$.
c) *Если* f *и* g *— два элемента из* $\mathscr{F}_+$, *то* $p(f+g) \leqslant p(f) + p(g)$.
d) *Если* (f_n) *— возрастающая последовательность элементов из* $\mathscr{F}_+$ *и если* $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$, *то* $p(f) = \lim\limits_{n\to\infty} p(f_n)$.

Для подмножества $A \subset T$ *вместо* $p(\varphi_A)$ *пишем* $p(A)$.

Условие b) влечет $p(0) = 0$. С другой стороны, если (f_n) — последовательность элементов из $\mathscr{F}_+$, то из условий c) и d) следует неравенство

$$p\left(\sum_n f_n\right) \leqslant \sum_n p(f_n),$$

называемое *неравенством счетной выпуклости.*

Пусть, например, T — локально компактное пространство и μ — положительная мера на T; тогда μ^* и $\mu^\bullet$ будут заграждениями на T. Это вытекает из предложений 10, 11, 12 и теоремы 3 (гл. IV (2-е изд.), § 1, п. 3) для μ^* и из предложения 1 (гл. V (2-е изд.), § 1, п. 1) для $\mu^\bullet$.

Предложение 1. *Пусть* $(p_\alpha)_{\alpha\in A}$ *— семейство заграждений на* T. *Тогда сумма и верхняя огибающая семейства* (p_α) (*на* $\mathscr{F}_+$ (*или* $\mathscr{F}_+(T)$)) *также являются заграждениями.*

Поскольку сумма конечного семейства заграждений, очевидно, является заграждением, то достаточно исследовать случай верхней огибающей. Свойства a), b), c) определения 1, очевидно, выполняются, так что остается установить d). Положим $p = \sup\limits_\alpha p_\alpha$; в обозначениях определения 1d) имеем:

$$p(f) = \sup_\alpha p_\alpha(f) = \sup_\alpha \sup_n (f_n) = \sup_n \sup_\alpha p_\alpha(f_n) = \sup_n p(f_n).$$

Определение 2. *Заграждение* p *на множестве* T *называется ограниченным, если* $p(T) < +\infty$. *В случае топологического пространства* T *заграждение* p *называется локально ограниченным, если для любого* $x \in T$ *существует такая окрестность* V, *что* $p(V) < +\infty$.

Для любого компактного подмножества $K \subset T$ из свойств a) и c) определения 1 тогда вытекает, что $p(K) < +\infty$. В част-

ности, если само T компактно, то всякое локально ограниченное заграждение на T ограничено.

Пусть p — заграждение на множестве T и пусть A — некоторое подмножество из T. Пусть, далее, для любой функции $f \in \mathscr{F}_+(A)$ через f^0 обозначено нуль-продолжение f на T. Тогда отображение $f \mapsto p(f^0)$ на $\mathscr{F}_+(A)$ является заграждением; оно называется *заграждением, индуцированным заграждением* p *на* A, и обозначается $p \mid A$ или p_A.

Пусть T и U — два множества, π — отображение T в U и p — заграждение на T. *Образом заграждения* p при отображении π называется заграждение $\pi(p)$ на U, значение которого для $f \in \mathscr{F}_+(U)$ задается равенством

$$(\pi(p))(f) = p(f \circ \pi).$$

Пусть p — заграждение на множестве T; говорят, что p *сосредоточено* на некотором подмножестве $A \subset T$, если $p(T - A) = 0$.

Лемма 1. *Если заграждение* p *сосредоточено на* $A \subset T$, *то* $p(f) = p(f\varphi_A)$ *для любого* $f \in \mathscr{F}_+(T)$.

В самом деле, положим $T - A = B$, так что $p(\varphi_B) = 0$; имеем

$$f\varphi_B \leqslant (+\infty) \cdot \varphi_B = \sup_{n \in \mathbf{N}} n\varphi_B;$$

следовательно, $p(f\varphi_B) = 0$ в силу свойств a), b), d) определения 1. Отсюда в силу c) вытекает, что $p(f) \leqslant p(f\varphi_A) + p(f\varphi_B) = p(f\varphi_A)$; и, наконец, в силу a), $p(f) = p(f\varphi_A)$.

2. *Предмеры и меры*

Пусть T — топологическое пространство и $\mathfrak{K}$ — множество компактных подмножеств из T, упорядоченных по включению. Пусть, далее, для любого $K \in \mathfrak{K}$ через $\mathscr{M}(K; \mathbf{C})$ обозначено множество комплексных мер на K. И пусть для любой пары (K, L) элементов из $\mathfrak{K}$, удовлетворяющей условию $K \subset L$, через ι_{KL} обозначается отображение $\mathscr{M}(L; \mathbf{C})$ в $\mathscr{M}(K; \mathbf{C})$, которое каждой мере μ на L ставит в соответствие меру μ_K, индуцированную мерой μ на K (гл. IV (2-е изд.), § 5, п. 7, опр. 4). Для компактных подмножеств $K \subset L \subset M$ из T имеем $\iota_{KM} = \iota_{KL} \circ \iota_{LM}$; это следует из транзитивности индуцированных мер (гл. V (2-е изд.),

§ 7, п. 2, предл. 4). Элементы *проективного предела* семейства $(\mathscr{M}(K; \mathbf{C}))_{K \in \mathfrak{K}}$ относительно отображений ι_{KL} будут называться *предмерами* на T. Иными словами:

Определение 3. *Предмерой на топологическом пространстве T называется любое отображение w, которое каждому компактному подмножеству K из T ставит в соответствие некоторую меру w_K на K и обладает следующим свойством:*

Если K и L — два компактных подмножества из T и $K \subset L$, то мера $(w_L)_K$, индуцированная мерой w_L на K, совпадает с w_K.

Говорят, что предмера w действительна (соответственно *положительна*), *если все меры w_K действительны* (соответственно *положительны*).

Пусть w и w' — две предмеры на T и t — комплексное число; предмеры $w + w'$ и tw определяются формулами $(w + w')_K = w_K + w'_K$, $(tw)_K = tw_K$ для любого компактного подмножества $K \subset T$. Предмеры на T, очевидно, образуют векторное пространство; оно обозначается $\mathscr{P}(T; \mathbf{C})$; пространство действительных предмер будет обозначаться $\mathscr{P}(T; \mathbf{R})$, или чаще, $\mathscr{P}(T)$; для выпуклого конуса положительных предмер будет использоваться обозначение $\mathscr{P}_+(T)$. Пусть w — некоторая предмера; тогда отображение $K \mapsto |w_K|$ есть предмера на T (гл. IV (2-е изд.), § 5, п. 7, лемма 3); она будет обозначаться $|w|$. В случае действительной предмеры w полагаем $w^+ = \frac{1}{2}(|w| + w)$, $w^- = \frac{1}{2}(|w| - w)$; поскольку обе эти предмеры положительны, ясно, что любая действительная предмера является разностью двух положительных предмер. Очевидно, что $(w^+)_K = (w_K)^+$, $(w^-)_K = (w_K)^-$ для любого компактного подмножества K из T.

Векторное пространство $\mathscr{P}(T)$ упорядочено конусом $\mathscr{P}_+(T)$. Ясно, что $w^+ = \sup(w, 0)$, $w^- = \sup(-w, 0)$; следовательно, $\mathscr{P}(T)$ — решетка, и $\sup(w, w') = w + (w' - w)^+$, $\inf(w, w') = w - (w' - w)^-$. Кроме того, очевидно, что

$$(\sup(w, w'))_K = \sup(w_K, w'_K),$$
$$(\inf(w, w'))_K = \inf(w_K, w'_K)$$

для любого компактного подмножества K из T.

Определение 4. *Пусть w — положительная предмера на T. Для любой функции $f \in \mathscr{F}_+(T)$ полагаем*

$$w^*(f) = \sup_K (w_K)^*(f_K), \tag{1}$$

где K пробегает множество компактных подмножеств из T.

Пусть для каждого компактного множества K загражденне p^K есть образ загражденния $(w_K)^*$ при канонической инъекции множества K в T; w^* есть верхняя огибающая загражденний p^K, и значит, является загражденнем (п. 1, предл. 1). Говорят, что w^* есть *существенный верхний интеграл* относительно положительной предмеры w. Часто вместо $w^*(f)$ пишут $\int^* f dw$, $\int^* f(t)\, dw(t)$.

Замечание 1). Если v и w — положительные предмеры, то $(v+w)^* = v^* + w^*$ (гл. V (2-е изд.), § 1, п. 1, предл. 3). Если v и w — комплексные предмеры, то $|v+w|^* \leqslant |v|^* + |w|^*$.

Предложение 2. а) *Пусть w — положительная предмера. Для любого компактного подмножества K из T загражденне $(w^*)_K$, индуцированное загражденнем w^* на K, совпадает с $(w_K)^*$. Для любой функции $f \in \mathscr{F}_+(T)$ справедливы соотношения $(w_K)^*(f_K) = w^*(f\varphi_K)$ и*

$$w^*(f) = \sup_K w^*(f\varphi_K). \tag{2}$$

b) *Обратно, пусть p — загражденне на T, удовлетворяющее следующим условиям:*

1) *Для любого компактного подмножества K из T существует такая положительная мера w_K на K, что $p_K = (w_K)^*$.*

2) *Для любой функции $f \in \mathscr{F}_+(T)$ справедливо равенство $p(f) = \sup_K p(f\varphi_K)$.*

Тогда отображение w: $K \mapsto w_K$ есть положительная предмера на T, и $p = w^*$.

Докажем а): пусть $g \in \mathscr{F}_+(K)$ и пусть g^0 — нуль-продолжение g на T; по определению индуцированных загражденний имеем $(w^*)_K(g) = w^*(g^0) = \sup_L (w_L)^*(g^0 \mid L)$, где L пробегает множество компактных подмножеств из T или только множество компактных подмножеств, содержащих K. Но если L содержит K, то $(w_L)^*(g^0 \mid L) = (w_K)^*(g)$; это следует из того, что $g^0 \mid L$

обращается в нуль вне K (гл. V (2-е изд.), § 7, п. 1, предл. 1); тем самым первое утверждение доказано. Таким образом, $(w_K)^\cdot(f_K) = (w^\cdot)_K(f_K) = w^\cdot((f_K)^0) = w^\cdot(f\varphi_K)$ для любого $f \in \mathscr{F}_+(T)$, а соотношение (2) является лишь другой формой равенства (1).

Перейдем к b): мера w_K, рассмотренная в 1), единственна (гл. V (2-е изд.), § 1, п. 1). Покажем, что отображение $K \mapsto w_K$ является предмерой: пусть K и L — два компактных подмножества, $K \subset L$, и пусть λ — мера, индуцированная мерой w_L на K; все сводится к тому, чтобы показать, что $\lambda^\cdot = (w_K)^\cdot$. Но $\lambda^\cdot = ((w_L)^\cdot)_K$ (гл. V (2-е изд.), § 7, п. 1, предл. 1); а так как $(w_L)^\cdot = p_L$, то $\lambda^\cdot = (p_L)_K = p_K = (w_K)^\cdot$.

Обозначим через w предмеру $K \mapsto w_K$; в силу равенств $p_K = (w_K)^\cdot = (w^\cdot)_K$ имеем $p(f\varphi_K) = p_K(f_K) = (w^\cdot)_K(f_K) = w^\cdot(f\varphi_K)$. Тогда заграждения p и $w^\cdot$ совпадают на основании формулы (2) и условия 2), наложенного на p. Тем самым предложение доказано.

Если индуцированное заграждение $(w^\cdot)_K$ совпадает с $(w_K)^\cdot$, то можно, не боясь путаницы, писать просто $w^\cdot_K$, что мы и будем делать в дальнейшем.

Следствие. *Пусть v и w — две положительные предмеры на T, удовлетворяющие равенству $v^\cdot(L) = w^\cdot(L)$ для любого компактного подмножества L из T; тогда $v = w$. В частности, соотношение $v^\cdot = w^\cdot$ влечет $v = w$.*

В самом деле, пусть K — компактное множество из T; для любого компактного множества $L \subset K$ в силу предложения 2 справедливы соотношения

$$w_K(L) = w^\cdot_K(L) = w^\cdot(L) = v^\cdot(L) = v^\cdot_K(L) = v_K(L);$$

следовательно, $w_K = v_K$ (гл. IV (2-е изд.), § 4, п. 10, следствие 3 предл. 19), и, наконец, по определению предмер, $w = v$.

Определение 5. *Пусть w — предмера на топологическом пространстве T. Говорят, что w есть мера* (соответственно *ограниченная мера*), *если заграждение $|w|^\cdot$ локально ограничено* (соответственно *ограничено*) (ср. п. 1, опр. 2).

Множество комплексных мер на T, очевидно, является векторным пространством (замечание 1); оно будет обозначаться $\mathscr{M}(T; \mathbf{C})$. Пространство действительных мер будет обозначаться

$\mathscr{M}(T; \mathbf{R})$, или чаще, $\mathscr{M}(T)$, а через $\mathscr{M}_+(T)$ будет обозначаться конус положительных мер.

Если w — комплексная мера, то ее действительная и комплексная части являются действительными мерами. Если w — действительная мера, то w^+ и w^- — положительные меры. Стало быть, любая комплексная (соответственно действительная) мера есть линейная комбинация (соответственно разность) положительных мер.

Замечания. 2). Если T *локально компактно*, то всякая предмера w на T есть мера. В самом деле, каждое $x \in T$ обладает компактной окрестностью K, и $|w|^*(K) = \|w_K\| < +\infty$, так что заграждение $|w|^*$ локально ограничено.

3) Для любого борелевского подмножества A из T (в частности, для $A = T$) и любой положительной меры μ на T число $\mu^*(A)$ есть верхняя грань мер $\mu^*(K)$ компактных подмножеств из A. В самом деле, для любого компактного подмножества K из A имеем $\mu^*(K) \leqslant \mu^*(A)$; с другой стороны, если $\mathfrak{K}$ — множество компактных подмножеств из T, то в силу следствия 1 из теоремы 4 гл. IV (2-е изд.), § 4, п. 6 имеем

$$\mu^*(A) = \sup_{K \in \mathfrak{K}} \mu_K^*(A \cap K) = \sup_{\substack{K \in \mathfrak{K} \\ L \subset A \cap K}} \sup_{L \in \mathfrak{K}} \mu_K^*(L) \leqslant \sup_{\substack{L \in \mathfrak{K} \\ L \subset A}} \mu^*(L).$$

3. *Примеры мер*

Пример 1. *Меры на локально компактном пространстве.* Следующее предложение показывает, что теория этой главы включает в себя теорию главы IV. В формулировке слово «мера» и обозначение $\mathscr{M}(T; \mathbf{C})$ понимаются в смысле предыдущих глав.

Предложение 3. *Пусть T — локально компактное пространство и пусть μ — мера на T. Обозначим через $W(\mu)$ отображение, которое каждому компактному подмножеству K из T ставит в соответствие индуцированную меру μ_K. Тогда $W(\mu)$ есть предмера на T, $W(|\mu|) = |W(\mu)|$, и линейное отображение W: $\mu \mapsto W(\mu)$ есть биекция пространства $\mathscr{M}(T; \mathbf{C})$ на пространство $\mathscr{P}(T; \mathbf{C})$ предмер на T. Кроме того, если μ положительна, то $\mu^* = (W(\mu))^*$.*

Очевидно, $W(\mu)$ есть предмера (гл. V (2-е изд.), § 7, п. 2, предл. 4), и отображение W линейно. Соотношение $W(\mu) = 0$ означает, что μ индуцирует меру 0 на любом компактном

множестве из T; в этом случае для $f \in \mathscr{K}(T; \mathbf{C})$ имеем $\mu(f) = 0$, и следовательно, $\mu = 0$, чем доказана инъективность отображения W. Остается доказать, что W сюръективно. Поскольку любая предмера является линейной комбинацией положительных предмер, то нам достаточно построить для любой *положительной* предмеры w такую положительную меру μ, что $w = W(\mu)$. Пусть задана функция $f \in \mathscr{K}(T)$ и пусть L — компактное множество, содержащее носитель функции f; число $w_L(f_L)$ по определению индуцированных мер не зависит от выбора множества L, и значит, можно положить $\mu(f) = w_L(f_L)$; тогда μ будет положительной линейной формой на $\mathscr{K}(T)$, т. е. положительной мерой. Проверим, что $w = W(\mu)$; прежде всего, соотношение $\mu^*(f) = w_L(f_L)$ распространяется на случай, когда f есть конечная полунепрерывная сверху положительная функция, обращающаяся в нуль вне L. В самом деле, пусть M — компактная окрестность множества L и $\mathscr{H}$ — (фильтрующееся по убыванию) множество непрерывных функций на T с носителем, содержащимся в M, и мажорирующих f. Имеем (гл. IV (2-е изд.), § 4, п. 4, следствие 2 из предл. 5)

$$\mu^*(f) = \inf_{h \in \mathscr{H}} \mu(h) = \inf_{h \in \mathscr{H}} w_M(h_M) = w_M^*(f_M),$$

а, с другой стороны, $w_M^*(f_M) = w_L^*(f_L)$, поскольку f_M обращается в нуль на $M - L$ (гл. V (2-е изд.), § 7, п. 1, предл. 1). В частности, если в качестве f взять нуль-продолжение некоторого элемента из $\mathscr{K}_+(L)$, то эта формула показывает, что, по определению индуцированных мер, $\mu_L = w_L$, и значит, тем более $W(\mu) = w$.

Если μ положительна, то

$$\mu^*(f) = \sup_K \mu^*(f\varphi_K) = \sup_K \mu_K^*(f_K) = (W(\mu))^*(f)$$

для любой функции $f \in \mathscr{F}_+(T)$ (гл. V (2-е изд.), § 1, опр. 1 и § 7, предл. 1). Соотношение $|W(\mu)| = W(|\mu|)$ очевидно (гл. IV (2-е изд.), § 5, п. 7, лемма 3). Предложение доказано.

Для случая *локально компактного* пространства T мы будем *отождествлять* в дальнейшем пространства $\mathscr{M}(T; \mathbf{C})$ и $\mathscr{F}(T; \mathbf{C})$ посредством биекции W.

Пример 2. *Меры с компактным носителем на топологическом пространстве.*

Лемма 2. *Пусть T — топологическое пространство, L — компактное подмножество из T и λ — положительная мера на L. Существует такая единственная положительная мера μ на T, что для любой функции $f \in \mathscr{F}_+(T)$*

$$\mu^*(f) = \lambda^*(f_L). \tag{3}$$

В самом деле, положим $p(f) = \lambda^*(f_L)$ для любого $f \in \mathscr{F}_+(T)$ и покажем, что выполняются условия 1) и 2) предложения 2b). Второе условие, очевидно, выполнено: в самом деле, если K содержит L, то $p(f) = p(f\varphi_K)$. Если $K \subset T$ компактно и если $h \in \mathscr{F}_+(K)$, то

$$p_K(h) = p(h^0) = \lambda^*(h^0 \mid L).$$

Но $h^0 \mid L$ есть нуль-продолжение на L отображения $h_{K \cap L}$: стало быть, последнее выражение совпадает с $\mu_K(h)$, где μ_K — образ меры $\lambda \mid (K \cap L)$ при инъекции множества $K \cap L$ в K (гл. V (2-е изд.), § 6, п. 2, предл. 2 и § 7, п. 1, предл. 1), и $p_K = (\mu_K)^*$. Таким образом, условие 1) предложения 2b) тоже выполнено, и отсюда сразу же следует существование μ.

Будем говорить, что μ есть мера на T, *определенная* посредством λ. В частности, для любой точки x из T можно определить меру ε_x; она характеризуется равенством $(\varepsilon_x)^*(f) = f(x)$ для $f \in \mathscr{F}_+(T)$.

Замечания. 1) В случае, когда T локально компактно, μ есть образ меры λ при инъекции L в T. В § 2, п. 3, пример 1, мы увидим (когда будут рассмотрены меры-образы), что эта интерпретация проходит и для произвольных пространств.

2) Мы увидим также, что меры, определяемые в примере 2, являются положительными мерами с компактным носителем в T (п. 6, замечание 2)).

Отныне мы будем рассматривать лишь положительные меры, если не будет оговорено противное. На протяжении всего этого параграфа через T будет обозначаться топологическое пространство, а через μ — положительная мера на T.

Многие результаты следующих пунктов распространяются и на положительные предмеры. Это распространение мы предоставляем провести читателю.

4. *Локально пренебрежимые множества и функции*

Определение 6. *Функция* $f \in \mathscr{F}_+$ (соответственно *подмножество* A *из* T) *называется локально пренебрежимой относительно меры* μ, *если* $\mu^*(f) = 0$ (соответственно $\mu^*(A) = 0$). *Говорят, что* μ *сосредоточена на подмножестве* A *из* T, *если* $T - A$ *локально* μ*-пренебрежимо.*

Замечания. 1) Введенные таким образом понятия совпадают с обычными понятиями, когда T локально компактно.

2) После того как будут определены *пренебрежимые* множества, мы увидим, что локально пренебрежимые множества — это именно те множества, которые в некоторой окрестности каждой точки из T устроены так же, как пренебрежимые множества (п. 9, следствие 2 из предл. 14).

3) Как и в главах IV и V, выражение «локально почти всюду» будет рассматриваться как синоним выражения «кроме как на локально пренебрежимом множестве».

4) В случае комплексной меры θ будем говорить, что функция (соответственно подмножество из T) локально пренебрежима относительно θ, если она является таковой относительно положительной меры $|\theta|$.

Пример. Пусть L — компактное подмножество из T, λ — мера на L и μ — мера на T, определенная посредством λ (п. 3, пример 2). Из формулы (3) сразу же вытекает, что функция $f \in \mathscr{F}_+(T)$ локально μ-пренебрежима в том и только том случае, если f_L λ-пренебрежима.

Из формулы (1) непосредственно следует, что функция $f \in \mathscr{F}_+(T)$ локально μ-пренебрежима в том и только том случае, если функция f_K μ_K-пренебрежима для любого компактного подмножества K из T. Таким образом, свойства локально пренебрежимых множеств сразу же сводятся к свойствам пренебрежимых множеств в компактных пространствах, изучавшихся в главе IV. Приведем несколько результатов, которые будут использоваться в дальнейшем без специальной оговорки.

— Для того чтобы функция $f \geqslant 0$ была локально пренебрежима, необходимо и достаточно, чтобы $f(t) = 0$ локально почти всюду (гл. IV (2-е изд.), § 2, п. 3, теорема 1). Если f — функция со значениями в банаховом пространстве, то безразлично, стало быть, говорить ли: $f = 0$ локально почти всюду, или: $\mu^*(|f|) = 0$; мы также будем в этом случае говорить, что f локально пренебрежима.

— Сумма и верхняя огибающая последовательности положительных локально пренебрежимых функций локально пренебрежимы (там же, п. 1, предл. 2).

— Если $f \geqslant 0$ и $g \geqslant 0$ — две функции, равные между собой локально почти всюду, то $\mu^*(f) = \mu^*(g)$ (там же, п. 3, предл. 6).

5. *Измеримые множества и функции*

Определение 7. *Говорят, что функция f, определенная на T и принимающая значения в топологическом (отделимом или нет) пространстве F, измерима относительно меры μ (или μ-измерима), если для любого компактного подмножества K из T функция f_K является μ_K-измеримой.*

Это сводится к утверждению, что для любого компактного множества K существует разбиение этого множества на μ_K-пренебрежимое множество N и на последовательность K_n таких компактных множеств, что сужение функции f на каждое из множеств K_n непрерывно. Так как утверждение, что N есть μ_K-пренебрежимое множество, равносильно утверждению, что N есть локально μ-пренебрежимое множество (п. 4), то ясно, что функция f μ-измерима в том и только том случае, если для любого компактного множества K существует разбиение K на локально μ-пренебрежимое множество N и на последовательность (K_n) компактных множеств такое, чтобы f_{K_n} были непрерывны при любом n. Это определение тождественно определению 1 гл. IV (2-е изд.), § 5, п. 1, и мы приходим, тем самым, к обычному понятию измеримой функции, когда T локально компактно.

Говорят, что подмножество A из T измеримо, если его характеристическая функция измерима. Если A μ-измеримо и $\mu^*(A) < +\infty$, то это число обозначается просто $\mu(A)$ и называется *мерой* множества A. Запись $\mu(f)$ для $\mu^*(f)$ употребляется также в случаях, когда $f \geqslant 0$ μ-измерима и когда $\mu^*(f) < +\infty$.

Если θ — комплексная мера на T, то функция f (соответственно подмножество из T) называется θ-измеримой, если она измерима относительно положительной меры $|\theta|$. Формулируемые ниже результаты распространяются и на комплексные меры.

Пример. Пусть L — компактное подмножество из T, λ — мера на L и μ — мера на T, определенная посредством λ (п. 3, пример 2).

Функция f, определенная на T, μ-измерима в том и только том случае, если f_L λ-измерима. В самом деле, необходимость очевидна. Обратно, если это условие выполнено, то существует разбиение множества L на λ-измеримое множество N и на последовательность (L_n) компактных множеств, таксе, чтобы f_{L_n} были непрерывны при любом n. Для компактного подмножества K из T множество $K - \bigcup_n (K \cap L_n)$ имеет с L пересечение, которое λ-пренебрежимо, и значит, это множество на основании формулы (3) из п. 3 μ-пренебрежимо, и сужение функции f на $K \cap L_n$ непрерывно для любого n.

Определение 7 позволяет распространить без новых доказательств многие результаты об измеримых функциях на случай пространств, не являющихся локально компактными. Приведем некоторые из них, а именно те, которые будут использоваться в дальнейшем без специальных оговорок: открытые множества и замкнутые множества в T μ-измеримы; μ-измеримые множества образуют σ-алгебру (гл. IV (2-е изд.), § 5, п. 4. следствие 2 из теоремы 2), которая содержит борелевские множества из T (там же, следствие 3) и суслинские множества (гл. IV, § 5, п. 1, следствие 2 из предл. 3) *). Обычные алгебраические операции над числовыми функциями сохраняют измеримость (гл. IV (2-е изд.), § 5, п. 3), равно как и операции счетного перехода к пределу (там же, п. 4, теорема 2 и следствие 1). Следующее свойство заслуживает более подробного упоминания.

Предложение 4. *Пусть f — положительная функция и $(g_n)_{n\geqslant 1}$ — последовательность положительных μ-измеримых функций на T. Если $g = \sum_{n\geqslant 1} g_n$, то*

$$\mu^*(fg) = \sum_{n\geqslant 1} \mu^*(fg_n). \tag{4}$$

Положим $h_n = \sum_{i=1}^{n} g_i$ для любого $n \geqslant 1$. Для любого компактного подмножества K из T в силу предложения 2 гл. V (2-е изд.), § 1, п. 1, примененного к компактному пространству K, имеем

$$\mu^*((fh_n)_K) = \sum_{i=1}^{n} \mu_K^*((fg_i)_K).$$

*) Доказательство этого следствия переносится без изменений на суслинские множества в локально компактном неметризуемом пространстве (Общ. топ., гл. IX (3-е изд.), § 6, п. 9, теорема 5).

Переходя к пределу по фильтрующемуся по возрастанию множеству компактных подмножеств из T, получаем

$$\mu^*(fh_n) = \sum_{i=1}^{n} \mu^*(fg_i).$$

Но предел возрастающей последовательности $(fh_n)_{n\geqslant 1}$ равен fg, откуда $\mu^*(fg) = \lim_{n\to\infty} \mu^*(fh_n)$, и мы сразу получаем (4) из предыдущей формулы.

Следствие. *Пусть (A_n) — последовательность попарно не пересекающихся измеримых подмножеств, объединение которых составляет множество A. Для любого подмножества B из T*

$$\mu^*(A \cap B) = \sum_n \mu^*(A_n \cap B),$$

и, в частности,

$$\mu^*(A) = \sum_n \mu^*(A_n).$$

Среди свойств измеримых функций и множеств, которые, подобно вышеуказанным, распространяются на отделимые пространства, укажем также предложение 12 гл. IV (2-е изд.), § 5, п. 8 (μ-плотные семейства компактных множеств). Таким образом, функция f со значениями в топологическом (отделимом или нет) пространстве μ-измерима в том и только том случае, если множество компактных подмножеств $K \subset T$, для которых f_K непрерывны, является μ-плотным (там же, п. 10, предл. 15).

6. *Фильтрующиеся семейства; носитель меры*

Предложение 5. a) *Пусть H — возрастающее фильтрующееся семейство положительных функций, полунепрерывных снизу на любом компактном подмножестве из T. Тогда*

$$\mu^*(\sup_{h\in H} h) = \sup_{h\in H} \mu^*(h). \tag{5}$$

b) *Пусть H — убывающее фильтрующееся множество положительных функций, полунепрерывных сверху на любом компакте из T. Если в H существует такая функция h_0, что $\mu^*(h_0) < +\infty$, то*

$$\mu^*(\inf_{h\in H} h) = \inf_{h\in H} \mu^*(h). \tag{6}$$

В самом деле, для любого компактного множества $K \subset T$ в силу предложения 2 п. 2 и предложения 8 гл. V (2-е изд.), § 1,

п. 2 имеем

$$\mu^*(\sup_{h\in H} h\varphi_K) = \mu_K^*(\sup_{h\in H} h_K) = \sup_{h\in H} \mu_K^*(h_K) = \sup_{h\in H} \mu^*(h\varphi_K)$$

в случае a), и

$$\mu^*(\inf_{h\in H} h\varphi_K) = \mu_K^*(\inf_{h\in H} h_K) = \inf_{h\in H} \mu_K^*(h_K) = \inf_{h\in H} \mu^*(h\varphi_K)$$

в случае b). Случай a) получается отсюда сразу же взятием верхней грани относительно K (п. 2, предл. 2). Чтобы изучить случай b), возьмем число $\varepsilon > 0$ и выберем такое компактное множество K, чтобы выполнялось неравенство $\mu^*(h_0\varphi_K) \geqslant \mu^*(h_0) - \varepsilon$. Тогда (п. 5, предл. 4) $\mu^*(h_0\varphi_{\complement K}) \leqslant \varepsilon$; стало быть, для любой функции $h \in H$, мажорированной посредством h_0, имеем $\mu^*(h\varphi_{\complement K}) \leqslant \varepsilon$ и, в силу предложения 4 п. 5, окончательно получаем $\mu^*(h\varphi_K) \geqslant \geqslant \mu^*(h) - \varepsilon$. Следовательно,

$$\mu^*(\inf_{h\in H} h) \geqslant \mu^*(\inf_{h\in H} h\varphi_K) = \inf_{\substack{h\in H\\ h\leqslant h_0}} \mu^*(h\varphi_K) \geqslant \inf_{\substack{h\in H\\ h\leqslant h_0}} \mu^*(h) - \varepsilon.$$

Итак, левая часть формулы (6) мажорирует правую; а поскольку обратное очевидно, то предложение доказано.

Следствие. a) *Пусть* $(U_\alpha)_{\alpha\in I}$ — *фильтрующееся по возрастанию семейство открытых подмножеств из* T, *составляющих в объединении множество* U. *Тогда* $\mu^*(U) = \sup_{\alpha\in I} \mu^*(U_\alpha)$.

b) *Пусть* $(F_\alpha)_{\alpha\in I}$ — *фильтрующееся по убыванию семейство замкнутых подмножеств из* T, *составляющих в пересечении множество* F. *Если существует такое* $\alpha \in I$, *что* $\mu^*(F_\alpha)$ *конечно, то* $\mu^*(F) = \inf_{\alpha\in I} \mu^*(F_\alpha)$.

Согласно этому следствию, существует наибольшее открытое локально пренебрежимое множество; это позволяет ввести следующее определение.

Определение 8. *Носителем меры* μ *на* T *называется дополнение наибольшего открытого локально* μ*-пренебрежимого множества из* T.

Носитель меры μ обозначается $\mathrm{supp}(\mu)$.

Замечания. 1) Если μ — комплексная мера, то *носителем меры* μ называется носитель положительной меры $|\mu|$; им по-прежнему будет дополнение наибольшего открытого локально μ-пренебрежимого множества.

2) Покажем, что меры, введенные в примере 2 из п. 3, являются мерами с компактным носителем на T. Пусть μ — положительная мера на T, имеющая носителем компактное множество K, и пусть ν — мера, определенная посредством μ_K (в смысле п. 3). Пусть, далее, $f \in \mathscr{F}_+(T)$; тогда $\nu^*(f) = \mu_K^*(f_K)$ (п. 3, формула (3)). Поскольку заграждение μ^* сосредоточено на K, то мы имеем также

$$\mu^*(f) = \mu^*(f\varphi_K) = \mu^*((f_K)^0) = \mu_K^*(f_K),$$

откуда $\mu^* = \nu^*$, и наконец, $\mu = \nu$. Обратно, если K — компактное множество из T, λ — мера на K и μ — мера на T, определенная посредством λ, то $\mu^*(\complement K) = 0$ (п. 3, формула (3)); следовательно, носитель меры μ содержится в K, и значит, компактен.

7. *Верхние огибающие и суммы мер*

Предложение 6. *Пусть $(\lambda_\alpha)_{\alpha\in A}$ — возрастающее фильтрующееся семейство мер на T и пусть $p = \sup\limits_\alpha \lambda_\alpha^*$. Для того чтобы семейство (λ_α) было мажорировано в $\mathscr{M}(T)$, необходимо и достаточно, чтобы заграждение p было локально ограничено. Тогда семейство (λ_α) имеет в $\mathscr{M}(T)$ верхнюю грань λ, и $\lambda^* = p$. Для любого компактного множества K мера λ_K есть верхняя грань мер $(\lambda_\alpha)_K$ в $\mathscr{M}(K)$.*

Если семейство (λ_α) мажорировано в $\mathscr{M}(T)$, то p, очевидно, локально ограничено. Обратно, предположим, что p локально ограничено, и покажем, что оно удовлетворяет условиям 1) и 2) предложения 2b) из п. 2. Для условия 2) это вытекает из следующих равенств:

$$p(f) = \sup_\alpha \lambda_\alpha^*(f) = \sup_\alpha \sup_K \lambda_\alpha^*(f\varphi_K) = \sup_K \sup_\alpha \lambda_\alpha^*(f\varphi_K) = \sup_K p(f\varphi_K).$$

С другой стороны, пусть K — компактное множество; заграждение p_K равно верхней огибающей заграждений $(\lambda_\alpha^*)_K$, и оно ограничено, поскольку p локально ограничено. Стало быть, меры $(\lambda_\alpha)_K$ имеют верхнюю грань λ_K в $\mathscr{M}(K)$ и $\lambda_K^* = p_K$ (гл. V (2-е изд.), § 1, п. 4, предл. 11). Значит, условие 1) предложения 2b) выполнено, и существует такая мера λ на T, что $\lambda^* = p$; ясно, что λ есть верхняя грань мер λ_α.

Определение 9. *Пусть $(\mu_i)_{i\in I}$ — семейство мер на T. Пусть, далее, A — множество конечных подмножеств из I; и пусть $\lambda_\alpha = \sum\limits_{i\in\alpha} \mu_i$ для любого $\alpha \in A$. Если семейство (λ_α) имеет в $\mathscr{M}(T)$*

верхнюю грань μ, *то семейство* (μ_i) *называется суммируемым семейством,* μ *называется суммой семейства* (μ_i); *пишут* $\mu = \sum_{i \in I} \mu_i$.

Это определение распространяет определение главы V (2-е изд.), § 2, п. 1.

Предложение 7. *Для того чтобы семейство* $(\mu_i)_{i \in I}$ *было суммируемо, необходимо и достаточно, чтобы заграждение* $p = \sum_{i \in I} \mu_i^*$ *было локально ограничено, и в этом случае* $p = \mu^*$. *При этом для любого компактного подмножества* K *из* T *семейство* $((\mu_i)_K)_{i \in I}$ *суммируемо в* $\mathscr{M}(K)$, *и* $\mu_K = \sum_{i \in I} (\mu_i)_K$.

В обозначениях определения 9 имеем $\lambda_\alpha^* = \sum_{i \in \alpha} \mu_i^*$ для любого конечного подмножества α из A (п. 2, замечание 1). Утверждение является теперь непосредственным следствием предложения 6.

Соотношение $\mu_K = \sum_{i \in I} (\mu_i)_K$ и предложение 2 гл. V (2-е изд.), § 2, п. 2 приводят нас к следующему результату.

Предложение 8. *Пусть* μ — *сумма суммируемого семейства* $(\mu_i)_{i \in I}$ *мер на* T. *Для того чтобы отображение* f *пространства* T *в топологическое (отделимое или нет) пространство* F *было* μ-*измеримо, необходимо и достаточно, чтобы* f *было* μ_i-*измеримо для любого* $i \in I$.

8. *Измельчения*

Определение 10. *Измельчением пространства* T *относительно* μ, *или* μ-*измельчением, называется локально счетное семейство* $(K_\alpha)_{\alpha \in A}$ *таких попарно не пересекающихся компактных подмножеств из* T, *что множество* $N = T - \bigcup_{\alpha \in A} K_\alpha$ *локально* μ-*пренебрежимо.*

Предложение 9. a) *Существует измельчение* $(K_\alpha)_{\alpha \in A}$ *пространства* T *относительно* μ. b) *Пусть* $(K_\alpha)_{\alpha \in A}$ — *измельчение* T *относительно* μ. *Если* μ_α — *мера на* T, *определенная посредством* μ_{K_α} (п. 3, пример 2), *то семейство* $(\mu_\alpha)_{\alpha \in A}$ *суммируемо,*

его сумма равна μ, *и для любой функции* $f \in \mathscr{F}_+(T)$ *справедливо соотношение*

$$\mu^*(f) = \sum_{\alpha \in A} \mu_\alpha^*(f) = \sum_{\alpha \in A} \mu_{K_\alpha}^*(f_{K_\alpha})\ ^*). \tag{7}$$

Для того чтобы отображение g *пространства* T *в топологическое (отделимое или нет) пространство* G *было* μ*-измеримо, необходимо и достаточно, чтобы* g_{K_α} *было* μ_{K_α}*-измеримо для любого* $\alpha \in A$.

А *Существование измельчения*

Доказательство повторяет доказательство предложения 14 гл. IV (2-е изд.), § 5, п. 9, с точностью до незначительных изменений. Пусть $\mathfrak{K}$ — множество таких компактных подмножеств K из T, что $\operatorname{supp}(\mu_K) = K$, и пусть $\mathscr{H}$ — множество (упорядоченное по включению) подмножеств $\mathscr{L}$ из $\mathfrak{K}$, состоящих из попарно не пересекающихся множеств. Прежде всего покажем, что любое множество $\mathscr{L}$ из $\mathscr{H}$ *локально счетно*. Пусть x — точка из T и V — такая открытая окрестность этой точки, что $\mu^*(V) < \infty$; и пусть $\mathscr{L}_V$ — множество тех $K \in \mathscr{L}$, которые пересекаются с V. Если $(K_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ — конечная последовательность различных элементов из $\mathscr{L}_V$, то в силу следствия из предложения 4 имеем

$$\sum_{i=1}^{n} \mu^*(K_i \cap V) = \mu^*(V \cap (\bigcup_{i=1}^{n} K_i)) \leqslant \mu^*(V),$$

поскольку K_i попарно не пересекаются. Стало быть,

$$\sum_{K \in \mathscr{L}_V} \mu^*(K \cap V) < +\infty.$$

Но $\mu^*(K \cap V) = \mu_K^*(K \cap V) > 0$ для любого $K \in \mathscr{L}_V$, так как $K \cap V$ непусто, открыто в K и носителем меры μ_K служит само K; значит, $\mathscr{L}_V$ счетно, а $\mathscr{L}$ локально счетно. Легко видеть, что $\mathscr{H}$ индуктивно и не пусто ($\varnothing \in \mathscr{H}$). Пусть, стало быть, $\mathfrak{H}$ — максимальный элемент из $\mathscr{H}$. Мы покажем, что множество $N = T - \bigcup_{K \in \mathfrak{H}} K$ локально пренебрежимо. Согласно предложению 2, достаточно убедиться в том, что $\mu^*(N \cap L) = 0$ для любого компактного множества L, или, иначе, что $\mu_L^*(N \cap L) = 0$. Будем рассуждать от противного. Допустим, следовательно, что $\mu_L^*(N \cap L) > 0$. Поскольку множество элементов $K \in \mathfrak{H}$, которые пересекаются с L, счетно,

*) Дальше мы увидим (§ 2, п. 2), что μ_α есть мера $\varphi_{K_\alpha} \cdot \mu$.

то множество $N \cap L$ μ_L-измеримо; значит, существует компактное множество J, содержащееся в $N \cap L$ и такое, что $\mu_L^*(J) > 0$. Пусть S — носитель ненулевой меры $(\mu_L)_J = \mu_J$; он содержится в N, мера μ_S является ненулевой, и $\operatorname{supp}(\mu_S) = S$ (гл. IV (2-е изд.), § 5, п. 7, лемма 2). Множество $\mathfrak{H} \cup \{S\}$ принадлежит, стало быть, $\mathscr{H}$, что противоречит предположению о максимальности $\mathfrak{H}$. Тем самым доказано существование измельчения.

B) *Доказательство формулы* (7)

Для любого $\alpha \in A$ имеем $\mu_\alpha^*(f) = \mu_{K_\alpha}^*(f_{K_\alpha}) = \mu^*(f\varphi_{K_\alpha})$; согласно формуле (3) из п. 3 и предложению 2а) п. 2 эти формулы показывают, что заграждение $\sum_{\alpha \in A} \mu_\alpha^*$ мажорировано посредством μ^*, и значит, семейство $(\mu_\alpha)_{\alpha \in A}$ суммируемо (п. 7, предл. 7). Стало быть, достаточно показать, что $\mu = \sum_{\alpha \in A} \mu_\alpha$, т. е. установить формулу

$$\mu_K^* = \sum_{\alpha \in A} (\mu_\alpha)_K^* \tag{8}$$

для любого компактного подмножества K из T. Но если K фиксировано, то множество A' тех $\alpha \in A$, для которых K_α пересекает K, счетно. Пусть $g \in \mathscr{F}_+(K)$; имеем $g^0 = g^0\varphi_N + \sum_{\alpha \in A} g^0\varphi_{K_\alpha}$, и $g^0\varphi_{K_\alpha} = 0$ для $\alpha \in A - A'$ стало быть, в силу предложения 4 п. 5 имеем $\mu^*(g^0) = \sum_{\alpha \in A} \mu^*(g^0\varphi_{K_\alpha})$, откуда

$$\mu_K^*(g) = \mu^*(g^0) = \sum_{\alpha \in A} \mu^*(g^0\varphi_{K_\alpha}) = \sum_{\alpha \in A} \mu_\alpha^*(g^0) = \sum_{\alpha \in A} (\mu_\alpha)_K^*(g);$$

тем самым формула (8) доказана.

C) *Измеримость*

Для того чтобы функция g, определенная на T, была μ-измерима, необходимо и достаточно, чтобы она была μ_α-измерима для любого $\alpha \in A$ (п. 7, предл. 8); но это равносильно утверждению, что g_{K_α} μ_{K_α}-измерима для любого $\alpha \in A$ (п. 5, пример), что и требовалось доказать.

Как и в предложении 14 гл. IV (2-е изд.), § 5, п 9, можно считать компакты K_α принадлежащими некоторому заранее заданному μ-плотному множеству компактных подмножеств из T Нам

понадобится только следующий результат, который мы установим непосредственно.

Предложение 10. *Если g есть μ-измеримое отображение со значениями в топологическом (отделимом или нет) пространстве G, то существует такое μ-измельчение $(L_\beta)_{\beta \in B}$ пространства T, что сужения g_{L_β} непрерывны для всех $\beta \in B$.*

Рассмотрим измельчение $(K_\alpha)_{\alpha \in A}$ пространства T относительно μ. Поскольку отображение g измеримо, то для каждого $\alpha \in A$ существует разбиение K_α на последовательность $(K_{\alpha n})$ компактных множеств и на локально пренебрежимое множество N_α такое, чтобы сужение g на каждое из множеств $K_{\alpha n}$ было непрерывно. Тогда семейство $(K_{\alpha n})_{(\alpha, n) \in A \times \mathbf{N}}$ и будет искомым. В самом деле, оно локально счетно, а множество $N' = N \cup (\bigcup_\alpha N_\alpha)$ локально пренебрежимо, поскольку компактное множество имеет с множествами N_α не более чем счетное множество пересечений.

Схолия. Пусть $(K_\alpha)_{\alpha \in A}$ — измельчение пространства T и пусть $N = T - \bigcup_\alpha K_\alpha$. Обозначим через T' локально компактное пространство, полученное в результате наделения T топологией, являющейся суммой топологий подпространств K_α и какой-нибудь локально компактной топологии на N (если не оговаривается противное, мы будем всегда наделять N дискретной топологией). Пусть для каждого $\alpha \in A$ через i_α обозначена каноническая инъекция множества K_α в T', а через μ'_α — мера на T' — образ меры μ_{K_α} при отображении i_α. Семейство (μ'_α) суммируемо: в самом деле, если f — непрерывная функция на T' с компактным носителем, то $\operatorname{supp}(f)$ пересекается с K_α лишь для конечного числа индексов α. Положим $\mu' = \sum_{\alpha \in A} \mu'_\alpha$. Множество N локально пренебрежимо относительно μ', поскольку оно является таковым относительно μ'_α (предл. 9); поэтому семейство $(K_\alpha)_{\alpha \in A}$ есть μ'-измельчение T'. Но мера, индуцированная мерой μ' на K_α, является, очевидно, мерой μ_{K_α}, и (7) в применении к μ и μ', показывает, что $\mu^* = \mu'^*$. Точно так же последнее утверждение предложения, примененное к μ и μ', показывает, что *измеримые отображения будут одними и теми же для мер μ и μ'.*

Эти два свойства позволяют сводить почти всю теорию интегрирования относительно μ к теории, построенной на локально компактных пространствах. Эти рассмотрения будут развиты в п. 10.

Приведем другое применение понятия измельчения:

Предложение 11. *Пусть X есть μ-измеримое подмножество из T. Существует такое локально счетное семейство $(L_\alpha)_{\alpha\in A}$ попарно не пересекающихся компактных множеств из X, что множество $X - \bigcup_{\alpha\in A} L_\alpha$ локально μ-пренебрежимо. Если при этом X является объединением последовательности (X_n) таких измеримых множеств, что $\mu^*(X_n) < +\infty$, то множество B тех $\alpha\in A$, для которых $\mu^*(L_\alpha)\neq 0$, счетно, а множество $X - \bigcup_{\beta\in B} L_\beta$ локально μ-пренебрежимо.*

Пусть f — характеристическая функция множества X и пусть $(K_\alpha)_{\alpha\in A}$ — такое измельчение пространства T, что сужение функции f на каждое из K_α непрерывно (предл. 10). Тогда множество $L_\alpha = K_\alpha \cap X$ компактно при любом $\alpha\in A$, и $(L_\alpha)_{\alpha\in A}$ и будет искомым семейством. Перейдем ко второму утверждению; можно, очевидно, предположить, что измеримые множества X_n не пересекаются, и достаточно доказать утверждение для каждого из них. Иначе говоря, не меняя обозначений, мы можем предположить, что $\mu^*(X) < +\infty$. Тогда множество B тех $\alpha\in A$, для которых $\mu^*(L_\alpha) > 0$, счетно, и нам остается только доказать, что множество $N = \bigcup_{\alpha\in A-B} L_\alpha$ локально пренебрежимо. Пусть теперь K — компактное множество; тогда, в силу того, что семейство $(L_\alpha)_{\alpha\in A}$ локально счетно, множество $K\cap N$ будет *счетным* подсемейством семейства $(K\cap L_\alpha)_{\alpha\in A-B}$, и значит, это множество локально пренебрежимо. Стало быть, это имеет место и для N (п. 2, предл. 2), и тем самым предложение доказано.

9. Верхний интеграл

Определение 11. *Для любой функции $f\in\mathscr{F}_+(T)$ верхним интегралом от f (относительно меры μ) называется конечное или бесконечное положительное число*

$$\mu^*(f) = \inf_g \mu^*(g), \tag{9}$$

где g пробегает множество полунепрерывных снизу функций, мажорирующих f.

Используются также обозначения $\int^* f(t)\, d\mu(t)$ и $\int^* f\, d\mu$. Когда T локально компактно, это определение совпадает с обычным определением (гл. V (2-е изд.), § 1, п. 1, предл. 4). Очевидно, $\mu_*(f) \leqslant \mu^*(f)$, причем равенство достигается для случая, когда f полунепрерывна снизу. Если A — подмножество из T, то вместо $\mu^*(\varphi_A)$ пишут $\mu^*(A)$, и это число называется *внешней мерой* множества A. Измеримые множества с конечной внешней мерой называются, как и в случае локально компактных пространств, *интегрируемыми множествами*.

Функция f со значениями в банаховом пространстве или в $\overline{\mathbf{R}}$, обладающая тем свойством, что $\mu^*(|f|) = 0$, называется *пренебрежимой*; множество $A \subset T$ называется *пренебрежимым*, если φ_A пренебрежима, т. е. если $\mu^*(A) = 0$. Как и в главе IV (2-е изд.), § 2, п. 3, вводится выражение *почти всюду*.

Предложение 12. *Функция* μ^* *есть заграждение на* T.

Свойства a), b), c) определения 1 из п. 1 очевидны. Доказательство свойства d) идентично доказательству теоремы 3 из гл. IV (2-е изд.), § 1, п. 3, с учетом предложений 4 и 5a).

Следствие. *Функция f со значениями в банаховом пространстве или в $\overline{\mathbf{R}}$ пренебрежима в том и только том случае, если $f(t) = 0$ почти всюду.*

Сразу же приходим к случаю, когда функция положительна. А тогда доказательство идентично доказательству теоремы 1 из главы IV (2-е изд.), § 2, п. 3.

Предложение 13. *Для любого подмножества $A \subset T$ число $\mu^*(A)$ есть нижняя грань внешних мер открытых множеств, содержащих A.*

Доказательство идентично доказательству предложения 19 гл. IV (2-е изд.), § 1, п. 4.

Определение 12. *Функция f, определенная на T и принимающая значения в банаховом пространстве или в $\overline{\mathbf{R}}$, называется модерантной относительно меры μ, или μ-модерантной, если она*

обращается в нуль на дополнении счетного объединения открытых интегрируемых множеств. Подмножество A из T называется модерантным, если функция φ_A модерантна. Мера μ называется модерантной, если μ-модерантна функция 1.

Например, в силу того, что заграждение $\mu^\bullet$ локально ограничено, любое компактное подмножество $K \subset T$ содержится в открытом множестве V, для которого $\mu^\bullet(V) < +\infty$; стало быть, функция, обращающаяся в нуль вне некоторого компактного множества, модерантна. Пренебрежимая функция также модерантна. На рассматриваемую ситуацию без труда распространяются замечания, сопровождающие определение 2 гл. V (2-изд.), § 1, п. 2. В частности, сумма последовательности положительных модерантных функций модерантна.

Замечания. 1) На пространстве Линделёфа T (Общая топ. (3-е изд.), гл. IX, Приложение 1, опр. 1) и, в частности, на суслинском пространстве всякая мера модерантна. В самом деле, открытые множества конечной меры образуют покрытие пространства T, из которого можно выделить счетное покрытие T.

2) Следует иметь в виду, что из существования последовательности борелевских множеств конечной меры относительно μ, составляющих в объединении T, не вытекает, вообще говоря, существования последовательности *открытых* множеств конечной меры, составляющих в объединении T (иными словами, не вытекает, что μ модерантна). См. упр. 8.

Предложение 14. *Если функция $f \in \mathscr{F}_+(T)$ μ-модерантна, то $\mu^*(f) = \mu^\bullet(f)$; если f не является μ-модерантной, то $\mu^*(f) = +\infty$.*

Если $\mu^*(f) < +\infty$, то найдется такая полунепрерывная снизу функция $g \geqslant f$, что $\mu^\bullet(g) < +\infty$. Пусть для любого $n \in \mathbf{N}$ через G_n обозначено множество тех $t \in T$, для которых $g(t) > 1/n$; множество G_n открыто, и мы имеем $\mu^\bullet(G_n) \leqslant n\mu^\bullet(g) < +\infty$; значит, f обращается в нуль вне объединения множеств G_n; стало быть, функция f модерантна.

Покажем далее, что μ^* и $\mu^\bullet$ имеют для модерантных функций одно и то же значение. Поскольку μ^* и $\mu^\bullet$ являются заграждениями, достаточно установить соотношение $\mu^*(f) = \mu^\bullet(f)$ для положительной функции f, мажорированной некоторой константой M и обращающейся в нуль вне некоторого открытого множества G конечной меры, что мы сейчас и сделаем.

Мера μ есть верхняя грань в $\mathscr{M}(T)$ фильтрующегося по возрастанию семейства $(\mu_i)_{i \in I}$ мер с компактным носителем: это сразу

же следует из предложения 9 п. 8. Обозначим через g полунепрерывную снизу функцию на T, заключенную между f и полунепрерывной снизу функцией $M\varphi_G$. Положим $\nu_i = \mu - \mu_i$; тогда $\mu^\cdot = \mu_i^\cdot + \nu_i^\cdot$ (п. 2, замечание 1), и следовательно,

$$\mu^\cdot(g) - \mu^\cdot(f) = (\mu_i^\cdot(g) - \mu_i^\cdot(f)) + (\nu_i^\cdot(g) - \nu_i^\cdot(f)) \leqslant$$
$$\leqslant (\mu_i^\cdot(g) - \mu_i^\cdot(f)) + \nu_i^\cdot(M\varphi_G).$$

Имеем $\nu_i^\cdot(M\varphi_G) = \mu^\cdot(M\varphi_G) - \mu_i^\cdot(M\varphi_G)$ и $\mu^\cdot(M\varphi_G) = \sup \mu_i^\cdot(M\varphi_G)$ (п. 7, предл. 6); стало быть, при надлежащем выборе i число $\nu_i^\cdot(M\varphi_G)$ может быть сделано сколь угодно малым. Таким образом, все сводится к доказательству того, что для любого числа $c > 0$ и любого индекса $i \in I$ найдется полунепрерывная снизу функция g, заключенная между f и $M\varphi_G$ и такая, что $\mu_i^\cdot(g) - \mu_i^\cdot(f) \leqslant c$. Пусть L — компактный носитель меры μ_i, а λ есть мера $(\mu_i)_L$; так как μ_i сосредоточена на L, то $\mu_i^\cdot(h) = \mu_i^\cdot(h\varphi_L) = \lambda^\cdot(h_L)$ для любой функции $h \in \mathscr{F}_+(T)$ (п. 1, лемма 1, и п. 2, предл. 2), следовательно,

$$\mu_i^\cdot(g) - \mu_i^\cdot(f) = \lambda^\cdot(g_L) - \lambda^\cdot(f_L).$$

Но L компактно; значит, $\lambda^\cdot = \lambda^*$, откуда мы можем заключить, что существует полунепрерывная снизу функция h, определенная на L, мажорирующая f_L и такая, что $\lambda^\cdot(h) \leqslant \lambda(f_L) + c$. Поскольку множество L замкнуто в T, то функция k, равная h на L и $+\infty$ на $T - L$, полунепрерывна снизу на T и мажорирует f, и мы имеем $\lambda^\cdot(k_L) = \lambda^\cdot(h) \leqslant \lambda^\cdot(f_L) + c$. Остается только положить $g = \inf(k, M\varphi_G)$; тогда g полунепрерывна снизу, мажорирует f и

$$\mu_i^\cdot(g) \leqslant \mu_i^\cdot(k) = \lambda^\cdot(k_L) \leqslant \lambda^\cdot(f_L) + c = \mu_i^\cdot(f) + c.$$

Следствие 1. *Для того чтобы функция f была пренебрежима, необходимо и достаточно, чтобы она была локально пренебрежима и модерантна.*

Следствие 2. *Для того чтобы функция f была локально пренебрежима, необходимо и достаточно, чтобы для любого $x \in T$ существовала такая окрестность V, что $f\varphi_V$ пренебрежима.*

В самом деле, если это свойство удовлетворяется, $f\varphi_K$ пренебрежима для любого компактного множества K, и значит, f локально пренебрежима (п. 2, предл. 2). Обратно, допустим, что f

локально пренебрежима и что x — точка из T; для этой точки существует открытая окрестность V конечной меры. Тогда функция $f\varphi_V$ локально пренебрежима и модерантна, а значит, пренебрежима.

Следствие 3. *Пусть f — модерантная функция, определенная на T. Существует такая последовательность (K_n) попарно не пересекающихся компактных подмножеств и такое пренебрежимое множество H, что* $f = f\varphi_H + \sum_n f\varphi_{K_n}$.

В самом деле, пусть G — множество, являющееся счетным объединением таких открытых интегрируемых множеств, что f обращается в нуль вне G; тогда G будет объединением последовательности (K_n) попарно не пересекающихся компактных множеств и некоторого локально пренебрежимого множества H (п. 8, предл. 11); но H модерантно, и значит, пренебрежимо.

Следствие 4. *Если меры μ и ν на T удовлетворяют условию $\mu^* = \nu^*$, то $\mu = \nu$.*

В самом деле, равенство $\mu^* = \nu^*$ влечет $\mu^\cdot(f) = \nu^\cdot(f)$ для любой положительной функции f, модерантной относительно μ и ν, а стало быть, и для любой положительной функции с компактным носителем. Отсюда выводим $\mu^\cdot = \nu^\cdot$ (п. 2, предл. 2), а затем $\mu = \nu$ (п. 2, следствие из предл. 2).

Следствие 5. *Если μ есть модерантная мера на T, то существует такая последовательность $(\mu_n)_{n\in\mathbf{N}}$ мер с компактным носителем, что* $\mu = \sum_{n\in\mathbf{N}} \mu_n$.

Постоянная функция 1, по условию, μ-модерантна. Применим к случаю $f = 1$ следствие 3; тогда существует такая последовательность $(K_n)_{n\in\mathbf{N}}$ попарно не пересекающихся компактных подмножеств из T, что $1 = \sum_{n\in\mathbf{N}} \varphi_{K_n}$ μ-почти всюду. Обозначим через μ_n меру, определенную на K_n посредством меры μ_{K_n} (п. 3, пример 2). Известно (п. 6, замечание 2), что μ_n имеет компактный носитель и что $\mu_n^\cdot(f) = \mu^\cdot(f\varphi_{K_n})$ для $f \in \mathscr{F}_+(T)$. Но f равно $\sum_{n\in\mathbf{N}} f\varphi_{K_n}$ μ-почти всюду, откуда $\mu^\cdot(f) = \sum_{n\in\mathbf{N}} \mu^\cdot(f\varphi_{K_n}) = \sum_{n\in\mathbf{N}} \mu_n^\cdot(f)$. Из этого выводим, что $\mu = \sum_{n\in\mathbf{N}} \mu_n$ (п. 7, предл. 7).

10. Теория интегрирования

Определение 13. *Пусть* $p \in [1, +\infty[$; *через* $\overline{\mathscr{L}}^p(T, \mu)$ (*соответственно* $\overline{\mathscr{L}}^p_F(T, \mu)$, *если* F — *банахово пространство*) *обозначается множество отображений* f *пространства* T *в* $\overline{\mathbf{R}}$ (соответственно *в* F), μ-*измеримых и таких, что* $\mu^*(|f|^p) < +\infty$. *Через* $\mathscr{L}^p(T, \mu)$ (*соответственно* $\mathscr{L}^p_F(T, \mu)$) *обозначается множество* μ-*модерантных элементов из* $\overline{\mathscr{L}}^p(T, \mu)$ (соответственно *из* $\overline{\mathscr{L}}^p_F(T, \mu)$).

Положим $\overline{N}_p(f) = (\mu^*(|f|^p))^{1/p}$, $N_p(f) = (\mu^*(|f|^p))^{1/p}$. Обозначим через $\overline{N}_\infty(f)$ нижнюю грань чисел $k \geqslant 0$, для которых $|f| \leqslant k$ локально μ-почти всюду; если $\overline{N}_\infty(f) < +\infty$, то говорят, что f существенно ограничено. Множество измеримых существенно ограниченных отображений T в $\overline{\mathbf{R}}$ (соответственно в F) обозначается $\overline{\mathscr{L}}^\infty(T, \mu)$ (соответственно $\overline{\mathscr{L}}^\infty_F(T, \mu)$). Элементы из $\overline{\mathscr{L}}^1_F(T, \mu)$ (соответственно $\mathscr{L}^1_F(T, \mu)$) называются существенно интегрируемыми функциями (соответственно интегрируемыми функциями) со значениями в F.

Для случая комплексной меры μ полагаем $\overline{\mathscr{L}}^p_F(T, \mu) = \overline{\mathscr{L}}^p_F(T, |\mu|)$ и $\mathscr{L}^p_F(T, \mu) = \mathscr{L}^p_F(T, |\mu|)$. Введенные выше обозначения принимают часто сокращенную форму: $\overline{\mathscr{L}}^p_F(\mu)$, $\overline{\mathscr{L}}^p_F$ или $\overline{\mathscr{L}}^p(\mu)$, $\overline{\mathscr{L}}^p$, но только в случае, если это не ведет к недоразумениям.

Мы видели в п. 8 (схолия), что можно построить локально компактное пространство T', имеющее то же самое базисное множество, что и T, а топологию — более сильную, чем T, и наделить T' такой мерой μ', чтобы μ-измеримые и μ'-измеримые функции были одними и теми же и чтобы существенные верхние интегралы от положительных функций относительно μ и μ' были равны. Из этого следует, что множества $\overline{\mathscr{L}}^p_F(\mu)$ и $\overline{\mathscr{L}}^p_F(\mu')$ идентичны для $1 \leqslant p \leqslant +\infty$ *). Отсюда без дополнительного доказательства получаем также, что $\overline{\mathscr{L}}^p_F(\mu)$ есть векторное пространство и что

*) Отметим, что пространство $\mathscr{L}^p_F(\mu)$ содержится в $\mathscr{L}^p_F(\mu')$ но, вообще говоря, отлично от него.

функция $\overline{N}_p$ есть полунорма на $\overline{\mathscr{L}}^p_F(\mu)$, относительно которой это пространство полно.

Пусть f — элемент из $\overline{\mathscr{L}}^p_F$ $(1 \leqslant p < \infty)$; так как $\mu^*(|f|^p) = \mu'^*(|f|^p) < +\infty$, то согласно предложению 7 гл. V (2-е изд.), § 1, п. 2, f обращается в нуль вне объединения последовательности компактных подмножеств из T' и локально μ'-пренебрежимого множества; а поскольку последнее множество локально μ-пренебрежимо и любое множество, компактное в T', компактно в T, то отсюда выводим, что функция f равна локально μ-почти всюду μ-модерантной функции. Обозначим через $\overline{\mathscr{N}}_F$ (соответственно $\mathscr{N}_F$) пространство локально μ-пренебрежимых (соответственно μ-пренебрежимых) функций; тогда $\overline{\mathscr{L}}^p_F = \mathscr{L}^p_F + \overline{\mathscr{N}}_F$ и $\mathscr{N}_F = \mathscr{L}^p_F \cap \overline{\mathscr{N}}_F$ (п. 9, следствие 1 из предл. 14). Таким образом, пространство $\overline{\mathscr{L}}^p_F/\overline{\mathscr{N}}_F$ отождествляется канонически с $\mathscr{L}^p_F/\mathscr{N}_F$, и при этом, как легко видеть, сохраняется норма; это факторпространство обозначается $L^p_F(\mu)$. Его можно интерпретировать как нормированное пространство, отнесенное каждому из полунормированных пространств $\overline{\mathscr{L}}^p_F(\mu)$ или $\mathscr{L}^p_F(\mu)$; в силу полноты пространства $\overline{\mathscr{L}}^p_F$ полны также L^p_F $\mathscr{L}^p_F$.

Множество функций f на T', принимающих значения в F, непрерывных и имеющих компактный носитель, плотно в $\overline{\mathscr{L}}^p_F(\mu') = \overline{\mathscr{L}}^p_F(\mu)$ (гл. IV (2-е изд.), § 3, п. 4, опр. 2). Воспользуемся обозначениями схолии из п. 8. Компактное подмножество из T' пересекается лишь с конечным числом компактных множеств K_α; поэтому всякая непрерывная функция f на T' с компактным носителем записывается в виде суммы

$$f = \sum_{\alpha \in A} f_\alpha + g,$$

где f_α при любом α является нуль-продолжением непрерывной функции на K_α, причем $f_\alpha = 0$ для всех индексов, кроме конечного числа, и где g локально μ-пренебрежима. Итак, получаем следующий результат.

Предложение 15. *Множество функций f со значениями в F, обладающих тем свойством, что носитель* $\operatorname{supp}(f)$ *компактен и сужение f на* $\operatorname{supp}(f)$ *непрерывно, плотно в $\overline{\mathscr{L}}^p_F(\mu)$ и в $\mathscr{L}^p_F(\mu)$ для $1 \leqslant p < +\infty$.*

Отметим, что эти функции *не являются* непрерывными функциями *на* T с компактным носителем.

Переходим к определению интеграла.

Предложение 16. *Существует, и притом единственное, непрерывное линейное отображение* $f \mapsto \int f\,d\mu$ *пространства* $\overline{\mathscr{L}}^1_F(\mu)$ *в* F, *обладающее следующим свойством.*

Если f *есть отображение вида* $t \mapsto g(t)\,a$, *где* $a \in F$ *и* g — *конечная положительная функция,* μ-*измеримая и такая, что* $\mu^*(g) < +\infty$, *то* $\int f\,d\mu = \mu^*(g) \cdot a$.

В самом деле, полунормированные пространства $\overline{\mathscr{L}}^1_F(\mu)$ и $\overline{\mathscr{L}}^1_F(\mu')$ идентичны. А так как $\mu^* = \mu''$, то отображение $f \mapsto \int f\,d\mu'$ удовлетворяет сформулированным условиям. С другой стороны, множество функций вида $f = g \cdot a$, рассматриваемых в условии предложения, *тотально* в $\overline{\mathscr{L}}^1_F(\mu')$ (гл. IV (2-е изд.), § 3, п. 5, предл. 10), откуда и следует единственность.

Говорят, что $\int f d\mu$ *есть интеграл от* f *относительно* μ, *и обозначают также этот вектор через* $\mu(f)$ *или* $\int f(t)\,d\mu(t)$.

Так как $\int f\,d\mu = \int f\,d\mu'$ для любой существенно интегрируемой функции f со значениями в F, то вся теория существенного интеграла распространяется на меры на отделимых пространствах без новых доказательств; из нее выводятся результаты применительно к обычному интегралу, если сузить рассмотрение до модерантных функций. Отметим, в частности, следующие результаты.

— Теорема 3 главы IV (2-е изд.), § 3, п. 4, ее распространение на $\overline{\mathscr{L}}^p_F$ и два ее следствия.

— Теорема 4 главы IV (2-е изд.), § 3, п. 5 (композиция с непрерывным линейным отображением) и ее следствия; предложения 9, 11 и 12 из того же пункта.

— Все результаты главы IV (2-е изд.), § 3, п. 6, относящиеся к структуре упорядоченного векторного пространства L^p.

— Все результаты главы IV (2-е изд.), § 3, п. 7, и в частности, теорема Лебега.

— Все результаты главы IV (2-е изд.), § 3, п. 8 о связях между пространствами L_F^p.

— Теорема 2 главы IV (2-е изд.), § 4, п. 3 (формулировка теоремы Лебега применительно к L_F^1).

— Неравенство Гёльдера (гл. IV (2-е изд.), § 6, п. 4, теорема 2) и его следствия.

— Связи между пространствами L_F^p, установленные в главе IV (2-е изд.), § 6, п. 5.

— Результаты о двойственности пространств L^p, установленные в главе V (2-е изд.), § 5, п. 8.

— Теорема Данфорда — Петтиса (гл. VI, § 2, п. 5, теорема 1), ее следствия 1 и 2 и предложение 10 главы VI, § 2, п. 6 (сопряженное к L_F^1).

Упражнения

1) Пусть T — некоторое множество и p — заграждение на T. Для любого подмножества A из T полагаем $p(A) = p(\varphi_A)$.

a) $p(A) \leqslant p(B)$, когда A содержится в B.

b) Для любой последовательности (A_n) (конечной или нет) подмножеств из T $\quad p(\bigcup_n A_n) \leqslant \sum_n p(A_n)$.

c) Для любой возрастающей последовательности $(A_n)_{n\geqslant 1}$ подмножеств из T $\quad p(\bigcup_n A_n) = \lim_{n\to\infty} p(A_n)$.

2) Пусть T — некоторое множество и p — заграждение на T. Говорят, что функция $f \in \mathscr{F}_+(T)$ (соотв. подмножество A из T) p-пренебрежимо, если $p(f) = 0$ (соотв. $p(A) = 0$).

a) Пусть f, $g \in \mathscr{F}_+(T)$ и t — такое положительное действительное число, что $f \leqslant tg$. Если g p-пренебрежима, то такова и функция f. Сумма и верхняя огибающая последовательности p-пренебрежимых функций p-пренебрежимы.

b) Всякое подмножество p-пренебрежимого множества p-пренебрежимо, равно как и объединение (конечной или бесконечной) последовательности p-пренебрежимых множеств.

c) Пусть $f \in \mathscr{F}_+(T)$. Для любого действительного конечного $a > 0$ обозначим через T_a множество тех $t \in T$, в которых $f(t) \geqslant a$. Показать, что $p(T_a) \leqslant a^{-1}p(f)$. Вывести отсюда, что f p-пренебрежима в том и только том случае, если множество тех $t \in T$, в которых $f(t) \neq 0$, p-пренебрежимо.

d) Пусть $f \in \mathscr{F}_+(T)$. Если $p(f)$ конечно, то множество тех $t \in T$, для которых $f(t)$ бесконечна, p-пренебрежимо.

e) Пусть f, $g \in \mathscr{F}_+(T)$. Если множество тех $t \in T$, в которых $f(t) \neq g(t)$, p-пренебрежимо, то $p(f) = p(g)$.

3) Пусть T — некоторое множество и p — заграждение на T. Для любой последовательности $(f_n)_{n\geqslant 1}$ элементов из $\mathscr{F}_+(T)$

$$p(\liminf_{n\to\infty} f_n) \leqslant \liminf_{n\to\infty} p(f_n).$$

4) Пусть T — некоторое множество, M — заграждение на T, E — действительное или комплексное банахово пространство и $p \geqslant 1$ — конечное действительное число. Обозначим через $\mathscr{F}$ множество отображений T в E, и для f из $\mathscr{F}$ или из $\mathscr{F}_+(T)$ положим $N_p(f) = M(|f|^p)^{1/p}$.

a) Для любой последовательности $(f_n)_{n\geqslant 1}$ элементов из $\mathscr{F}_+(T)$

$$N_p\Big(\sum_{n\geqslant 1} f_n\Big) \leqslant \sum_{n\geqslant 1} N_p(f_n).$$

b) Пусть $\mathscr{F}^p$ — множество тех $f \in \mathscr{F}$, для которых $N_p(f)$ конечно. Показать, что $\mathscr{F}^p$ есть векторное подпространство из $\mathscr{F}$ и N_p есть полунорма на $\mathscr{F}^p$. Показать, что множество $\mathscr{N}$ таких функций $f \in \mathscr{F}^p$, что $N_p(f) = 0$, равно множеству функций $f \in \mathscr{F}$, обращающихся в нуль вне некоторого M-пренебрежимого множества. Показать, что нормированное пространство $\mathscr{F}^p/\mathscr{N}$ полно (ср. гл. IV, § 3, п. 3).

5) Пусть T — некоторое множество. Обозначим через $\mathscr{B}_+(T)$ множество ограниченных действительных положительных функций на T, а через p_0 — отображение $\mathscr{B}_+(T)$ в интервал $[0, +\infty]$ из $\overline{\mathbf{R}}$, удовлетворяющее условиям a) — d) определения 1 п. 1. Для любой функции $f \in \mathscr{F}_+(T)$ обозначим через $p(f)$ верхнюю грань множества чисел $p_0(f_0)$, где f_0 пробегает множество ограниченных функций, мажорированных посредством f. Показать, что p есть заграждение на T. Рассмотреть вопрос для случая, когда $\mathscr{B}_+(T)$ заменяется множеством (конечных) действительных положительных функций на T.

6) Пусть T — некоторое множество, $\mathscr{J}_+$ — подмножество из $\mathscr{F}_+(T)$ и M — отображение $\mathscr{J}_+$ в $\overline{\mathbf{R}}_+$. Сделаем следующие предположения:

a) Для любого $f \in \mathscr{J}_+$ и любого действительного числа $t \geqslant 0$ функция tf принадлежит $\mathscr{J}_+$, и $M(tf) = tM(f)$.

b) Если f и g принадлежат $\mathscr{J}_+$, то это имеет место и для $f+g$, $\sup(f, g)$, $\inf(f, g)$, и $M(f+g) = M(f) + M(g)$.

c) Для любой возрастающей последовательности $(f_n)_{n\geqslant 1}$ элементов из $\mathscr{J}_+$ функция $f = \sup_n f_n$ принадлежит $\mathscr{J}_+$, и $M(f) = \lim_{n\to\infty} M(f_n)$.

Для любой функции $f \in \mathscr{F}_+(T)$ положим $p(f) = \inf_{g\in\mathscr{J}_+,\, g\geqslant f} M(g)$.

Показать, что p есть заграждение на T (ср. гл. IV, § 1, п. 3). Если f и g принадлежат $\mathscr{F}_+(T)$ и если A и B — подмножества из T, то $p(\sup(f, g)) + p(\inf(f, g)) \leqslant p(f) + p(g)$ и $p(A \cup B) + p(A \cap B) \leqslant p(A) + p(B)$.

7) На пространстве Линделёфа любая мера, любая функция и любое множество модерантны.

°8) Примем обозначения упр. 5, гл. IV, § 1. Напомним, что $\mu = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-3} \varepsilon_{(1/n,\, k/n^2)}$ и $\mu^*(D) = +\infty$. Показать, что $\mu^*(D) = 0$; вывести отсюда, что μ не модерантна, даже когда она является суммой ряда мер с непересекающимися компактными носителями. Показать, что существует разбиение $(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ пространства X на такие борелевские подмножества X_n, что $\mu^*(X_n)$ конечна для любого $n \in \mathbf{N}$.

9) Пусть T — топологическое пространство. Если λ и μ — такие положительные меры на T, что $\lambda^*(U) = \mu^*(U)$ для любого открытого множества U из T, то $\lambda = \mu$ (сначала доказать, что $\lambda^*(f) = \mu^*(f)$ для любой полунепрерывной снизу функции $f \geqslant 0$ на T, а затем — что $\lambda^* = \mu^*$).

10) Пусть T — топологическое пространство и μ — положительная мера на T; предположим, что T есть объединение последовательности μ-интегрируемых множеств T_n $(n \geqslant 0)$. Обозначим через $\mathfrak{C}$ алгебру подмножеств из T, порожденную компактными подмножествами.

a) Пусть X — лузинское пространство. Для любого μ-измеримого отображения f пространства T в X существует последовательность отображений f_m: $T \longrightarrow X$, обладающая следующими свойствами: α) для μ-почти всех $t \in T$ $f(t) = \lim_{m \to \infty} f_m(t)$; β) для любого целого m найдется такое конечное разбиение T на множества $A_j \in \mathfrak{C}$, что f_m постоянна на каждом из множеств A_j (свести к случаю, когда множества T_n образуют разбиение T, причем T_0 μ-пренебрежимо, T_n компактны при $n \geqslant 1$, а X — польское пространство).

b) Пусть $X_1, \ldots, X_p$ — лузинские пространства, Y — топологическое пространство, g — отображение $X_1 \times \ldots \times X_p$ в Y и f_i (для $1 \leqslant i \leqslant p$) — μ-измеримое отображение T в X_i. Предположим, что при $1 \leqslant i \leqslant p$ частичное отображение $x_i \longmapsto g(x_1, \ldots, x_p)$ X_i в Y непрерывно при любых $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_p$. Показать, что отображение $t \longmapsto g(f_1(t), \ldots, f_p(t))$ пространства T в Y μ-измеримо.

§ 2. Операции над мерами

Как и в предыдущем параграфе, T означает отделимое топологическое пространство, а μ — меру на T. Напомним, что все меры предполагаются положительными, если не оговаривается противное.

1. *Индуцированная мера на измеримом подпространстве*

Пусть X — подмножество из T и пусть ν — сужение отображения μ: $K \longmapsto \mu_K$ на множество компактных подмножеств из X; ясно, что ν есть предмера на X. С другой стороны, пусть $x \in X$ и пусть V — такая открытая окрестность точки x в T, что $\mu^*(V) <$

$< +\infty$; тогда, в силу замечания 3 § 1, п. 2,

$$\nu^*(X \cap V) = \sup_{\substack{K \text{ компактно} \\ K \subset X \cap V}} \mu^*(K) \leqslant \mu^*(V) < +\infty,$$

так что ν есть мера.

Когда X не является μ-измеримым, заграждения ν^* и $(\mu^*)_X$ не обязательно равны, и тогда мера ν не представляет интереса.

Определение 1. *Пусть X есть μ-измеримое подмножество из T. Мерой, индуцированной мерой μ на подпространстве X, называется, и обозначается μ_X или $\mu \mid X$, сужение отображения $\mu: K \mapsto \mu_K$ на множество компактных подмножеств из X.*

Предложение 1. *Пусть X есть μ-измеримое подмножество из T. Заграждение $(\mu_X)^*$ равно заграждению $(\mu^*)_X$, индуцированному посредством μ^* на X (§ 1, п. 1). Иначе говоря, $(\mu_X)^*(g) = \mu^*(g^0)$ для любой функции $g \in \mathscr{F}_+(X)$.*

Пусть $f \in \mathscr{F}_+(X)$ и пусть f^0 есть нуль-продолжение функции f на T. Имеем $(\mu^*)_X(f) = \mu^*(f^0) = \sup_L \mu^*(f^0\varphi_L)$, где L пробегает множество компактных подмножеств из T (§ 1, п. 2, предл. 2); точно так же, $(\mu_X)^*(f) = \sup_K \mu_K^*(f_K) = \sup_K \mu^*(f^0\varphi_K)$, где K пробегает множество компактных подмножеств из X. Стало быть, все сводится к тому, чтобы показать, что $\mu^*(f^0\varphi_L) = \sup_K \mu^*(f^0\varphi_K)$ для любого компакта L из T, при условии, что K пробегает множество компактов из $L \cap X$. Итак, пусть (K_n) — такая возрастающая последовательность компактных множеств, содержащихся в $L \cap X$, что $(L \cap X) - \bigcup_n K_n$ локально μ-пренебрежимо (§ 1, п. 8, предл. 11); поскольку f^0 обращается в нуль вне X, то $f^0\varphi_L$ обращается в нуль вне $L \cap X$, и значит, равно локально почти всюду верхней огибающей последовательности $(f^0\varphi_{K_n})$. Это влечет равенство $\mu^*(f^0\varphi_L) = \sup_n \mu^*(f^0\varphi_{K_n})$, откуда и следует искомое.

Замечания. 1) Соотношение $(\mu_X)^* = (\mu^*)_X$ позволяет, не боясь путаницы, пользоваться обозначением μ_X^*, что мы и будем делать всюду в дальнейшем. Предыдущее предложение 1 и предложение 2 § 1, п. 2 показывают, что меры, обозначавшиеся до сих пор μ_K для компактного множества K, являются индуцированными мерами в смысле определения 1. Точно так же, если T локально компактно и если X есть локально компактное подпространство из T, то

указанное выше предложение 1 и предложение 1 гл. V (2-е изд.), § 7, п. 1 показывают, что определение 1 совпадает с определением гл. IV (2-е изд.), § 5, п. 7.

2) Определение 1 распространяется на случай, когда μ есть комплексная мера на T. Чтобы показать для этого случая, что предмера μ_X есть мера, достаточно заметить, что $|\mu_K| = |\mu|_K$ для любого компактного множества K из X (§ 1, п. 2).

В силу предложения 1 подмножество Y из X μ_X-измеримо (соответственно локально μ_X-пренебрежимо) в том и только том случае, если оно μ-измеримо (соответственно локально μ-пренебрежимо). Если Y μ_X-измеримо и, значит, μ-измеримо, то очевидно, индуцированные меры $(\mu_X)_Y$ и μ_Y равны на основании предложения 1 («транзитивность индуцированных мер»).

Замечание 3). Пусть X есть μ-измеримое подмножество из T. Согласно предложению 10 § 1, п. 8, примененному к $g = \varphi_X$, существует такое измельчение $(K_\alpha)_{\alpha \in A}$ пространства T, что $K_\alpha \subset X$ или $K_\alpha \subset \complement X$ для любого $\alpha \in A$. Если изменить топологию пространства T в соответствии с процессом, указанным в схолии § 1, п. 8, то пространство X', полученное в результате наделения пространства X топологией, индуцированной топологией пространства T', локально компактно, и с мерой μ (соотв. μ_X) можно связать такую меру μ' (соотв. ν) на T' (соотв. X'), чтобы она имела тот же существенный верхний интеграл, что и μ (соотв. μ_X): это влечет $\mu'_X = \nu$. Так как локально пренебрежимые множества, измеримые отображения и существенно интегрируемые функции со значениями в банаховом пространстве совпадают для μ и μ', а также для μ_X и μ'_X, то теория интегрирования относительно индуцированной меры оказывается сведенной к теории, изучавшейся в главе V (2-е изд.), § 7 для частного случая локально компактных пространств. Перенесение результатов мы предоставляем читателю.

2. *Меры, определенные посредством числовых плотностей*

Определение 2. *Функция f, определенная на T и принимающая значения в $\overline{\mathbf{R}}$ или в банаховом пространстве, называется локально μ-интегрируемой, если f μ-измерима и если для любой точки $x \in T$ имеется такая окрестность V, что $\mu^*(|f| \varphi_V) < +\infty$.*

Это определение совпадает с тем, которое было дано в гл. V (2-е изд.), § 5, п. 1 в случае, когда T локально компактно.

Пусть f — положительная локально μ-интегрируемая функция; отображение $K \mapsto f_K \cdot \mu_K$ есть предмера (гл. V (2-е изд.), § 7, п. 1, следствие 2 из теоремы 1), которую мы обозначим $f \cdot \mu$.

Предложение 2. *Если f — положительная локально μ-интегрируемая функция, то для любой функции $g \in \mathscr{F}_+(T)$ выполняется соотношение*

$$(f \cdot \mu)^{\cdot}(g) = \mu^{\cdot}(fg). \tag{1}$$

В самом деле, в силу определения $f \cdot \mu$ и предложения 3 гл. V (2-е изд.), § 5, п. 3 для любого компактного множества K из T имеем

$$(f \cdot \mu)^{\cdot}_K(g_K) = (f_K \cdot \mu_K)^{\cdot}(g_K) = \mu^{\cdot}_K(f_K g_K) = \mu^{\cdot}_K((fg)_K).$$

Предложение 2 получается отсюда переходом к верхней грани по K.

Пусть теперь $x \in T$ и пусть V — такая окрестность x, что $\mu^{\cdot}(f\varphi_V) < +\infty$ (опр. 2); тогда $(f \cdot \mu)^{\cdot}(V) = \mu^{\cdot}(f\varphi_V) < +\infty$, и стало быть, $f \cdot \mu$ есть мера.

Определение 3. *Пусть f — положительная локально μ-интегрируемая функция. Мера $f \cdot \mu$: $K \mapsto f_K \cdot \mu_K$ называется мерой с плотностью f относительно μ, или мерой-произведением μ на функцию f. Всякая мера вида $f \cdot \mu$, где f положительна и локально интегрируема, называется мерой с базисом μ.*

Замечания. 1) Определение $f \cdot \mu$ распространяется на случай, когда f — локально интегрируемая комплексная функция; тогда $|f \cdot \mu| = |f| \cdot \mu$, откуда сразу же следует, что $f \cdot \mu$ есть мера, а не просто предмера. Для определенных таким способом комплексных мер сохраняется выражение: «меры с базисом μ».

2) Точно так же, если θ — комплексная мера, то будем говорить, что f локально θ-интегрируема, если она локально $|\theta|$-интегрируема, и определим меру $f \cdot \theta$: $K \mapsto f_K \cdot \theta_K$. Имеем $|f \cdot \theta| = |f| \cdot |\theta|$ (гл. V (2-е изд.), § 5, п. 2, предл. 2). В этом пункте мы оставляем в стороне все, что касается неположительных мер.

Предложение 3. *Пусть ν — мера на T. Для того чтобы ν имела вид $f \cdot \mu$, где f — положительная локально μ-интегрируемая функция, необходимо и достаточно, чтобы всякое компактное*

μ-пренебрежимое множество было ν-пренебрежимо. Если f' — еще одна локально μ-интегрируемая функция, удовлетворяющая условию $\nu = f' \cdot \mu$, то $f = f$ локально μ-почти всюду.

Достаточность очевидна (предл. 2). Обратно, предположим, что любое μ-пренебрежимое компактное множество ν-пренебрежимо. Введем измельчение $(K_\alpha)_{\alpha \in A}$ пространства T относительно меры $\mu + \nu$ и положим $N = T - \bigcup_{\alpha \in A} K_\alpha$. Ясно, что $(K_\alpha)_{\alpha \in A}$ является измельчением относительно μ и ν по отдельности, и значит, предложение 9 § 1, п. 8 позволяет вывести следующие соотношения, справедливые для любой функции $g \in \mathscr{F}_+$:

$$\mu^*(g) = \sum_{\alpha \in A} \mu^*_{K_\alpha}(g_{K_\alpha}),$$

$$\nu^*(g) = \sum_{\alpha \in A} \nu^*_{K_\alpha}(g_{K_\alpha}).$$

Рассмотрим компактное множество $C \subset K_\alpha$, которое μ_{K_α}-пренебрежимо; тогда C локально μ-пренебрежимо, а значит, локально ν-пренебрежимо, и наконец, по определению ν, ν_{K_α}-пренебрежимо. Из теоремы Лебега — Никодима (гл. V (2-е изд.), § 5, п. 5, теорема 2) теперь следует, что ν_{K_α} имеет плотность f_α относительно μ_{K_α}. Пусть f есть функция, совпадающая с f_α на каждом из множеств K_α и обращающаяся в 0 на N; эта функция μ-измерима (гл. IV (2-е изд.), § 5, п. 10, предл. 16), и для любой функции $g \in \mathscr{F}_+$ согласно приведенным выше соотношениям и согласно предложению 3 гл. V (2-е изд.), § 5, п. 3 имеем

$$\nu^*(g) = \sum_{\alpha \in A} \nu^*_{K_\alpha}(g_{K_\alpha}) = \sum_{\alpha \in A} \mu^*_{K_\alpha}(f_\alpha g_{K_\alpha}) = \sum_{\alpha \in A} \mu^*_{K_\alpha}((fg)_{K_\alpha}) = \mu^*(fg).$$

Отсюда прежде всего следует, что f локально μ-интегрируема: если x — точка из T и V — такая ее окрестность, что $\nu^*(V) < +\infty$, то $\mu^*(f\varphi_V) < +\infty$. Далее, предложение 2 показывает, что меры ν и $f \cdot \mu$ имеют один и тот же существенный верхний интеграл. Стало быть, они равны между собой (§ 1, п. 2, следствие из предл. 2). А поскольку единственность f, начиная со случая компактных пространств, очевидна, то предложение доказано.

Замечание 3). Теория интегрирования относительно меры $\nu = f \cdot \mu$ сразу же сводится к теории, изложенной в главе V. В самом деле, пусть $(K_\alpha)_{\alpha \in A}$ — измельчение T относительно μ,

а значит, и относительно ν, и пусть T' — локально компактное пространство, определенное в схолии § 1, п. 8; мы можем соотнести μ (соотв. ν) некоторую меру μ' (соотв. ν') на T' так, чтобы измеримые функции, существенно интегрируемые функции со значениями в банаховом пространстве и существенные верхние интегралы от положительных функций были одними и теми же для μ и μ' (соотв. для ν и ν'). Следовательно, функция f μ'-измерима; она также локально μ'-интегрируема, поскольку T' локально компактно и компактное подмножество из T' пересекается лишь с конечным числом компактных множеств K_α ($\alpha \in A$). Наконец, соотношение $\nu'^{\cdot}(g) = \nu^{\cdot}(g) = \mu^{\cdot}(fg) = \mu'^{\cdot}(fg)$ показывает, что $\nu' = f \cdot \mu'$ (гл. V (2-е изд.), § 5, п. 3, предл. 3). Мы предоставляем читателю перенести результаты из гл. V (2-е изд.), § 5.

3. *Образ меры*

Определение 4. *Отображение* π *пространства* T *в топологическое пространство* X *называется* μ*-собственным, если оно* μ*-измеримо и если любая точка* $x \in X$ *обладает такой окрестностью* V, *что* $\mu^{\cdot}(\pi^{-1}(V)) < +\infty$.

Замечания. 1) В случае, когда T и X локально компактны, это определение эквивалентно определению гл. V (2-е изд.), § 6, п. 1.

2) Непрерывное собственное отображение (Общая топ. (4-е изд.), гл. 1, § 10, п. 1, опр. 1) пространства T в X является μ-собственным относительно любой меры μ. В самом деле, пусть $x \in X$; так как множество $\pi^{-1}(x)$ компактно (там же, п. 2, теорема 1), то оно имеет открытую окрестность H, для которой $\mu^{\cdot}(H) < \infty$. Положим $V = X - \pi(T - H)$; так как π замкнуто, то V открыто в X, содержит x, и $\pi^{-1}(V) \subset H$, откуда $\mu^{\cdot}(\pi^{-1}(V)) \leqslant \mu^{\cdot}(H) < +\infty$.

3) Если μ ограничена, то всякое μ-измеримое отображение T в X будет μ-собственным.

4) В случае комплексной меры θ на T будем говорить, что π θ-собственно, если π есть собственное отображение относительно положительной меры $|\theta|$.

Предложение 4. *Пусть* π *есть* μ*-собственное отображение пространства* T *в топологическое пространство* X. *На* X *существует, и притом единственная, мера* ν, *обладающая тем свойством, что* $\nu^{\cdot}$ *равно заграждению — образу* $\pi(\mu^{\cdot})$ (§ 1, п. 1), *или, иначе,* $\nu^{\cdot}(g) = \mu^{\cdot}(g \circ \pi)$ *для любого* $g \in \mathscr{F}_+(X)$.

Единственность очевидна (§ 1, п. 2, следствие из предл. 2). Чтобы установить существование, мы изучим вначале случай, когда μ имеет носителем такое компактное множество K, что сужение отображения π на K непрерывно. Тогда $L = \pi(K)$ компактно; пусть π' — непрерывное отображение K в L, индуцированное отображением π, и пусть ν' — мера-образ $\pi'(\mu_K)$ на L, ν — мера на X, определенная посредством ν' (§ 1, п. 3, пример 2). Для любого $g \in \mathscr{F}_+(X)$ имеем

$$\nu^\cdot(g) = \nu'^\cdot(g_L) = \mu_K^\cdot(g_L \circ \pi') = \mu_K^\cdot((g \circ \pi)_K) =$$

$$= \mu^\cdot((g \circ \pi)_K^0) = \mu^\cdot(g \circ \pi)$$

(используем последовательно формулу (3) из § 1, п. 3; предл. 2 гл. V (2-е изд.), § 6, п. 2; определение $\mu_K^\cdot$ и тот факт, что μ имеет носителем K). Иначе говоря, $\nu^\cdot = \pi(\mu^\cdot)$.

Перейдем теперь к общему случаю; согласно предложениям 10 и 9 § 1, п. 8, μ есть сумма суммируемого семейства $(\mu_\alpha)_{\alpha \in A}$ таких мер с компактным носителем, что сужение π на носитель K_α меры μ_α непрерывно для любого $\alpha \in A$. Изученный выше частный случай позволяет связать с каждой мерой μ_α на T такую меру ν_α на X, что $\nu_\alpha^\cdot = \pi(\mu_\alpha^\cdot)$. Тогда для любого $g \in \mathscr{F}_+(X)$

$$\sum_{\alpha \in A} \nu_\alpha^\cdot(g) = \sum_{\alpha \in A} \mu_\alpha^\cdot(g \circ \pi) = \mu^\cdot(g \circ \pi).$$

Заграждение $\pi(\mu^\cdot)$ локально ограничено, поскольку π есть μ-собственное отображение; значит, семейство $(\nu_\alpha)_{\alpha \in A}$ суммируемо (§ 1, п. 7, предл. 7), и его сумма ν удовлетворяет требуемым условиям.

Определение 5. *Если π есть μ-собственное отображение пространства T в топологическое пространство X, то единственная мера ν на X, обладающая тем свойством, что $\nu^\cdot(g) = \mu^\cdot(g \circ \pi)$ для любого $g \in \mathscr{F}_+(X)$, называется мерой-образом меры μ при отображении π и обозначается $\pi(\mu)$.*

Пример. Пусть K — компактное подпространство пространства T, i — каноническая инъекция K в T, λ — мера на K; поскольку i непрерывно, а λ — ограниченная мера, то i является λ-собственным отображением. Формула (3) § 1, п. 3 показывает, что «мера на T, определенная посредством λ», есть мера-образ $i(\lambda)$.

Замечание 5). Если θ — действительная мера, а π есть θ-собственное отображение, то π является собственным для мер θ^+ и θ^-; и мы полагаем $\pi(\theta) = \pi(\theta^+) - \pi(\theta^-)$. Если θ — комплексная мера, а π есть θ-собственное отображение, то оно является собственным для действительных мер $\mathrm{Re}(\theta)$ и $\mathrm{Im}(\theta)$; в этом случае полагаем

$$\pi(\theta) = \pi(\mathrm{Re}(\theta)) + i\pi(\mathrm{Im}(\theta)).$$

Предложение 5. *Пусть π есть μ-собственное отображение пространства T в топологическое пространство X и пусть f — отображение X в топологическое пространство F (отделимое или нет). Для того чтобы f было $\pi(\mu)$-измеримо, необходимо и достаточно, чтобы $f \circ \pi$ было μ-измеримо.*

Вернемся к доказательству предложения 4, взяв прежде всего частный случай, рассмотренный вначале, с теми же обозначениями; отображение g измеримо относительно меры $\pi(\mu) = \nu$ в том и только том случае, если g_L ν'-измеримо (§ 1, п. 5, пример); но это равносильно утверждению, что $g_L \circ \pi' = (g \circ \pi)_K$ есть μ_K-измеримое отображение (гл. V (2-е изд.), § 6, п. 2, предл. 3), и окончательно, что $g \circ \pi$ есть μ-измеримое отображение (§ 1, п. 5, пример). Теперь перейдем к общему случаю, используя те же обозначения, что и в доказательстве предложения 4; функция f ν-измерима в том и только том случае, если она ν_α-измерима для любого $\alpha \in A$ (§ 1, п. 7, предл. 8), а значит, в том и только том случае, если $f \circ \pi$ μ_α-измеримо для любого $\alpha \in A$ (предыдущий частный случай), и наконец, в том и только том случае, если $f \circ \pi$ μ-измеримо (§ 1, п. 7, предл. 8).

Следствие. *Пусть X и Y — топологические пространства, π — μ-собственное отображение T в X и π' — $\pi(\mu)$-собственное отображение X в Y. Тогда отображение $\pi'' = \pi' \circ \pi$ является μ-собственным отображением и $\pi''(\mu) = \pi'(\pi(\mu))$* («транзитивность образов мер»).

В самом деле, π'' μ-измеримо (предл. 5). Положим $\mu' = \pi(\mu)$; заграждение — образ $\pi'(\mu'^{\cdot}) = \pi'(\pi(\mu^{\cdot}))$, очевидно, равен $\pi''(\mu^{\cdot})$. А так как он локально ограничен, то π'' μ-собственно. Тогда меры $\pi''(\mu)$ и $\pi'(\mu')$ имеют один и тот же существенный верхний интеграл, а значит, равны между собой.

Предложение 6. *Пусть π есть μ-собственное отображение пространства T в топологическое пространство X и пусть B есть*

π (μ)-измеримое подмножество из X. Положим $A = \pi^{-1}(B)$ и обозначим через π' отображение A в B, совпадающее с π на A. Тогда множество A μ-измеримо, отображения π_A и π' μ_A-собственны, и

$$(\pi(\mu))_B = (\pi_A(\mu_A))_B = \pi'(\mu_A). \tag{2}$$

Множество A μ-измеримо в силу предложения 5, примененного к φ_B; отображение π_A, очевидно, μ_A-измеримо по определению индуцированных мер (п. 1), и отсюда следует, что π' измеримо. Пусть f — элемент из $\mathscr{F}_+(B)$; обозначая при помощи нулевых степеней нуль-продолжения в X и в T, можем записать:

$$(\pi(\mu)_B)^\cdot(f) = \pi(\mu)^\cdot(f^0) = \mu^\cdot(f^0 \circ \pi) = \mu^\cdot((f \circ \pi')^0) = \mu_A^\cdot(f \circ \pi'),$$

откуда $(\pi(\mu)_B)^\cdot = \pi'(\mu_A^\cdot)$. А так как заграждение $(\pi(\mu)_B)^\cdot$ локально ограничено, то это верно и для $\pi'(\mu_A^\cdot)$; значит, π' μ_A-собственно. Меры $\pi'(\mu_A)$ и $(\pi(\mu))_B$ имеют один и тот же существенный верхний интеграл, и стало быть, равны. Второе соотношение устанавливается аналогичным образом.

Предложение 7. *Пусть T есть подпространство топологического пространства X и пусть i есть инъекция T в X.*

a) *Если μ — мера на T и i есть μ-собственное отображение, то мера $i(\mu)$ сосредоточена на T, и $(i(\mu))_T = \mu$.*

b) *Если λ — такая мера на X, что T λ-измеримо, то i является λ_T-собственным отображением, и $i(\lambda_T) = \varphi_T \cdot \lambda$.*

a) Положим $\nu = i(\mu)$; соотношение $\nu^\cdot(A) = \mu^\cdot(A \cap T)$, примененное к $A = X - T$, показывает, что ν сосредоточена на T. Соотношение $\nu_T = \mu$ есть частный случай соотношения (2), если взять $B = T = A$.

b) Пусть f — положительная функция, определенная на X; если положить $\mu = \lambda_T$, то $\mu^\cdot(f \circ i) = \lambda_T^\cdot(f_T) = \lambda^\cdot(f\varphi_T) \leqslant \lambda^\cdot(f)$ (предл. 1); отсюда следует, что i μ-собственно. С другой стороны, $\mu^\cdot(f \circ i)$ (соотв. $\lambda^\cdot(f\varphi_T)$) есть существенный верхний интеграл от f относительно $i(\mu)$ (соотв. $\varphi_T \cdot \lambda$). Стало быть, эти две меры равны между собой.

Замечание 6). Пусть π есть μ-собственное отображение пространства T в топологическое пространство X. Теория интегрирования относительно меры-образа $\nu = \pi(\mu)$ сводится следующим

образом к теории, изложенной в главе V (2-е изд.), § 6. Пусть $(K_\alpha)_{\alpha \in A}$ (соответственно $(L_\beta)_{\beta \in B}$) — измельчение T (соответственно X) относительно μ (соответственно ν) и пусть $N = T - \bigcup_{\alpha \in A} K_\alpha$, $P = X - \bigcup_{\beta \in B} L_\beta$. Мы можем предположить, что сужение π на каждое из K_α непрерывно (§ 1, п. 8, предл. 10). Пусть T', X' — локально компактные пространства, построенные, как в схолии из § 1, п. 8, и пусть μ' и ν' — меры на этих пространствах, соответствующие мерам μ и ν. Поскольку топология пространства T' есть сумма топологий подпространств K_α и дискретной топологии на N, то π является непрерывным отображением T' в X, и соотношение $\mu'^{\cdot}(g \circ \pi) = \mu^{\cdot}(g \circ \pi) = \nu^{\cdot}(g)$ (для $g \in \mathscr{F}_+(X)$) показывает, что π μ'-собственно и что $\pi(\mu') = \nu$. С другой стороны, тождественное отображение i пространства X в X' ν-собственно, и $i(\nu) = \nu'$. Отсюда следует, что π есть μ'-собственное отображение T' в X' и что образом меры μ' при отображении π будет ν' (следствие из предл. 5). Мы предоставляем читателю перенести результаты гл. V (2-е изд.), § 6.

4. *Поднятие мер*

Предложение 8. *Пусть T и X — топологические пространства и π — отображение T в X.*

a) *Пусть ν — ограниченная мера на X. Для того чтобы на T существовала такая мера μ, что отображение π μ-собственно и что $\pi(\mu) = \nu$, необходимо и достаточно, чтобы для любого числа $\varepsilon > 0$ существовало такое компактное множество $K_\varepsilon \subset T$, что сужение π на K_ε непрерывно и что $\nu^{\cdot}(X - \pi(K_\varepsilon)) < \varepsilon$.*

b) *Предположим, что π инъективно; и пусть μ и μ' — такие две меры на T, что π является собственным для μ и μ' и что $\pi(\mu) = \pi(\mu')$. Тогда $\mu = \mu'$.*

Докажем необходимость условия a). В самом деле, если π μ-собственно и $\pi(\mu) = \nu$, то соотношение $\mu^{\cdot}(1) = \nu^{\cdot}(1) < +\infty$ влечет ограниченность μ. Из предложения 2 § 1, п. 2, примененного к функции 1, следует существование такого компактного подмножества K из T, что $\mu^{\cdot}(T - K) < \varepsilon/2$. А поскольку π μ-измеримо, то найдется такое компактное множество $K_\varepsilon \subset K$, что сужение π на K_ε непрерывно и что $\mu^{\cdot}(K - K_\varepsilon) < \varepsilon/2$. Тогда (п. 3, предл. 4)

$$\nu^{\cdot}(X - \pi(K_\varepsilon)) = \mu^{\cdot}(T - \pi^{-1}(\pi(K_\varepsilon))) < \varepsilon.$$

Для доказательства достаточности условия а) рассмотрим сначала частный случай.

Лемма 1. *Пусть U и V — два компактных пространства и h — непрерывное отображение U на V. Тогда отображение $\lambda \mapsto h(\lambda)$ множества $\mathscr{M}_+(U)$ в $\mathscr{M}_+(V)$ сюръективно.*

В самом деле, пусть a — линейное отображение $f \mapsto f \circ h$ пространства $\mathscr{C}(V)$ в $\mathscr{C}(U)$; поскольку h сюръективно, то a есть изометрия пространства $\mathscr{C}(V)$ на подпространство H из $\mathscr{C}(U)$. Пусть θ — положительная мера на V; тогда $\theta \circ a^{-1}$ есть непрерывная линейная форма на H, продолжимая до линейной формы η на пространстве $\mathscr{C}(U)$ с той же нормой (в силу теоремы Хана — Банаха (Топ. вект. пр-ва, гл. II (2-е изд.), § 3, п. 2, следствие 1 из теоремы 1)), η есть мера на U, и мы имеем $\theta(f) = \eta(f \circ h)$ для любого $f \in \mathscr{C}(V)$, так что $\theta = h(\eta)$. Наконец, $\theta(1) = \|\theta\| = \|\eta\|$ и $\theta(1) = \eta(1)$; стало быть, η положительна (гл. V (2-е изд). § 5, п. 5, предл. 9).

Докажем теперь достаточность условия а). Это условие влечет существование такой последовательности $(K_n)_{n \geqslant 1}$ компактных подмножеств из T, что сужение отображения π на каждое из K_n непрерывно и $\nu^*(X - \pi(K_n)) < 1/n$ для любого n. Можно предположить, что последовательность (K_n) возрастает. Положим $L_n = \pi(K_n)$ и обозначим через ν'_n меру $\varphi_{L_n - L_{n-1}} \cdot \nu_{L_n}$ на L_n, условившись, что $L_0 = \varnothing$.

Поскольку сужение π_{K_n} непрерывно, найдется такая мера μ'_n на K_n, что $\pi_{K_n}(\mu'_n) = \nu'_n$ (лемма 1). Пусть μ_n — образ меры μ'_n при канонической инъекции K_n в T и пусть g — элемент из $\mathscr{F}_+(X)$. Используя последовательно тот факт, что ν сосредоточена на $\bigcup_n L_n$, предложение 4 § 1, п. 5, предложение 2, § 1, п. 2, предложение 4 п. 3 и, наконец, предложение 7 п. 3, получаем

$$\nu^*(g) = \sum_n \nu^*(\varphi_{L_n - L_{n-1}} g) = \sum \nu'^*_n(g_{L_n}) = \sum_n \mu'^*_n(g_{L_n} \circ \pi_{K_n}) =$$
$$= \sum_n \mu'^*_n((g \circ \pi)_{K_n}) = \sum_n \mu^*_n(g \circ \pi).$$

Взяв в этой формуле $g = 1$, видим, что семейство (μ_n) суммируемо и что его сумма есть ограниченная мера μ (§ 1, п. 7, предл. 7). Согласно предложению 5 п. 3, отображение π μ_n-измеримо для любого n, ибо π_{K_n} непрерывно; стало быть, оно μ'_n-измеримо;

отсюда следует, что π μ-измеримо (§ 1, п. 7, предл. 8), а значит, и μ-собственно, поскольку μ ограничена. Теперь приведенные выше соотношения показывают, что меры $\pi(\mu)$ и ν имеют один и тот же существенный верхний интеграл, и следовательно, они равны (§ 1, п. 2, следствие из предл. 2).

Предположим, наконец, что π инъективно, и докажем b). Пусть f — элемент из $\mathscr{F}_+(T)$; в силу инъективности π найдется такая функция $g \in \mathscr{F}_+(X)$, что $f = g \circ \pi$; тогда, согласно предложению 4 п. 3, полагая $\nu = \pi(\mu) = \pi(\mu')$, получаем

$$\mu^*(f) = \mu^*(g \circ \pi) = \nu^*(g) = \mu'^*(g \circ \pi) = \mu'^*(f).$$

Стало быть, меры μ и μ' имеют один и тот же существенный верхний интеграл, что влечет их равенство (§ 1, п. 2, следствие из предл. 2).

Замечание. Предположим, что π инъективно. И пусть θ — такая комплексная мера, что π θ-собственно и $\pi(\theta) = 0$; тогда $\theta = 0$. В самом деле, отделив действительные и мнимые части, сводим все к тому случаю, когда θ действительна. Тогда $\pi(\theta^+) = \pi(\theta^-)$, а значит, $\theta^+ = \theta^-$ (предл. 8) и, окончательно, $\theta = 0$.

Приведем важный частный случай, в котором условие a) из предложения 8 выполняется всегда.

Предложение 9. *Пусть T — суслинское пространство, X — отделимое пространство, π — непрерывное отображение T на X и ν — ограниченная мера на X. Тогда существует такая ограниченная мера μ на T, что $\pi(\mu) = \nu$.*

Из условий очевидным образом вытекает, что X — суслинское пространство.

Рассмотрим функцию множества c: $A \mapsto \nu^*(\pi(A))$ на $\mathfrak{P}(T)$. Отношение $A \subset B$ влечет $c(A) \leqslant c(B)$; если (A_n) есть возрастающая последовательность подмножеств из T и если $A = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} A_n$, то $c(A) = \sup_n c(A_n)$; это следует из того, что ν^* есть заграждение. Наконец, пусть $A \subset T$ и пусть $\varepsilon > 0$; выберем в X некоторое открытое множество G, содержащее $\pi(A)$ и такое, что $\nu^*(G) \leqslant \nu^*(\pi(A)) + \varepsilon$ (§ 1, п. 9, предл. 13); открытое множество $H = \pi^{-1}(G)$ из T содержит A, и мы имеем $c(H) \leqslant c(A) + \varepsilon$. Следовательно, функция c есть непрерывная справа емкость на T

(Общая топ., гл. IX (3-е изд.), § 6, п. 9, опр. 9), и теорема о емкостности (там же, теорема 5) влечет равенство $c(T) = \sup_K c(K)$, где K пробегает множество компактных подмножеств из T. Теперь из предложения 8 следует существование искомой меры μ.

5. *Произведение двух мер*

Пусть S и T — топологические пространства, наделенные соответственно (положительными) предмерами λ и μ, и пусть X — пространство-произведение $S \times T$. Пусть, далее, K — компактное подмножество из X; обозначим через A и B проекции K соответственно на S и T и положим

$$\nu_K = (\lambda_A \otimes \mu_B)_K. \tag{3}$$

Мы определяем тем самым предмеру на X. В самом деле, пусть L — компактное подмножество из X, содержащее K, и пусть C и D — две его проекции; имеем $A \subset C$, $B \subset D$; следовательно, используя транзитивность индуцированных мер и предложение 12 гл. V (2-е изд.), § 8, п. 5, получаем

$$(\nu_L)_K = ((\lambda_C \otimes \mu_D)_L)_K = (\lambda_C \otimes \mu_D)_K =$$
$$= ((\lambda_C \otimes \mu_D)_{A\times B})_K = (\lambda_A \otimes \mu_B)_K = \nu_K.$$

Определение 6. *Предмера* ν, *определенная соотношением* (3), *называется предмерой — произведением предмер* λ *и* μ *— и обозначается* $\lambda \otimes \mu$.

Это определение, очевидно, распространяется на случай, когда λ и μ — комплексные предмеры, и тогда $|\lambda \otimes \mu| = |\lambda| \otimes |\mu|$ (гл. III (2-е изд.), § 4, п. 2, предл. 3 и гл. IV (2-е изд.), § 5, п. 7, лемма 3).

Мы сохраним обозначения, принятые в главе III (2-е изд.), § 4 и в главе V (2-е изд.), § 8 относительно произведений мер и итерированных интегралов. В частности, если f и g — функции, определенные соответственно на S и на T и принимающие значения в $\overline{\mathbf{R}}_+$ или в $\mathbf{C}$, то функция $(s, t) \mapsto f(s)\, g(t)$ на $S \times T$ будет обозначаться $f \otimes g$.

Предложение 10. *Пусть* ν *— предмера — произведение предмер* λ *и* μ; *для любой функции* $f \in \mathscr{F}_+(S)$ *и любой функции*

$g \in \mathscr{F}_+(T)$ *имеем*

$$\nu^*(f \otimes g) = \lambda^*(f)\,\mu^*(g). \tag{4}$$

Предмера ν *есть единственная предмера на* $S \times T$, *удовлетворяющая соотношению* (4).

В самом деле, когда K (соотв. L) пробегает множество компактных подмножеств из S (соотв. из T), то в силу предложения 8 гл. V, § 8, п. 3 имеем

$$\nu^*(f \otimes g) = \sup_{K,\,L} \nu^*_{K\times L}((f \otimes g)_{K\times L}) = \sup_{K,\,L} (\lambda_K \otimes \mu_L)^*(f_K \otimes g_L) =$$

$$= \sup_{K,\,L} \lambda^*_K(f_K)\cdot\mu^*_L(g_L) = (\sup_K \lambda^*_K(f_K))\,(\sup_L \mu^*_L(g_L)) = \lambda^*(f)\,\mu^*(g).$$

Пусть η — другая предмера на $S \times T$, удовлетворяющая (4), и пусть K и L — компактные подмножества соответственно из S и T, а f и g — элементы соответственно из $\mathscr{F}_+(K)$ и из $\mathscr{F}_+(L)$. Между нуль-продолжениями имеет место соотношение $(f \otimes g)^0 = f^0 \otimes g^0$, и значит (§ 1, п. 2, предл. 2),

$$\eta^*_{K\times L}(f \otimes g) = \eta^*((f \otimes g)^0) = \eta^*(f^0 \otimes g^0) =$$

$$= \lambda^*(f^0)\,\mu^*(g^0) = \lambda^*_K(f)\,\mu^*_L(g).$$

Если, в частности, взять $f \in \mathscr{K}_+(K)$, $g \in \mathscr{K}_+(L)$, то ясно, что $\eta_{K\times L}$ обладает характеристическим свойством меры-произведения $\lambda_K \otimes \mu_L$ (гл. III (2-е изд.), § 4, п. 1, теорема 1). Следовательно, $\eta_{K\times L} = \nu_{K\times L}$, а так как всякое компактное подмножество из $S \times T$ содержится в некотором множестве вида $K \times L$, то в силу транзитивности индуцированных мер заключаем, что $\eta = \nu$.

Следствие 1. *Если* λ *и* μ — *меры, то* ν *есть мера.*

В самом деле, пусть $x = (s, t)$ — точка из X и пусть U и V — окрестности соответственно точек s и t, удовлетворяющие условиям $\lambda^*(U) < +\infty$, $\mu^*(V) < +\infty$; множество $U \times V$ является окрестностью точки x, и в силу (4) имеем $\nu^*(U \times V) = \lambda^*(U)\,\mu^*(V) < +\infty$; следовательно, заграждение ν^* ограничено, и значит, предмера ν является мерой.

Этот результат сразу же переносится на комплексные меры.

Следствие 2. *Если* A *есть подмножество из* S, *локально пренебрежимое относительно* λ, *то* $A \times T$ *локально* ν*-пренебрежимо.*

Следствие 3. *Предположим, что* λ (*соотв.* μ) *есть сумма суммируемого семейства* $(\lambda_\alpha)_{\alpha\in A}$ (*соотв.* $(\mu_\beta)_{\beta\in B}$) *мер на* S (*соотв. на* T). *Тогда семейство* $(\lambda_\alpha \otimes \mu_\beta)_{(\alpha,\beta)\in A\times B}$ *суммируемо, и его сумма равна* $\lambda \otimes \mu$.

В самом деле, пусть p — заграждение $\sum_{\alpha,\beta} (\lambda_\alpha \otimes \mu_\beta)^*$; если $f \in \mathscr{F}_+(S)$, $g \in \mathscr{F}_+(T)$, то очевидно, $p(f \otimes g) = \lambda^*(f)\,\mu^*(g)$. При этих условиях доказательство следствия 1 показывает, что p локально ограничено, так что семейство $(\lambda_\alpha \otimes \mu_\beta)$ суммируемо (§ 1, п. 7, предл. 7). Его сумма обладает тем свойством, что $\eta^* = p$ (§ 1, п. 7, предл. 7), и предложение 10 влечет, что $\eta = \nu$.

6. Интегрирование относительно произведения двух мер

В этом пункте через λ *и* μ *будут обозначаться меры соответственно на* S *и* T, *а через* ν — *мера-произведение* $\lambda \otimes \mu$ *на* $S \times T$. *Кроме того, для положительной функции* f *на* $S \times T$ *через* f_s *будет обозначаться функция* $t \mapsto f(s, t)$ *на* T *при любом* $s \in S$, *а через* I_f *будет обозначаться функция* $s \mapsto \mu^*(f_s)$ *на* S.

Лемма 2. *Пусть* f — *положительная* ν-*измеримая функция на* $S \times T$ *и пусть для любого компактного подмножества* L *из* T *через* I_f^L *обозначена функция* $s \mapsto \mu^*(f_s\varphi_L)$ *на* S. *Тогда функция* I_f^L λ-*измерима, и*

$$I_f = \sup_L I_f^L, \tag{5}$$

$$\nu^*(f) = \sup_L \lambda^*(I_f^L), \tag{6}$$

где L *пробегает множество компактных подмножеств из* T.

Прежде всего отметим, что включение $L \subset L'$ влечет неравенство $I_f^L \leqslant I_f^{L'}$; с другой стороны, $I_f^L(s) = \mu_L^*((f_s)_L)$ для любого $s \in S$. Стало быть, формула (5) является непосредственным следствием определения заграждения μ^*, приведенного в § 1. Если K — компактное подмножество из S, а L — компактное подмножество из T, то $\nu_{K\times L} = \lambda_K \otimes \mu_L$ по построению, и из теоремы 7 гл. V (2-е изд.), § 8, п. 3 вытекает соотношение

$$\nu^*(f\varphi_{K\times L}) = \lambda_K^*(I_f^L). \tag{7}$$

При этом всякое компактное подмножество из $S \times T$ содержится в компактном множестве вида $K \times L$; стало быть, переходя в предыдущей формуле к верхней огибающей по K и L, получаем

$$\nu^*(f) = \sup_L \sup_K \lambda_K^*(I_f^L) = \sup_L \lambda^*(I_f^L), \tag{8}$$

т. е. формулу (6).

Наконец, предложение 7 гл. V (2-е изд.), § 8, п. 3 влечет, что сужение I_f^L на любой компакт K из T λ_K-измеримо; это равносильно тому, что I_f^L λ-измеримо.

Предложение 11. *Пусть $f \geqslant 0$ — полунепрерывная снизу функция на $X = S \times T$.*

a) *Функция $f_s\colon t \mapsto f(s, t)$ полунепрерывна снизу на T при любом $s \in S$.*

b) *Функция $I_f : s \mapsto \int^* f(s, t)\, d\mu(t)$ полунепрерывна снизу на S, и*

$$\int_X^* f(s, t)\, d\nu(s, t) = \int_S^* d\lambda(s) \int_T^* f(s, t)\, d\mu(t). \tag{9}$$

Условие a) очевидно, потому что отображение $t \mapsto f(s, t)$ пространства T в $\overline{\mathbf{R}}$ есть композиция отображения f и непрерывного отображения $t \mapsto (s, t)$ пространства T в X. Для доказательства условия b) нам понадобится следующая лемма.

Лемма 3. *Пусть X — топологическое пространство (отделимое или нет), а $f \geqslant 0$ — полунепрерывная снизу функция на X; тогда f является пределом возрастающей последовательности $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ полунепрерывных снизу на X функций f_n, каждая из которых есть линейная комбинация с положительными коэффициентами характеристических функций открытых множеств.*

Для двух заданных чисел $k \geqslant 1$ и $n \geqslant 1$ через J_{kn} обозначим характеристическую функцию интервала $]k/2^n, +\infty]$ из $\overline{\mathbf{R}}$. Для любого $x \in \overline{\mathbf{R}}_+$ положим $u_n(x) = 2^{-n} \sum_{k=1}^{n \cdot 2^n} J_{kn}(x)$; легко видеть, что последовательность $(u_n(x))_{n \geqslant 1}$ возрастает и имеет пределом x. Значит, последовательность функций $f_n = u_n \circ f$ возрастает

и сходится к f, и $f_n = 2^{-n} \sum_{k=1}^{n \cdot 2^n} \varphi_{U(k,\,n)}$, где $U(k, n)$ — открытое множество $f^{-1}(]k/2^n, +\infty])$ из X.

Переходим к доказательству условия b). В силу того, что I_f есть верхняя огибающая фильтрующегося по возрастанию семейства функций I_f^L, где L пробегает множество компактных подмножеств из T (лемма 2), нам достаточно доказать, что функции I_f^L полунепрерывны снизу; затем формула (9) выводится из формулы (6) переходом к верхней огибающей по L (§ 1, п. 6, предл. 5).

Итак, пусть $\mathscr{H}$ — множество таких полунепрерывных снизу положительных функций f на $S \times T$, что I_f^L полунепрерывна снизу на любом компактном множестве L из T. Согласно предложению 5, § 1, п. 6, верхняя грань всякого фильтрующегося по возрастанию множества элементов из $\mathscr{H}$ принадлежит $\mathscr{H}$. Стало быть, в силу леммы 3, нам достаточно доказать, что характеристическая функция открытого множества W из $S \times T$ принадлежит $\mathscr{H}$. При этом, по определению топологии-произведения на $S \times T$, открытое множество W является объединением фильтрующегося по возрастанию семейства $(W_\alpha)_{\alpha \in A}$ открытых множеств вида

$$W = \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant n} (U_i \times V_i),$$

где U_i открыты в S, а V_i открыты в T; на основании сделанных выше замечаний нам достаточно теперь показать, что характеристическая функция такого открытого множества принадлежит $\mathscr{H}$. Пусть теперь $s \in S$ и пусть U есть пересечение (возможно, пустое) семейства, состоящего из открытых множеств U_i, содержащих s; ясно, что $\varphi_W(s, t) \leqslant \varphi_W(s', t)$ для любого $s' \in U$ и любого $t \in T$; отсюда интегрированием получаем неравенство $I^L_{\varphi_W}(s) \leqslant I^L_{\varphi_W}(s')$ для любого $s' \in U$. Следовательно, $I^L_{\varphi_W}$ полунепрерывна снизу, и предложение доказано.

Следствие 1. *Пусть f — положительная числовая функция на $X = S \times T$; тогда*

$$\int\int_X{}^{*} f(s, t)\, d\nu(s, t) \geqslant \int_S{}^{*} d\lambda(s) \int_T{}^{*} f(s, t)\, d\mu(t). \qquad (10)$$

Действительно, пусть g — полунепрерывная снизу функция на X, мажорирующая f; в силу предложения 11 имеем

$$\int\int^* g(s,t)\,d\nu(s,t) = \int\int^\cdot g(s,t)\,d\nu(s,t) =$$
$$= \int^\cdot d\lambda(s) \int^\cdot g(s,t)\,d\mu(t) =$$
$$= \int^* d\lambda(s) \int^* g(s,t)\,d\mu(t) \geqslant \int^* d\lambda(s) \int^* f(s,t)\,d\mu(t).$$

Неравенство (10) получается переходом к нижней огибающей на g.

Следствие 2. *Пусть f — числовая ν-пренебрежимая функция на $S \times T$. Тогда функция f_s: $t \mapsto f(s,t)$ μ-пренебрежима для λ-почти всех $s \in S$.*

Предложение 12. *Пусть f — положительная ν-измеримая функция на $X = S \times T$. Предположим, что f является ν-модерантной (соотв. μ является модерантной) функцией. Тогда*

a) *множество N тех $s \in S$, для которых функция f_s: $t \mapsto f(s,t)$ не будет μ-измеримой, пренебрежимо (соотв. локально пренебрежимо) относительно λ;*

b) *отображение $s \mapsto \int^\cdot f(s,t)\,d\mu(t)$ λ-измеримо, и*

$$\int_X\int^\cdot f(s,t)\,d\nu(s,t) = \int_S^\cdot d\lambda(s) \int_T^\cdot f(s,t)\,d\mu(t). \qquad (11)$$

Мы начнем с того, что установим b) для случая, когда f ν-модерантна. Согласно лемме 2 эта часть предложения справедлива, если существует такое компактное подмножество L из T, что f обращается в нуль вне $S \times L$; действительно, в этом случае $I_f = I_f^{L'}$ для любого компактного множества L' из T, содержащего L, и тогда формула (11) сводится к (6). В частности, условие b) доказано и для функции f, обращающейся в нуль вне некоторого компактного множества из $S \times T$. С другой стороны, следствие 1 из предложения 11 влечет, что b) справедливо в том случае, когда f есть ν-пренебрежимая функция. Но любая ν-модерантная функция есть сумма ν-пренебрежимой функции и последовательности функций с компактным носителем (§ 1, п. 9, следствие 3 из предл. 14); поэтому утверждение b) верно и для ν-модерантной функции f.

Точно так же, условие b) очевидно, если μ имеет носителем некоторое компактное подмножество L из T (лемма 2). Предположим, что μ модерантна; тогда найдется такая последовательность $(\mu_n)_{n\in\mathbf{N}}$ мер на T с компактным носителем, что $\mu = \sum_n \mu_n$ (§ 1, п. 9, следствие 5 из предл. 14); отсюда получаем $\nu = \sum_n \lambda \otimes \mu_n$ (п. 5, следствие 3 из предл. 10). Но утверждение b) справедливо для каждой из мер $\nu_n = \lambda \otimes \mu_n$; стало быть, и для $\nu = \sum_n \nu_n$.

Докажем a): обозначим через N множество тех $s \in S$, для которых функция f_s не является μ-измеримой; для любого компактного подмножества L из T через N_L обозначим, точно так же, множество тех $s \in S$, для которых $f_s\varphi_L$ не является μ-измеримой. Если K и L — компактные множества соответственно в S и T, то $f_{K\times L}$ измерима относительно меры $\nu_{K\times L} = \lambda_K \otimes \mu_L$, и тогда предложение 2 гл. V (2-е изд.), § 8, п. 2 показывает, что *множество N_L локально пренебрежимо относительно λ_K*; но K произвольно, и значит, N_L локально λ-пренебрежимо.

Предположим, что f обращается в нуль вне некоторого компактного множества вида $K \times L$; тогда $N = N_L$, и N содержится в K; отсюда следует, что N λ-пренебрежимо. Точно так же, если f ν-пренебрежима, то N λ-пренебрежимо в силу следствия 2 из предложения 11. Случай ν-модерантной функции f исследуется затем, как и выше, путем комбинирования двух предыдущих случаев.

Допустим, что μ несома компактным подмножеством L из T; тогда снова $N = N_L$, и значит, N локально λ-пренебрежимо. А поскольку всякая модерантная мера есть сумма последовательности мер с компактным носителем (§ 1, п. 9, следствие 5 из предл. 14), то этот результат сразу же распространяется на случай, когда μ модерантна, если воспользоваться предложением 8, § 1, п. 7.

Замечание. Пусть $(K_\alpha)_{\alpha\in A}$ — измельчение S относительно λ и $M = S - \bigcup_{\alpha\in A} K_\alpha$; аналогичным образом определим $(L_\beta)_{\beta\in B}$ и N относительно меры μ на T. Обозначим через S' локально компактное пространство, представляющее собой сумму подпространств K_α из S и *дискретного* пространства M; про-

странство T' определяем аналогично и полагаем $X' = S' \times T'$. Локально компактное пространство X' есть сумма семейства $(K_\alpha \times L_\beta)_{(\alpha,\,\beta)\in A\times B}$ компактных подпространств из X и подпространства $P = (M \times T) \cup (S \times N)$, которое является локально ν-пренебрежимым подмножеством из X (отметим, что P, вообще говоря, не будет дискретным пространством). Как мы видели в схолии § 1, п. 8, существует такая мера λ' на S', что измеримые функции, существенный верхний интеграл от положительных функций, существенно интегрируемые функции и их интегралы являются одними и теми же для λ и λ'. Соотнесем меру μ' на T' мере μ, а меру ν' на X' — мере ν, в соответствии с цитируемой схолией; легко видеть, что $\nu''(f \otimes g) = \lambda''(f)\,\mu''(g)$ для $f \in \mathscr{F}_+(S)$ и $g \in \mathscr{F}_+(T)$; значит, $\nu' = \lambda' \otimes \mu'$ в силу предложения 10 п. 5. А так как топология в X' является более сильной, чем топология в X, то всякая ν-модерантная функция ν'-модерантна. Этот способ позволяет распространить без дополнительного доказательства теорему Лебега — Фубини (гл. V (2-е изд.), § 8, п. 4, теорема 1) на рассматриваемую ситуацию.

7. *Один результат о дезинтегрировании мер*

Предложение 13. *Пусть X — топологическое пространство, ν — модерантная мера на X, p — ν-собственное отображение X в топологическое пространство T и $\mu = p(\nu)$. Предположим, что всякое компактное подпространство из X метризуемо. Тогда существует отображение $t \mapsto \lambda_t$ пространства T в $\mathscr{M}_+(X)$, обладающее следующими свойствами:*

a) *для любого $t \in T$ мера λ_t несома множеством $p^{-1}(t)$;*

b) *для любой универсально измеримой *) положительной функции f на X функция $t \mapsto \lambda_t^*(f)$ универсально измерима на T и*

$$\int_X^* f(x)\,d\nu(x) = \int_T^* d\mu(t) \int_T^* f(x)\,d\lambda_t(x); \tag{12}$$

c) *множество тех $t \in T$, для которых $\lambda_t(1) \neq 1$, локально μ-пренебрежимо. Кроме того, если $t \mapsto \lambda_t'$ — отображение T в*

*) Говорят, что отображение топологического пространства X в топологическое пространство Y *универсально измеримо*, если оно μ-измеримо относительно любой меры μ на X (ср. гл. V (2-е изд.), § 3, п. 4).

в $\mathscr{M}_+(X)$, *удовлетворяющее условиям* a) *и* b), *то множество тех* $t \in T$, *для которых* $\lambda_t \neq \lambda'_t$, *локально* μ-*пренебрежимо.*

Лемма 4. *Пусть* X — *топологическое пространство,* ν — *мера на* X *и* f — ν-*измеримое отображение* X *в топологическое пространство* F (*отделимое или нет*). *Тогда существует универсально измеримое отображение* f' *пространства* X *в* F, *равное* f *локально* ν-*почти всюду.*

Доказательство тождественно доказательству предложения 7 гл. V (2-е изд.), § 3, п. 4, с учетом предложения 10 § 1, п 8.

Перейдем к доказательству предложения 13.

A) *Предположим, что* X *компактно и метризуемо, а* p *непрерывно и сюръективно.*

Тогда пространство T компактно и метризуемо (Общая топ., гл. IX (3-е изд.), § 2, п. 10). По теореме 1 гл. IV, § 3, п. 1 существует такое широко μ-измеримое и скалярно существенно μ-интегрируемое отображение $H\colon t \mapsto \eta_t$ пространства T в $\mathscr{M}_+(X)$, что $\nu = \int_T \eta_t \, d\mu\,(t)$ и что η_t имеет полную массу 1 и несома множеством $p^{-1}(t)$ при любом $t \in T$. Пусть $(S_n)_{n\in\mathbf{N}}$ — измельчение T относительно μ, при котором сужение H на каждое из множеств S_n непрерывно (§ 1, п. 8, предл. 10 и 11); обозначим через $\Lambda\colon t \mapsto \lambda_t$ отображение T в $\mathscr{M}_+(X)$, равное H на $S = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} S_n$ и 0 на $T - S$. Ясно, что $\nu = \int_T \lambda_t \, d\mu\,(t)$ и что Λ удовлетворяет условию a); формула (12) следует из предложения 5 гл. V (2-е изд.), § 3, п. 2.

Пусть θ — мера на T; отображение Λ широко θ-измеримо и скалярно существенно θ-интегрируемо, а значит, также, и и θ-согласовано (гл. V (2-е изд.), § 3, п: 1, предл. 2b)). Пусть f — универсально измеримая положительная функция на X; предложение 5 гл. V (2-е изд.), § 3, п. 2 в применении к $\int \lambda_t \, d\theta\,(t)$ показывает, что отображение $t \mapsto \lambda_t^*(f)$ θ-измеримо, и следовательно, в силу произвольности θ, универсально измеримо.

B) *Предположим, что существует компактное подмножество* X' *из* X, *несущее меру* ν *и такое, что* $p_{X'}$ *непрерывно.*

Положим в этом случае $T' = p(X')$ и $p' = p_{X'}$; обозначим через ν' меру $\nu_{X'}$, а через μ' — меру-образ $p'(\nu')$ на T'. По-

скольку p' непрерывно и сюръективно, а X' компактно и метризуемо, то в силу A) существует отображение Λ': $t' \mapsto \lambda'_{t'}$ T' в $\mathscr{M}_+(X')$, удовлетворяющее следующим условиям:

a') для любого $t' \in T'$ мера $\lambda'_{t'}$ несома $X' \cap p^{-1}(t')$;

b') для любой универсально измеримой положительной функции f' на X' функция $t' \mapsto \lambda'^{*}_{t'}(f')$ универсально измерима на T' и

$$\int_{X'}^{*} f'(x')\, d\nu'(x') = \int_{T'}^{*} d\mu'(t') \int_{X'}^{*} f'(x')\, d\lambda'_{t'}(x').$$

Пусть $t \in T$; если t принадлежит T', то мы обозначим через λ_t образ λ'_t при канонической инъекции X' в X, а если t принадлежит $T - T'$, то мы положим $\lambda_t = 0$. Читатель без труда убедится в том, что отображение $t \mapsto \lambda_t$ удовлетворяет условиям a) и b).

C) *Существование в общем случае.*

Поскольку мера ν на X модерантна, мы можем выбрать покрытие $(U_m)_{m \in \mathbf{N}}$ пространства X, состоящее из ν-интегрируемых открытых множеств. Пусть, кроме того, $(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ — такое ν-измельчение X, что сужение p на каждое X_n непрерывно (§ 1, п. 8, предл. 10 и 11); обозначим через ν_n меру $\varphi_{X_n} \cdot \nu$ на X, а через μ_n — ее образ при отображении p. В силу B) для каждого $n \in \mathbf{N}$ существует отображение $t \mapsto \alpha_t^n$ пространства T в $\mathscr{M}_+(X)$, удовлетворяющее следующим условиям:

a'') мера α_t^n несома $p^{-1}(t)$ при любом $t \in T$;

b'') если f — универсально измеримая положительная функция на X, то положительная функция $t \mapsto (\alpha_t^n)^*(f)$ на T универсально измерима и

$$\int_{X}^{*} f(x)\, d\nu_n(x) = \int_{T}^{*} d\mu_n(t) \int_{X}^{*} f(x)\, d\alpha_t^n(x). \tag{13}$$

Имеем $\nu = \sum_{n \in \mathbf{N}} \nu_n$ и $\mu = \sum_{n \in \mathbf{N}} \mu_n$; из предложения 3 п. 2 и леммы 4 сразу же выводим, что найдется такая последовательность $(g_n)_{n \in \mathbf{N}}$ универсально измеримых положительных функций на T, что $\mu_n = g_n \cdot \mu$ для любого $n \in \mathbf{N}$ и $\sum_{n \in \mathbf{N}} g_n = 1$. Для любого $t \in T$ через β_t^n обозначим меру $g_n(t) \cdot \alpha_t^n$ на X, а через q_t — заграждение $\sum_{n \in \mathbf{N}} (\beta_t^n)^*$ на X. Пусть f — универсально измеримая положительная функция на X; используя предложение 2 п. 2

и суммируя (13) по n, получаем:

$$\int_X^* f(x)\,d\nu(x) = \int_T^* q_t(f)\,d\mu(t); \tag{14}$$

при этом ясно, что функция $t \mapsto q_t(f)$ на T универсально измерима.

Пусть для любого $m \in \mathbf{N}$ через E_m обозначено множество тех $t \in T$, для которых $q_t(U_m) = +\infty$; множество E_m универсально измеримо в силу того, что таково отображение $t \mapsto q_t(U_m)$ и что E_m локально μ-пренебрежимо согласно формуле (14), примененной к $f = \varphi_{U_m}$, ибо $\nu^*(U_m)$ конечно. Следовательно, множество $E = \bigcup_{m \in \mathbf{N}} E_m$ универсально измеримо и локально μ-пренебрежимо. Мы полагаем $\lambda_t = 0$ для $t \in E$. Пусть теперь $t \in T - E$; заграждение q_t локально ограничено, поскольку открытые множества U_m покрывают X, а $q_t(U_m)$ конечно; согласно предложению 7 § 1, п. 7 существует такая мера λ_t на X, что $q_t = \lambda_t^*$ и и $\lambda_t = \sum_{n \in \mathbf{N}} \beta_t^n$. Очевидно, что отображение $t \mapsto \lambda_t$ удовлетворяет условиям a) и b).

D) *Доказательство* c).

Пусть f — универсально измеримая функция, положительная и ограниченная на X; мы покажем, что универсально измеримая функция $h_f\colon t \mapsto \lambda_t^*(f)$ на T есть плотность меры $\mu_f = p(f \cdot \nu)$ относительно $\mu = p(\nu)$. Пусть K — компактное подмножество из T и пусть $A = p^{-1}(K)$. Для любого $t \in T$ мера λ_t несома $p^{-1}(t)$; если $t \in K$, то $p^{-1}(t) \subset A$, откуда $\lambda_t^*(f\varphi_A) = \lambda_t^*(f)$; в то же время, если $t \in T - K$, то $p^{-1}(t) \subset X - A$, откуда $\lambda_t^*(f\varphi_A) = 0$. Тогда, применяя формулу (12) к $f \cdot \varphi_A$, получаем

$$\mu_f(K) = \int_A^* f(x)\,d\nu(x) = \int_K^* d\mu(t) \int_X^* f(x)\,d\lambda_t(x) = \int_K^* h_f(t)\,d\mu(t);$$

тем самым доказано соотношение $\mu_f = h_f \cdot \mu$.

Принимая $f = 1$, видим, что функция $h_1\colon t \mapsto \| \lambda_t \|$ есть плотность меры $\mu_1 = \mu$ относительно μ, и значит, равна 1 локально μ-почти всюду на T.

E) *Единственность.*

Пусть $t \mapsto \lambda_t^i$ (для $i = 1, 2$) — два отображения T в $\mathscr{M}_+(X)$, удовлетворяющие условиям a) и b). Как и в C), выберем такое

μ-измельчение $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ пространства X, что p_{X_n} непрерывно при любом $n \in \mathbf{N}$, и положим $N = X - \bigcup_{n\in\mathbf{N}} X_n$. Выберем для каждого $n \in \mathbf{N}$ счетное множество D_n положительных функций на X, обращающихся в нуль вне X_n и таких, что их сужения на X_n образуют плотное множество в нормированном пространстве $\mathscr{C}(X_n)$ (применить теорему 1, Общая топ., гл. X (2-е изд.), § 3, п. 3 к метризуемому компактному пространству X_n). Положим $D = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} D_n$.

Пусть $f \in D$; согласно D) функции $t \mapsto (\lambda_t^1)^\cdot(f)$ и $t \mapsto (\lambda_t^2)^\cdot(f)$ являются плотностями меры μ_f относительно μ, и значит, в T найдется такое локально μ-пренебрежимое множество E_f, что $(\lambda_t^1)^\cdot(f) = (\lambda_t^2)^\cdot(f)$ для $t \in T - E_f$. Кроме того, в силу (12), множество F_i тех $t \in T$, для которых $(\lambda_t^i)^\cdot(N) \neq 0$, локально μ-пренебрежимо при $i = 1, 2$. Поскольку D счетно, множество $G = (\bigcup_{f\in D} E_f) \cup F_1 \cup F_2$ локально μ-пренебрежимо; для $t \in T - G$ имеем $(\lambda_t^1)^\cdot(N) = (\lambda_t^2)^\cdot(N) = 0$ и $(\lambda_t^1)_{X_n} = (\lambda_t^2)_{X_n}$, откуда в силу предложения 9 § 1, п. 8 $\lambda_t^1 = \lambda_t^2$.

Замечания. 1) Если X — суслинское пространство, то всякое его подпространство является суслинским, а значит, метризуемым (Общая топ. (3-е изд.), гл. IX. Приложение 1, следствие 2 из предл. 3 и любая мера на X модерантна (§ 1, п. 9, замечание 1). Стало быть, согласно предложению 13, всякая мера ν на X допускает дезинтегрирование относительно любого ν-собственного отображения.

2) Пусть, в обозначениях предложения 13, f есть ν-измеримая положительная функция. Можно (как и в гл. V (2-е изд.), § 3, п. 2, предл. 5) показать, что множество тех $t \in T$, для которых f не является λ_t-измеримой, локально μ-пренебрежимо, что $t \mapsto \lambda_t^*(f)$ μ-измеримо и что по-прежнему выполняется соотношение (12).

Упражнения

1) Пусть T_1, T_2 — топологические пространства и f — непрерывное *инъективное* отображение T_1 в T_2. Показать, что отображение $\mu \mapsto f(\mu)$ есть биекция $\mathscr{M}^b(T_1)$ на подпространство из $\mathscr{M}^b(T_2)$, состоящее из мер, несомых $f(T_1)$.

2) Построить пример двух топологических пространств T_1 и T_2 и непрерывного биективного отображения f пространства T_1 на T_2 так, чтобы отображение $\mu \mapsto f(\mu)$ пространства $\mathscr{M}_+^b(T_1)$ в $\mathscr{M}_+^b(T_2)$ не было сюръективным.

3) Пусть X — некоторое множество, а $\mathscr{T}$, $\mathscr{T}'$ - отделимые топологии на X, причем $\mathscr{T}'$ — менее сильная, чем $\mathscr{T}$. Обозначим через T (соотв. T') множество X, наделенное топологией $\mathscr{T}$ (соотв. $\mathscr{T}'$), а через j — тождественное отображение T в T' (которое непрерывно). Предположим, что всякая ограниченная положительная мера на T' несома объединением последовательности компактных подмножеств из T. Для любой топологии $\mathscr{S}$, промежуточной между $\mathscr{T}$ и $\mathscr{T}'$, обозначим через $T_{\mathscr{S}}$ множество X, наделенное топологией $\mathscr{S}$. Показать, что множество ограниченных мер на $T_{\mathscr{S}}$ не зависит от $\mathscr{S}$.

§ 3. Меры и аддитивные функции множества

В этом параграфе через $\mathfrak{K}(T)$ и $\mathfrak{B}(T)$ будут обозначаться соответственно множество компактных подмножеств отделимого топологического пространства T и борелевская σ-алгебра пространства T.

1. Меры и аддитивные функции компактов

Теорема 1. *Пусть T — топологическое пространство и I — отображение $\mathfrak{K}(T)$ в $\mathbf{R}_+$. Для того чтобы существовала такая мера μ на T, что $I(K) = \mu^*(K)$ для любого $K \in \mathfrak{K}(T)$, необходимо и достаточно, чтобы I удовлетворяло следующим условиям:*

1) *Если K, L — компактные подмножества из T и $K \subset L$, то $I(K) \leqslant I(L)$ («I возрастает»).*

2) *Если K, L — компактные подмножества из T, то $I(K \cup L) \leqslant I(K) + I(L)$.*

3) *Если K, L — непересекающиеся компакты в T, то $I(K \cup L) = I(K) + I(L)$ («I аддитивно»).*

4) *Для любого убывающего фильтрующегося семейства $(K_\alpha)_{\alpha \in A}$ компактных подмножеств из T справедливо соотношение*

$$I\left(\bigcap_{\alpha \in A} K_\alpha\right) = \inf_{\alpha \in A} I(K_\alpha).$$

5) *Для любого $x \in T$ найдется такая окрестность V, что*

$$\sup_{\substack{K \in \mathfrak{K}(T) \\ K \subset V}} I(K) < +\infty \quad (\text{«}I \text{ локально ограничено»}).$$

При выполнении этих условий мера μ единственна.

Единственность μ вытекает из следствия к предложению 2 § 1 п. 2. Сформулированные условия необходимы; для первых

трех это очевидно, для последнего это следует из того, что μ^* есть локально ограниченное заграждение, а для 4) — из следствия к предложению 5 § 1, п. 6.

Доказательство достаточности мы начнем с изучения случая, когда T *компактно.*

Лемма 1. *Предположим, что T компактно, и положим $I(T) = l$. Для любого $A \subset T$ положим*

$$J(A) = \sup_{\substack{K \in \mathfrak{K}(T) \\ K \subset A}} I(K), \tag{1}$$

и пусть Φ — множество, состоящее из тех $A \subset T$, для которых $J(A) + J(\mathbf{C}A) = l$. Тогда множество Φ есть алгебра, содержащая $\mathfrak{K}(T)$, и функция J на Φ возрастает и аддитивна.

Ясно, что J — возрастающая функция множества, продолжающая I, и что $J(A) + J(\mathbf{C}A) \leqslant l$ для любого $A \subset T$.

Пусть K и S — компактные множества из T; покажем вначале, что

$$J(K \cap S) + J(\mathbf{C}K \cap S) = J(S). \tag{2}$$

Рассматривая сужения I на $\mathfrak{K}(S)$, а J — на $\mathfrak{B}(S)$, сразу же сводим все к случаю, когда $S = T$. А поскольку T нормально, то K есть пересечение фильтрующегося по убыванию семейства компактных окрестностей, и из условия 4) следует существование для любого $\varepsilon > 0$ такой компактной окрестности H множества K, что $I(H) \leqslant I(K) + \varepsilon$. Пусть L — замыкание $T - H$; L компактно, $L \cap K = \varnothing$ и $H \cup L = T$; значит, $l = I(H \cup L) \leqslant I(H) + I(L) \leqslant I(K) + I(L) + \varepsilon$ (условие 2)), откуда следует соотношение $J(K) + J(\mathbf{C}K) \geqslant I(K) + I(L) \geqslant l - \varepsilon$. А поскольку ε произвольно, то $J(K) + J(\mathbf{C}K) = l$. Тем самым доказана формула (2), равно как и включение $\mathfrak{K}(T) \subset \Phi$.

Докажем теперь, что Φ есть алгебра. Так как Φ, очевидно, устойчиво относительно перехода к дополнению, то достаточно показать, что если A_1 и A_2 — элементы из Φ, то $A_1 \cup A_2 \in \Phi$ или, еще, что

$$J(A_1 \cup A_2) + J(\mathbf{C}(A_1 \cup A_2)) \geqslant l. \tag{3}$$

Пусть $\varepsilon > 0$ и пусть для $i = 1, 2$ через K_i обозначен компакт, содержащийся в A_i, а через L_i — компакт, содержащийся в $\mathbf{C}A_i$,

такие, что

$$I(K_i) \geqslant J(A_i) - \varepsilon, \quad I(L_i) \geqslant J(\mathbf{C}A_i) - \varepsilon.$$

Положим $M_1 = K_1 \cup L_1$; из соотношений $l = J(M_1) + J(\mathbf{C}M_1)$, $J(M_1) = I(K_1) + I(L_1) \geqslant J(A_1) + J(\mathbf{C}A_1) - 2\varepsilon = l - 2\varepsilon$ получаем $J(\mathbf{C}M_1) \leqslant 2\varepsilon$. Тогда, если S — компактное подмножество из T, то соотношение (2) (примененное к $K = M_1$) влечет неравенство $J(S) \leqslant J(M_1 \cap S) + 2\varepsilon$, откуда

$$J(S) \leqslant J(K_1 \cap S) + J(L_1 \cap S) + 2\varepsilon.$$

Полагая $S = K_2$ и $S = L_2$, сложим полученные неравенства, принимая во внимание неравенство $J(K_2) + J(L_2) \geqslant l - 2\varepsilon$ и тот факт, что $K_1 \cap K_2$, $L_1 \cap K_2$ и $K_1 \cap L_2$ — непересекающиеся компакты, содержащиеся в $A_1 \cup A_2$. Обозначив через C объединение этих трех компактов, приходим к соотношениям

$$l - 2\varepsilon \leqslant J(K_2) + J(L_2) \leqslant J(C) + J(L_1 \cap L_2) + 4\varepsilon \leqslant$$
$$\leqslant J(A_1 \cup A_2) + J(\mathbf{C}(A_1 \cup A_2)) + 4\varepsilon,$$

откуда сразу же в силу произвольности ε следует искомая формула (3). Теперь из предыдущих неравенств получаем: $J(C) \geqslant J(A_1 \cup A_2) - 6\varepsilon$; если A_1 и A_2 не пересекаются, то C есть объединение $K_1 \cap L_2 \subset A_1$ и $K_2 \cap L_1 \subset A_2$; отсюда выводим, что $J(A_1 \cup A_2) \leqslant J(A_1) + J(A_2)$. А поскольку обратное неравенство очевидно, то J аддитивна на Ф, и лемма доказана.

Завершим доказательство теоремы в случае, когда T компактно. Пусть $\mathscr{C}(\Phi)$ есть векторное пространство Ф-размещенных функций на T, наделенное равномерной сходимостью (гл. IV (2-е изд.), § 4, п. 9, опр. 4); обозначим снова через J положительную линейную форму на $\mathscr{C}(\Phi)$, ассоциированную с аддитивной функцией J (там же, предл. 18). Так как $J(T) = l$, то J непрерывна и имеет норму l. Пусть теперь $\mathscr{H}$ — замыкание $\mathscr{C}(\Phi)$ в топологии равномерной сходимости; легко видеть, что J продолжается по непрерывности до *положительной* линейной формы на $\mathscr{H}$, обозначаемой снова J. Поскольку $\mathscr{H}$ содержит $\mathscr{C}(T)$ (там же, п. 10, предл. 19), то сужение J на $\mathscr{C}(T)$ есть положительная мера μ. Нам остается показать, что $\mu^*(K) = I(K)$ для любого компактного подмножества K из T. Но мы имеем $\mu^*(K) = \inf_{f \in S_K} \mu^*(f)$, где S_K означает множество элементов из $\mathscr{C}(T)$, мажорирующих φ_K (§ 1, п. 6,

предл. 5). А поскольку $J(f) = \mu^*(f)$ для $f \in \mathscr{C}(T)$, то достаточно, очевидно, показать, что $J(K) \geqslant \inf_{f \in \mathfrak{s}_K} J(f)$. Итак, пусть H, как и в доказательстве леммы 1,— такая компактная окрестность множества K, что $J(H) \leqslant J(K) + \varepsilon$, и пусть f — непрерывная функция на T, заключенная между 0 и 1 и равная 1 на K и 0 вне H (Общая топ., гл. IX (3-е изд.), § 4, п. 1, предл. 1). Имеем

$$J(f) \leqslant J(H) \leqslant J(K) + \varepsilon;$$

а поскольку ε произвольно, то требуемое неравенство доказано, и теорема получена для случая, когда T компактно.

Перейдем теперь к общему случаю. Пусть для любого компактного множества L из T через I_L обозначено сужение I на $\mathfrak{K}(L)$. В соответствии с только что изученным частным случаем существует единственная мера μ_L на L, такая, что $\mu_L(K) = I_L(K)$ для любого компактного множества $K \subset L$. Пусть теперь L' — компакт, содержащийся в L; имеем $(\mu_L)^*_{L'}(K) = \mu^*_L(K) = \mu^*_{L'}(K)$ для любого компакта $K \subset L'$; отсюда $\mu_{L'} = (\mu_L)_{L'}$; отображение $\mu: L \mapsto \mu_L$ есть предмера. На основании условия 5) μ есть мера, а $I(K) = \mu^*(K)$ для любого компакта K очевидно.

Замечания. 1) В формулировке теоремы 1 условие 4) может быть заменено следующим условием («непрерывность справа»):

4′) *Для любого* $K \in \mathfrak{K}(T)$ *и любого* $\varepsilon > 0$ *найдется такое содержащее* K *открытое множество* U, *что* $I(H) \leqslant I(K) + \varepsilon$ *для любого компакта* $H \subset U$.

Если μ есть мера, то функция $I: K \mapsto \mu^*(K)$ удовлетворяет 4′) (§ 1, п. 9, предл. 13). Обратно, предположим, что I удовлетворяет 1) и 4′); покажем, что тогда I удовлетворяет 4). Выберем (в обозначениях теоремы 1) $\varepsilon > 0$ и открытое множество U так, чтобы оно содержало компактное множество $K = \bigcap_{\alpha \in A} K_\alpha$ и чтобы выполнялось 4′). Тогда найдется такой индекс $\beta \in A$, что $K_\beta \subset U$; это приводит к неравенствам

$$\inf_{\alpha \in A} I(K_\alpha) \leqslant I(K_\beta) \leqslant I(K) + \varepsilon,$$

и условие 4 выполнено.

2) Совокупность условий 2) и 3) в теореме 1 может быть заменена следующим условием:

Если K *и* L *— компакты из* T, *то*

$$I(K \cup L) + I(K \cap L) = I(K) + I(L).$$

В самом деле, из этого условия следуют 2) и 3), а с другой стороны,

$$\mu^*(K \cup L) + \mu^*(K \cap L) = \mu^*(K) + \mu^*(L)$$

для любой меры μ, что вытекает из соотношения $\varphi_{K \cup L} + \varphi_{K \cap L} = \varphi_K + \varphi_L$ между характеристическими функциями.

2. *Внутренне регулярные функции множества*

Определение 1. *Пусть T — топологическое пространство и $\mathfrak{B}(T)$ — борелевская σ-алгебра в T; и пусть I — отображение $\mathfrak{B}(T)$ в $\overline{\mathbf{R}}_+$.*

a) *Говорят, что I счетно аддитивно, если для любой последовательности (A_n) попарно не пересекающихся элементов из $\mathfrak{B}(T)$*

$$I\left(\bigcup_n A_n\right) = \sum_n I(A_n). \tag{4}$$

b) *Говорят, что I внутренне регулярно, если для любого множества $A \in \mathfrak{B}(T)$*

$$I(A) = \sup_K I(K), \tag{5}$$

где K пробегает множество компактных подмножеств из A.

c) *Говорят, что I ограничено* (соответственно *локально ограничено*), *если $I(T) < +\infty$* (соответственно *если каждая точка $x \in T$ обладает открытой окрестностью V, для которой $I(V) < +\infty$*).

Замечания. 1) Из условия a) с очевидностью вытекает, что I есть возрастающее отображение $\mathfrak{B}(T)$ (упорядоченного по включению) в $\overline{\mathbf{R}}_+$.

2) Предположим, что I счетно аддитивно; пусть $(A_n)_{n \in \mathbf{N}}$ — возрастающая последовательность борелевских множеств и пусть $A = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} A_n$. Поскольку множества $D_0 = A_0$, $D_n = A_n - A_{n-1}$ попарно не пересекаются и их объединение равно A, то $I(A) = \sum_n I(D_n) = \lim_{n \to \infty} I(A_n)$. Точно так же, если (B_n) есть убывающая последовательность борелевских множеств и $I(B_0) < +\infty$, то $I\left(\bigcap_n B_n\right) = \lim_{n \to \infty} I(B_n)$: достаточно применить предыдущее рассуждение к множествам $A_n = B_0 - B_n$.

3) Пусть (A_n) — произвольная последовательность борелевских подмножеств из T. Если I счетно аддитивно, то $I\left(\bigcup_n A_n\right) \leqslant \sum_n I(A_n)$. В силу предыдущего замечания достаточно установить это неравенство

для конечной последовательности. Тогда все сразу сведется к случаю двух множеств A_1 и A_2; но из соотношения (4) следует, что

$$I(A_1 \cup A_2) = I(A_1) + I(A_2 - (A_1 \cap A_2)) \leqslant I(A_1) + I(A_2).$$

Отсюда немедленно получаем искомое неравенство.

4) Если I — счетно аддитивная и локально ограниченная функция, то из предыдущего замечания сразу же следует, что $I(K) < +\infty$ для любого компакта $K \subset T$.

5) Можно показать, что если I *аддитивно*, т. е. удовлетворяет (4) для *конечных* последовательностей, и внутренне регулярно, то оно счетно аддитивно (упр. 7). Впрочем, читатель может убедиться, что в доказательстве теоремы 2 ниже используются только аддитивность и внутренняя регулярность.

Теорема 2. *Пусть T — топологическое пространство и I — функция на $\mathfrak{B}(T)$ со значениями в $\overline{\mathbf{R}}_+$. Для того чтобы существовала такая мера μ на T, что $\mu^*(A) = I(A)$ для любого $A \in \mathfrak{B}(T)$, необходимо и достаточно, чтобы I было счетно аддитивно, локально ограничено и внутренне регулярно. Тогда мера μ единственна.*

Эти три условия необходимы; в самом деле, отображение $A \mapsto \mu^*(A)$ на $\mathfrak{B}(T)$ счетно аддитивно (§ 1, п. 5, следствие из предл. 4), локально ограничено по определению мер (§ 1, п. 2, опр. 5) и внутренне регулярно в силу замечания 3 § 1, п. 2.

Перейдем к доказательству существования. Ясно, что сужение I на $\mathfrak{K}(T)$ удовлетворяет условиям 1), 2), 3) и 5) теоремы 1; покажем, что 4) тоже выполняется. Пусть K — компактное подмножество из T, являющееся пересечением фильтрующегося по убыванию семейства $(K_\alpha)_{\alpha \in A}$ компактных множеств, и пусть $\varepsilon > 0$; поскольку I локально ограничено, то найдется такая открытая (а значит, борелевская) окрестность V множества K, что $I(V) < +\infty$, и тогда найдется такой индекс α, что $K_\alpha \subset V$; с точностью до замены обозначений мы можем предположить, что $K_\alpha \subset V$ для любого $\alpha \in A$. В силу внутренней регулярности I существует такое компактное множество $L \subset V - K$, что $I(L) \geqslant I(V - K) - \varepsilon$; а так как L не пересекается с K, то найдется такой индекс α, что $L \cap K_\alpha = \varnothing$, и тогда $I(V - K_\alpha) \geqslant I(L) \geqslant I(V - K) - \varepsilon$. Отсюда, учитывая, что $K_\alpha \subset V$, получаем неравенство $I(K_\alpha) \leqslant I(K) + \varepsilon$, и условие 4) выполнено.

По теореме 1 существует такая мера μ, что $\mu^*(K) = I(K)$ для любого $K \in \mathfrak{K}(T)$. Тогда в силу внутренней регулярности

функций множеств μ^* и I на $\mathfrak{B}(T)$ получаем равенство $\mu^*(A) = I(A)$ для любого $A \in \mathfrak{B}(T)$, и существование доказано.

Единственность μ следует из утверждения единственности теоремы 1.

3. Радоновы пространства

Определение 2. *Топологическое пространство T называется радоновым* (соответственно *сильно радоновым*), *если оно отделимо и если всякая функция на борелевской σ-алгебре $\mathfrak{B}(T)$ пространства T со значениями в $\overline{\mathbf{R}}_+$, счетно аддитивная и ограниченная* (соответственно *локально ограниченная*), *внутренне регулярна.*

Например, дальше мы увидим (предл. 3), что всякое польское пространство сильно радоново. В частности, всякое локально компактное пространство со счетной базой сильно радоново.

Существуют примеры радоновых пространств, не являющихся сильно радоновыми.

Предложение 1. *Всякое радоново пространство Линделёфа* *) *сильно радоново.*

Пусть T — радоново пространство Линделёфа и пусть I — положительная счетно аддитивная и локально ограниченная функция множества на σ-алгебре $\mathfrak{B}(T)$. Открытые множества V, для которых $I(V) < +\infty$, образуют покрытие T, из которого можно выделить счетное покрытие $(V_n)_{n\in\mathbf{N}}$. Положим $G_n = V_0 \cup V_1 \cup \ldots \cup V_n$ для любого $n \in \mathbf{N}$; положим, далее, $H_0 = G_0$ и $H_n = G_n - G_{n-1}$ для $n \geqslant 1$; наконец, обозначим через I_n функцию множества $A \mapsto I(A \cap H_n)$ на $\mathfrak{B}(T)$, которая, очевидно, счетно аддитивна и ограничена. Множества H_n образуют разбиение T, поэтому $I = \sum_n I_n$. Поскольку T — радоново пространство, то для каждого $n \in \mathbf{N}$ существует такая ограниченная мера μ_n на T, что $\mu_n^*(A) = I_n(A)$ для любого $A \in \mathfrak{B}(T)$; а значит, также $\sum_n \mu_n^*(A) = I(A)$. В силу локальной ограниченности I семейство (μ_n) суммируемо (§ 1, п. 7, предл. 7); если μ означает

*) Напомним (Общая топ., гл. IX, Приложение 1), что *пространством Линделёфа* называется всякое топологическое пространство T, обладающее тем свойством, что из любого его покрытия можно выделить счетное покрытие.

$\sum_n \mu_n$, то $\mu^*(A) = I(A)$ для любого $A \in \mathfrak{B}(T)$, откуда вытекает внутренняя регулярность I. Иными словами, T сильно радоново.

Напомним, что подмножество A топологического пространства T называется *универсально измеримым*, если A μ-измеримо для любой меры μ на T. Это сводится к утверждению, что A μ-измеримо относительно любой меры μ на T с *компактным носителем* (§ 1, п. 8, предл. 9).

Предложение 2. *Пусть X — топологическое пространство и T — его подпространство.*

a) *Предположим, что T радоново. Тогда для любой положительной, счетно аддитивной и ограниченной функции I на $\mathfrak{B}(X)$*

$$\sup_{\substack{K\text{-компакт}\\ K\subset T}} I(K) = \inf_{\substack{B\in\mathfrak{B}(X)\\ B\supset T}} I(B). \tag{6}$$

Кроме того, T универсально измеримо в X.

b) *Обратно, предположим, что X радоново и что T универсально измеримо в X; тогда T радоново.*

Докажем a). Обозначим правую часть формулы (6) через α; для любого $n \in \mathbf{N}$ найдется множество $C_n \in \mathfrak{B}(X)$, содержащее T и такое, что $I(C_n) \leqslant \alpha + 2^{-n}$. Если положить $C = \bigcap_n C_n$, то $T \subset C$, $I(C) = \alpha$. Если $A \in \mathfrak{B}(T)$, то мы выбираем борелевское подмножество B из X так, чтобы $A = B \cap T$ (Общая топ., гл. IX (3-е изд.), § 6, п. 3), и положим $J(A) = I(B \cap C)$. Это число не зависит от выбора B, ибо если B' — другое борелевское множество из X, такое, что $A = B' \cap T$, то $B \cap C$ и $B' \cap C$ отличаются лишь на борелевское множество M, содержащееся в $C - T$, и по построению C, $I(M) = 0$. Очевидно, что $J(K) = I(K)$ для любого компактного множества $K \subset T$. Пусть (A_n) — последовательность попарно не пересекающихся борелевских подмножеств из T и пусть для каждого n через B_n обозначено такое борелевское подмножество из X, что $B_n \cap T = A_n$. С точностью до замены B_n на $B_n - (\bigcup_{k<n} B_k)$ можно предположить, что множества B_n попарно не пересекаются. Положим $A = \bigcup_n A_n$, $B = \bigcup_n B_n$; имеем $J(A) = I(B \cap C) = \sum_n I(B_n \cap C) = \sum_n J(A_n)$; значит, J есть

счетно аддитивная ограниченная функция на $\mathfrak{B}(T)$. А так как T по предположению радоново, то существует такая ограниченная мера μ на T, что $J(A) = \mu^*(A)$ для любого $A \in \mathfrak{B}(T)$; следовательно, по определению μ^*, $\alpha = J(T) = \mu^*(T) = \sup_K \mu^*(K) = \sup_K J(K)$. Таким образом, формула (6) доказана.

Покажем, что T универсально измеримо. Пусть λ — ограниченная мера на X; предыдущее рассуждение применимо к функции множества I: $A \mapsto \lambda^*(A)$ на $\mathfrak{B}(X)$, и значит, существует последовательность (K_n) таких компактных подмножеств из T, что (в обозначениях, введенных выше)

$$\sup_n \lambda^*(K_n) = J(T) = \lambda^*(C).$$

Положим $K' = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} K_n$; K' — борелевское множество в X; имеем $K' \subset T \subset C$, $\lambda^*(K') = \lambda^*(C)$, и значит, эти три множества отличаются друг от друга лишь на λ-пренебрежимые множества, и T λ-измеримо. Этим завершается доказательство a).

Перейдем к b). Предположим, что X радоново и что T универсально измеримо в X. Пусть I — положительная счетно аддитивная и ограниченная функция на $\mathfrak{B}(T)$; тогда функция $A \mapsto I(A \cap T)$ на $\mathfrak{B}(T)$ положительна, счетно аддитивна и ограничена, и значит, существует такая ограниченная мера ν на X, что $I(A \cap T) = \nu^*(A)$ для любого $A \in \mathfrak{B}(X)$. Но T ν-измеримо; предыдущее соотношение показывает, что $\nu^*(K) = 0$ для любого компакта K из X, не пересекающегося с T, и значит, ν сосредоточена на T. Следовательно, для любого борелевского множества $A \subset X$ имеем $I(A \cap T) = \nu^*(A \cap T) = \mu^*(A \cap T)$, где μ — мера, индуцированная мерой ν на T. Наконец, отсюда следует, что $I(B) = \mu^*(B)$ для любого множества $B \in \mathfrak{B}(T)$ (Общая топ., гл. IX (3-е изд.), § 6, п. 3, замечание), и стало быть, I внутренне регулярно.

Следствие. *Если X — радоново пространство, то всякое его борелевское подмножество T радоново.*

В самом деле, T универсально измеримо в X.

Предложение 3. *Всякое суслинское (в частности, всякое польское или лузинское) пространство сильно радоново.*

Пусть T — суслинское пространство; поскольку T — пространство Линделёфа (Общая топ., гл. IX (3-е изд.), Приложение 1, следствие из предл. 1), то достаточно показать, что T — радоново (предл. 1). Пусть I — положительная счетно аддитивная ограниченная функция на $\mathfrak{B}(T)$. Продолжим I на $\mathfrak{P}(T)$, полагая для любого подмножества $A \subset T$

$$I(A) = \inf_{\substack{B \in \mathfrak{B}(T) \\ B \supset A}} I(B).$$

Покажем, что это продолжение есть *емкость* на T (Общая топ., гл. IX (3-е изд.), § 6, п. 9). Ясно, что из соотношения $A \subset A'$ следует $I(A) \leqslant I(A')$. Пусть (A_n) — возрастающая последовательность подмножеств из T и пусть $A = \bigcup_n A_n$. Множество борелевских подмножеств, содержащих A_n, устойчиво относительно счетных пересечений, поэтому для каждого n найдется такое борелевское множество B_n, что $A_n \subset B_n$ и $I(A_n) = I(B_n)$ (ср. доказательство предл. 2). Положим $C_n = \bigcap_{p \geqslant n} B_p$; C_n — борелевское множество, и $A_n \subset C_n \subset B_n$, а значит, $I(A_n) = I(C_n)$. С другой стороны, последовательность (C_n) возрастает. Пусть $C = \bigcup_n C_n$; включение $A \subset C$ влечет соотношения $I(A) \leqslant I(C) = \lim_n I(C_n) = \lim_n I(A_n)$, откуда сразу же вытекает равенство $I(A) = \lim_n I(A_n)$. Следовательно, I есть емкость.

Если (H_n) — убывающая последовательность замкнутых множеств из T, то, очевидно, $I(\bigcap_n H_n) = \inf_n I(H_n)$. Отсюда следует, что всякое суслинское подмножество F из T емкостно относительно I (Общая топ., гл. IX (3-е изд.), § 4, п. 9, предл. 15). В частности, всякое борелевское подмножество $A \subset T$ емкостно (там же, п. 3, предл. 10). Иными словами,

$$I(A) = \sup_K I(K),$$

где K пробегает множество компактов, содержащихся в A; тем самым доказано, что I внутренне регулярно.

Замечание. Пусть X — лузинское (в частности, польское) пространство и f — биективное непрерывное отображение X в (регулярное) пространство Y. Известно (Общая топ., гл. IX (3-е изд.),

§ 6, п. 7, предл. 14), что отображение $B \mapsto f^{-1}(B)$ есть биекция борелевской σ-алгебры пространства Y на борелевскую σ-алгебру пространства X. Пространства X и Y — лузинские, а потому сильно радоновы (предл. 3). Отсюда непосредственно следует, что отображение $\mu \mapsto f(\mu)$ есть биекция множества ограниченных мер на X на множество ограниченных мер на Y.

Упражнения

1) Пусть E — некоторое множество, Φ — алгебра подмножеств из E и m — аддитивная функция множеств, определенная на Φ. Обозначим через $\mathscr{E}(\Phi)$ векторное пространство действительных Φ-размещенных функций на E, а через J — такую линейную форму на $\mathscr{E}(\Phi)$, что $J(\varphi_A) = m(A)$ для любого $A \in \Phi$.

a) Для любого $A \in \Phi$ положим $m_+(A) = \sup_{B \subset A,\ B \in \Phi} m(B)$, $m_-(A) = \sup_{B \subset A,\ B \in \Phi} (-m(B))$. Показать, что $|m|(A) = m_+(A) + m_-(A)$ есть верхняя грань множества чисел вида $\sum_{i=1}^{p} |m(A_i)|$ по всем конечным разбиениям $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ множества A на множества, принадлежащие Φ.

b) Говорят, что m *относительно ограничена*, если множество чисел вида $m(B)$ для $B \in \Phi$, $B \subset A$ ограничено для любого множества $A \in \Phi$. Показать, что следующие условия эквивалентны: α) m относительно ограничена; β) линейная форма J на пространстве Рисса $\mathscr{E}(\Phi)$ относительно ограничена; γ) m есть разность двух положительных аддитивных функций множеств на Φ; δ) $|m|(A)$ конечно для любого $A \in \Phi$ (рассуждать по цепочке $\alpha) \Rightarrow \beta) \Rightarrow \gamma) \Rightarrow \delta) \Rightarrow \alpha)$).

c) Предположим, что m относительно ограничена. Показать, что функции множеств $|m|$, m_+ и m_- аддитивны и что $m = m_+ - m_-$ (использовать теорему 1 гл. II, § 2, п. 1). Кроме того, если m' и m'' — аддитивные положительные функции множеств на Φ и $m = m' - m''$, то $m' \geqslant m_+$, $m'' \geqslant m_-$.

d) Говорят, что m счетно аддитивна, если $m(A) = \sum_{n \geqslant 1} m(A_n)$ для любого счетного разбиения $(A_n)_{n \geqslant 1}$ множества $A \in \Phi$ на множества, принадлежащие Φ. Показать, что это условие означает, что $\lim_{n \to \infty} m(A_n) = 0$ для любой убывающей последовательности $(A_n)_{n \geqslant 1}$ элементов из Φ, для которой $\bigcap_{n \geqslant 1} A_n = \varnothing$. Показать, что если m счетно аддитивна то $|m|$ счетно аддитивна.

2) Пусть E — некоторое множество, Φ — алгебра подмножеств из E и V — вполне решеточное пространство Рисса. Говорят, что отображение m алгебры Φ в V положительно, если $m(A) \geqslant 0$ для любого $A \in \Phi$, что оно аддитивно, если $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$, когда

$A \in \Phi$ и $B \in \Phi$ не пересекаются, и что оно относительно ограничено, если множество элементов $m(B)$ для $B \in \Phi$, $B \subset A$ мажорировано в V для любого $A \in \Phi$.

a) Пусть m — относительно ограниченное отображение Φ в V. Определим для любого A элементы $m_+(A)$, $m_-(A)$ и $|m|(A)$ из V, как в упражнении 1a). Показать, что $|m|(A)$ есть верхняя грань множества элементов из V вида $\sum_{i=1}^{p} |m(A_i)|$ по всем конечным разбиениям $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ множества A на множества, принадлежащие Φ. Вывести отсюда, что отображение $|m|$ алгебры Φ в V аддитивно, а затем — что m есть разность аддитивных положительных отображений m_+ и m_- алгебры Φ в V.

b) Пусть m' и m'' — аддитивные положительные отображения Φ в V и $m = m' - m''$. Показать, что m относительно ограничено и что $m' \geqslant m_+$, $m'' \geqslant m_-$.

c) Обобщить упражнение 1d).

3) Пусть E — некоторое множество и $\mathfrak{T}$ — σ-алгебра подмножеств из E. Обозначим через $\mathscr{M}$ множество таких отображений f пространства E в $\overline{\mathbf{R}}_+$, что множество тех $x \in E$, для которых $f(x) \geqslant c$, принадлежит $\mathfrak{T}$ для любого $c \in \overline{\mathbf{R}}_+$.

a) Показать, что верхний предел и нижний предел любой последовательности элементов из $\mathscr{M}$ принадлежат $\mathscr{M}$ (исследовать вначале возрастающие или убывающие последовательности).

b) Показать, что $\mathfrak{T}$ есть множество подмножеств из E, характеристическая функция которого принадлежит $\mathscr{M}$.

c) Пусть $f \in \mathscr{M}$. Для любого борелевского подмножества B из $\overline{\mathbf{R}}_+$ множество $f^{-1}(B)$ принадлежит $\mathfrak{T}$ (миожество таких подмножеств B из $\overline{\mathbf{R}}_+$, что $f^{-1}(B) \in \mathfrak{T}$, есть σ-алгебра, содержащая интервалы $[c, +\infty]$).

d) Пусть $f_1, \ldots, f_n$ принадлежат $\mathscr{M}$ и пусть φ — борелевское отображение $(\overline{\mathbf{R}}_+)^n$ в $\overline{\mathbf{R}}_+$; показать, что отображение $x \mapsto \varphi(f_1(x), \ldots, \ldots, f_n(x))$ пространства E в $\overline{\mathbf{R}}_+$ принадлежит $\mathscr{M}$. Вывести отсюда, что $\mathscr{M}$ содержит сумму любого ряда элементов из $\mathscr{M}$.

e) Показать, что $\mathscr{M}$ есть множество пределов возрастающих последовательностей конечных положительных $\mathfrak{T}$-размещенных функций.

4) Обозначения и предположения — те же, что и в предыдущем упражнении. *Абстрактной мерой* на $(E, \mathfrak{T})$ называется всякое отображение m σ-алгебры $\mathfrak{T}$ в $\overline{\mathbf{R}}_+$, обладающее следующим свойством: для любой последовательности $(A_n)_{n \in \mathbf{N}}$ принадлежащих $\mathfrak{T}$ попарно не пересекающихся множеств $m\left(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbf{N}} m(A_n)$. *Интегралом* на $(E, \mathfrak{T})$ называется всякое отображение J множества $\mathscr{M}$ в $\overline{\mathbf{R}}_+$, удовлетворяющее следующим условиям: $\alpha)$ $J(\lambda f) = \lambda J(f)$ для $\lambda \in \overline{\mathbf{R}}_+$ и $f \in \mathscr{M}$ (при

обычном соглашении $0\cdot(+\infty)=0$); β) $J\left(\sum_{n\in\mathbf{N}} f_n\right)=\sum_{n\in\mathbf{N}} J(f_n)$ для любой последовательности $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ элементов из $\mathscr{M}$.

a) Пусть J — интеграл на $(E, \mathfrak{T})$; для любого подмножества $A\in\mathfrak{T}$ положим $m_J(A)=J(\varphi_A)$; показать, что m_J есть абстрактная мера и что отображение $J\mapsto m_J$ есть биекция множества интегралов на $(E, \mathfrak{T})$ на множество абстрактных мер на $(E, \mathfrak{T})$ (если m — абстрактная мера, то сначала определить $J(f)$ по линейности для конечных положительных $\mathfrak{T}$-размещенных функций и использовать упражнение 3e)). Если m — абстрактная мера, то через m^* будем обозначать соответствующий интеграл.

b) Пусть m — абстрактная мера на $(E, \mathfrak{T})$. Для любой, конечной или нет, положительной функции f на E положим $m^*(f)=\inf_{g\geqslant f,\ g\in\mathscr{M}} m^*(g)$. Показать, что m^* есть заграждение на E (следовать доказательству теоремы 3 гл. IV, § 1, п. 3). Для любого подмножества A из E полагаем $m^*(A)=m^*(\varphi_A)$.

5) Пусть E — некоторое множество, $\mathfrak{T}$ — σ-алгебра подмножеств на E, m — абстрактная мера на $(E, \mathfrak{T})$ и $p\geqslant 1$ — конечное действительное число. Для любой числовой функции f на E положим $N_p(f)=m^*(|f|^p)^{1/p}$ и обозначим через $\mathscr{F}^p$ множество таких функций f, что $N_p(f)$ конечно (ср. § 1, упр. 4). Наделяем векторное пространство $\mathscr{F}^p$ полунормой N_p, относительно которой оно полно.

a) Пусть $\mathscr{N}$ — множество таких функций f, что $m^*(|f|)=0$, $\mathscr{V}^0$ — векторное пространство, порожденное конечными функциями, принадлежащими $\mathscr{M}$, и $\mathscr{L}^p$ — наименьшее замкнутое векторное подпространство из $\mathscr{F}^p$, содержащее характеристические функции таких множеств $A\in\mathfrak{T}$, что $m^*(A)$ конечно. Показать, что $\mathscr{L}^p=\mathscr{N}+(\mathscr{V}^0\cap\mathscr{F}^p)$.

b) Распространить на настоящий случай теорему Лебега (гл. IV, § 3, п. 7, теорема 6) и изучить, в частности, случай $p=1$ (определение интеграла от функции $f\in\mathscr{L}^1$).

c) Говорят, что подмножество A из E m-интегрируемо, если $\varphi_A\in\mathscr{L}^1$. Показать, что тогда существует такое множество $A'\in\mathfrak{T}$, что $m^*(A\cap \mathrm{C}A')=m^*(A'\cap \mathrm{C}A)=0$. Обратное показать для случая, когда $m(E)$ конечно.

6) Пусть E — некоторое множество, $\mathfrak{T}$ — σ-алгебра подмножеств из E и m — абстрактная мера на $(E, \mathfrak{T})$. Предположим, что $m(E)$ конечно и что для любого $B\in\mathfrak{T}$, для которого $m(B)>0$, найдется такое множество $A\in\mathfrak{T}$, что $A\subset B$ и $0<m(A)<m(B)$. Для любого $B\in\mathfrak{T}$ и любого t, $0\leqslant t\leqslant m(B)$, существует такое множество $A\in\mathfrak{T}$, что $m(A)=t$ и $A\subset B$.

°7) Пусть T — топологическое пространство, Φ — алгебра подмножеств из T и m — аддитивное относительно ограниченное отображение (ср. упр. 1) Φ в $\mathbf{R}$. Предположим, что существует такое открытое покрытие $\mathfrak{U}$ пространства T, что Φ состоит из борелевских подмно-

жеств из T, содержащихся в объединении конечного числа элементов из $\mathfrak{A}$. Кроме того, предположим, что для любого $A \in \Phi$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется такое компактное подмножество K из T и такое открытое подмножество U из T, что $K \subset A \subset U$, $U \in \Phi$ и $|m|(U - K) < \varepsilon$. Показать, что существует такая (не обязательно положительная) мера μ на T, что $m(A) = \mu^*(A)$ для любого $A \in \Phi$ и что такая мера единственна (введя разбиение $m = m_+ - m_-$ из упр. 1c), свести к случаю, когда m принимает положительные значения; исследовать вначале случай, когда $T \in \Phi$, и заметить, что тогда m внутренне регулярна; затем изучить общий случай, снова соединяя меры).

8) Пусть T — топологическое пространство и m — счетно аддитивное (ср. упр. 1d)) ограниченное отображение $\mathfrak{B}(T)$ в $\mathbf{R}$. Обозначим через $\mathfrak{T}$ множество борелевских подмножеств A из T, обладающих следующим свойством: для любого $\varepsilon > 0$ найдется замкнутое множество F и такое открытое U из T, что $F \subset A \subset U$ и $|m|(B) < \varepsilon$ для любого борелевского подмножества B из $U - F$ (иными словами, $|m|(U - F) < \varepsilon$). Показать, что $\mathfrak{T}$ есть σ-алгебра подмножеств из T (сначала заметить, что $T \in \mathfrak{T}$ и что $\mathfrak{T}$ есть алгебра; тогда достаточно доказать, что если $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ — последовательность попарно не пересекающихся элементов из $\mathfrak{T}$, то множество $A = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n$ принадлежит $\mathfrak{T}$; для этого выбрать такие замкнутые множества F_n и открытые множества U_n, что $F_n \subset A_n \subset U_n$ и $|m|(U_n - F_n) < \varepsilon/2^n$, а затем положить $F = F_0 \cup \ldots \cup F_p$ для достаточно большого p и $U = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} U_n$).

9) Пусть X — некоторое множество; всякое счетно аддитивное отображение $\mathfrak{P}(X)$ в $\mathbf{R}_+$ называется *калибром*; говорят, что калибр m на X — *непрерывный*, если $m(\{x\}) = 0$ для любого $x \in X$, и *атомический*, если существует такая положительная функция на X, что $m(A) = \sum_{x\in A} f(x)$ для любого подмножества A из X.

a) Показать, что всякий калибр на X разбивается единственным образом на сумму непрерывного калибра и атомического калибра.

b) Пусть X' — подмножество из X и m' — калибр на X'; для любого подмножества A из X положим $m(A) = m'(A \cap X')$. Показать, что m есть калибр на X и что он непрерывен (соотв. атомичен) в том и только том случае, если этим свойством обладает m'.

c) Пусть m — калибр на X и $(X_i)_{i\in I}$ — семейство попарно не пересекающихся подмножеств из X. Если всякий калибр на I атомичен, то $m(\bigcup_{i\in I} X_i) = \sum_{i\in I} m(X_i)$.

10) Пусть X — бесконечное несчетное множество, наделенное отношением порядка, записываемым $x \leqslant y$. Для любого $x \in X$ обозначим через $I(x)$ множество тех $y \in X$, для которых $y < x$. Сделаем следующие предположения: α) в X существует наибольший элемент a; β)

множество кардинальных чисел, строго меньших, чем Card (X), имеет наибольший элемент c; γ) для любого $x \in I_*(a)$ имеем Card $(I(x)) \leqslant c$, и множество Y тех $x \in X$, для которых Card $(I(x)) = c$, непусто; δ) всякий калибр на множестве с кардиналом $\leqslant c$ — атомический. Показать, что всякий калибр на X — атомический. Можно рассуждать от противного следующим образом: пусть m — непрерывный ненулевой калибр на X. Обозначим через b наименьший элемент в Y и пусть для любого $x \in I(a)$ через f_x обозначена инъекция $I(x)$ в $I(b)$. Для любой пары $(x, y) \in I(a) \times I_*^y(b)$ обозначим через $A_{x,y}$ множество тех $z \in X$, для которых $x < z < a$ и $f_z(x) = y$; для любого $x \in I(a)$ обозначим через M_x множество тех $y \in I(b)$, для которых $m(A_{x,y}) > 0$, а для любого $y \in I(b)$ через N_y обозначим множество тех $x \in I(a)$, для которых $m(A_{x,y}) > 0$. Применяя упражнение 9c), показать, что $m(X) = \sum_{y \in I(b)} m(A_{x,y})$; вывести отсюда, что множество M_x счетно и непусто для любого $x \in I(a)$; показать далее, что каждое из множеств N_y счетно, и вывести отсюда противоречие Card $(X) = c$.

11) Говорят, что кардинал c является *уламовым*, если всякий калибр на множестве с кардиналом c — атомический. Показать, что всякий счетный кардинал уламов, что если c — уламов кардинал, то этим свойством обладает и любой кардинал $c' \leqslant c$, и что если $(c_i)_{i \in I}$ — такое семейство уламовых кардиналов, что Card (I) уламов, то кардинал $\sum_{i \in I} c_i$ уламов. Наконец, наименьший несчетный кардинал уламов (ср. упр. 10).

12) Пусть X — некоторое множество, $\mathfrak{U}$ — подмножество из $\mathfrak{P}(X)$ и m — характеристическая функция множества $\mathfrak{U}$. Для того чтобы m было калибром, необходимо и достаточно, чтобы $\mathfrak{U}$ было ультрафильтром и чтобы пересечение любого счетного семейства подмножеств из $\mathfrak{U}$ принадлежало $\mathfrak{U}$. При этих условиях говорят, что $\mathfrak{U}$ есть *ультрафильтр Улама в X*. Предположим, что это имеет место и что $(H_i)_{i \in I}$ — такое семейство элементов из $\mathfrak{U}$, что Card (I) уламов; показать, что $\bigcap_{i \in I} H_i$ принадлежит $\mathfrak{U}$.

13) В этом упражнении допускается континуум-гипотеза, т. е. аксиома, добавляемая к аксиомам теории множеств: «Card (R) есть наименьший несчетный кардинал» *).

а) Всякий калибр на R атомичен (ср. упр. 11).

---

*) Это сводится к утверждению, что можно наделить R структурой полного порядка $\prec$, для которой множество таких $x \in R$, что $x \prec a$, будет счетным при любом $a \in R$. Можно показать (ср. P. Cohen, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, v. L (1963), 1143—1148 и v. LI (1964), 105—110), что эта аксиома не вносит никакого нового противоречия в теорию множеств и что она к тому же не зависит от других аксиом теории множеств.

b) Пусть X — некоторое множество и m — калибр на X, удовлетворяющий следующему свойству: для любого подмножества A из X, удовлетворяющего условию $m(A) > 0$, найдется такое подмножество $B \subset A$, что $0 < m(B) < m(A)$; тогда m будет нулевым (для любого целого $n \geqslant 1$ существует такое конечное разбиение $(X_{n,i})_{i \in I_n}$ множества X, что $m(X_{n,i}) \leqslant 1/n$ для любого $i \in I_n$; положить $I = \coprod_{n \geqslant 1} I_n$ и $X_\alpha = \bigcap_{n \geqslant 1} X_{n,\alpha_n}$ для любого $\alpha = (\alpha_n)_{n \geqslant 1}$ из I; семейство $(X_i)_{i \in I}$ есть разбиение X, для любого $i \in I$ имеем $m(X_i) = 0$, и любой калибр на I является атомическим в силу a); в заключение использовать упр. 9c)).

c) Пусть X — множество, в котором не существует никакого нетривиального ультрафильтра Улама; тогда всякий калибр на X атомичен (в противном случае в силу b) существовал бы непрерывный калибр m на X и такое подмножество $A \subset X$, что $m(A) > 0$ и что $m(B) = 0$ или $m(A - B) = 0$ для любого подмножества $B \subset A$; тогда множество $\mathfrak{U}$ таких подмножеств $B \subset X$, что $m(A) = m(A \cap B)$, было бы нетривиальным ультрафильтром Улама в X).

d) Показать, что $2^{\mathfrak{c}}$ — уламов кардинал для любого уламового кардинала $\mathfrak{c}$ (в силу c)) достаточно показать, что если C — множество с кардиналом $\mathfrak{c}$, то всякий ультрафильтр Улама $\mathfrak{U}$ в $X = \{0, 1\}^C$ тривиален); наделить C структурой полного порядка и определить по трансфинитной индукции такое семейство $s = (s_\alpha)_{\alpha \in C}$ элементов из $\{0, 1\}$, что множество тех $x = (x_\alpha)_{\alpha \in C}$ из X, для которых $x_\alpha = s_\alpha$ при любом $\alpha \leqslant \beta$, принадлежит $\mathfrak{U}$ для любого $\beta \in C$ (ср. упр. 12); тогда s принадлежит каждому элементу из $\mathfrak{U}$ *).

14) Пусть $(T_i)_{i \in I}$ — семейство радоновых топологических пространств и T — пространство, являющееся суммой этого семейства. Если Card (I) уламов, то топологическое пространство T радоново (показать, что для любой положительной ограниченной счетно аддитивной функции m на борелевской σ-алгебре в T существует такое счетное подмножество $J \subset I$, что $m(\bigcup_{i \in I - J} T_i) = 0$).

15) Пусть T — дискретное пространство, кардинал которого есть наименьший несчетный кардинал. Показать, что T — радоново

---

*) Говорят, что кардинал $\mathfrak{c}$ *сильно недостижим*, если он несчетен, если $2^{\mathfrak{b}} < \mathfrak{c}$ для любого кардинала $\mathfrak{b} < \mathfrak{c}$ и если $\sum_{i \in I} \mathfrak{c}_i < \mathfrak{c}$ для любого семейства кардиналов $\mathfrak{c}_i < \mathfrak{c}$, для которого Card $(I) < \mathfrak{c}$. Упражнения 11 и 13 показывают, что если принять континуум-гипотезу, то наименьший не уламов кардинал сильно недостижим. Неизвестно, противоречит ли аксиома существования сильно недостижимых кардиналов другим аксиомам теории множеств.

локально компактное пространство, не являющееся пространством счетного типа (ср. упр. 11). Вывести отсюда, что существуют неметризуемые радоновы локально компактные пространства.

16) Пусть I — счетное множество и $(T_i)_{i\in I}$ — семейство радоновых пространств. Предположим, что всякое компактное подмножество одного из пространств T_i метризуемо. Показать, что пространство-произведение $T = \prod_{i\in I} T_i$ радоново. Обобщить на случай проективных пределов.

17) Пусть T — топологическое пространство.

a) Пусть m — счетно аддитивное отображение $\mathfrak{B}(T)$ в $\mathbf{R}_+$. Предположим, что найдется такая последовательность $(T_n)_{n\in\mathbf{N}}$ борелевских подмножеств из T, что $T = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} T_n$, что $m(T_0) = 0$ и что подпространство T_n из T радоново при любом $n \geqslant 1$. Показать, что существует такая положительная ограниченная мера μ на T, что $m(A) = \mu^*(A)$ для любого борелевского подмножества A из T (можно свести к случаю, когда T_n попарно не пересекаются; для этого надо воспользоваться следствием из предл. 2 п. 3).

b) Распространить предыдущий результат на случай, когда множества T_n при $n \geqslant 1$ предполагаются уже не борелевскими, а только универсально измеримыми в T (рассуждать, как в предл. 2 п. 3).

c) Всякое топологическое пространство, являющееся объединением последовательности компактных метризуемых подпространств, радоново.

18) Пусть T_1, T_2 — топологические пространства и f — непрерывное биективное отображение T_1 на T_2. Предположим, что для любой ограниченной счетно аддитивной функции m_1 на борелевской σ-алгебре $\mathfrak{B}(T_1)$ найдется последовательность таких компактных подмножеств K_n из T_1, что $m_1(T_1 - \bigcup_n K_n) = 0$. Пусть m_2 — ограниченная счетно аддитивная функция на $\mathfrak{B}(T_2)$. Для того чтобы существовала такая ограниченная счетно аддитивная функция m_1 на $\mathfrak{B}(T_1)$, что $m_2(A) = m_1(f^{-1}(A))$ для любого $A \in \mathfrak{B}(T_2)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее условие: существует последовательность таких компактных подмножеств K_n из T_1, что $m_2(T_2 - \bigcup_n f(K_n)) = 0$.

§ 4. Проективные пределы мер

В этом параграфе через I обозначается непустое множество наделенное отношением предпорядка, записываемым $i \leqslant j$, и фильтрующееся по этому отношению. Напомним (Общая топ. (4-е изд.), гл. I, § 4, п. 4), *что проективная система топологи-*

ческих пространств, индексированная множеством I, есть семейство (T_i, p_{ij}), где T_i — топологическое пространство, p_{ij} — непрерывное отображение T_j в T_i для $i \leqslant j$, p_{ii} — тождественное отображение T_i и $p_{ik} = p_{ij} \circ p_{jk}$ для $i \leqslant j \leqslant k$. Пусть T — топологическое пространство и $(p_i)_{i \in I}$ — семейство непрерывных отображений $p_i\colon T \to T_i$. Говорят, что семейство $(p_i)_{i \in I}$ когерентно, если $p_i = p_{ij} \circ p_j$ для $i \leqslant j$, и что оно отделяющее, если для любых различных x, y из T найдется такое $i \in I$, что $p_i(x) \neq p_i(y)$. Когда $T = \varprojlim T_i$, а p_i есть каноническое отображение T в T_i, семейство $(p_i)_{i \in I}$ — когерентное и отделяющее.

1. Дополнения о компактных пространствах и проективных пределах

Предложение 1. *Пусть X, Y — топологические пространства и f — непрерывное отображение X в Y. И пусть $(K_\alpha)_{\alpha \in A}$ — фильтрующееся по убыванию семейство компактных подмножеств из X с пересечением K. Тогда $f(K) = \bigcap\limits_{\alpha \in A} f(K_\alpha)$.*

В самом деле, пусть y — точка из $\bigcap\limits_{\alpha \in A} f(K_\alpha)$; для любого $\alpha \in A$ множество $L_\alpha = K_\alpha \cap f^{-1}(y)$ компактно и непусто. Семейство $(L_\alpha)_{\alpha \in A}$ фильтруется по убыванию, и значит, его пересечение L непусто. Но $L = K \cap f^{-1}(y)$, откуда $y = f(K)$. Стало быть, мы доказали включение $f(K) \supset \bigcap\limits_{\alpha \in A} f(K_\alpha)$; обратное включение очевидно.

Предложение 2. *Пусть заданы проективная система (T_i, p_{ij}) топологических пространств, индексированная множеством I, топологическое пространство T и когерентное отделяющее семейство непрерывных отображений $p_i\colon T \to T_i$. Тогда:*

a) *Для любого компактного подмножества $K \subset T$ имеем $K = \bigcap\limits_{i \in I} p_i^{-1}(p_i(K))$.*

b) *Если K и L — непересекающиеся компактные подмножества из T, то найдется такое $i \in I$, что $p_j(K)$ и $p_j(L)$ не пересекаются при $j \geqslant i$.*

a) Пусть x — точка из $\bigcap\limits_{i \in I} p_i^{-1}(p_i(K))$; для любого $i \in I$ множество K_i, состоящее из точек $y \in K$, для которых $p_i(y) =$

$= p_i(x)$, является непустым замкнутым подмножеством из K. Для $i \leqslant j$ имеем $K_i \supset K_j$, а так как K — компакт, то множество $\bigcap_{i \in I} K_i$ непусто. Пусть y — точка из $\bigcap_{i \in I} K_i$; имеем $y \in K$ и $p_i(y) = p_i(x)$ для любого $i \in I$, откуда $y = x$; таким образом, $x \in K$, чем доказано включение $K \supset \bigcap_{i \in I} p_i^{-1}(p_i(K))$; противоположное включение очевидно.

b) Для любого $i \in I$ положим $M_i = p_i^{-1}(p_i(K)) \cap L$; это есть замкнутое подмножество компактного пространства L; для $i \leqslant j$ имеем $M_i \supset M_j$ и в силу a) получаем $\bigcap_{i \in I} M_i = K \cap L = \varnothing$. Следовательно, найдется такой индекс i, что $M_i = \varnothing$. Для $j \geqslant i$ имеем $p_j^{-1}(p_j(K)) \cap L = M_j \subset M_i = \varnothing$, откуда $p_j(K) \cap p_j(L) = \varnothing$.

2. *Проективные системы мер*

Определение 1. *Пусть* $\mathcal{T} = (T_i, p_{ij})$ — *проективная система топологических пространств, индексированная множеством* I. *Проективной системой* (соответственно *подпроективной системой*) *мер на* $\mathcal{T}$ *называется семейство* $(\mu_i)_{i \in I}$, *где* μ_i — *ограниченная мера на* T_i *для любого* $i \in I$ *и где* $\mu_i = p_{ij}(\mu_j)$ (соответственно $\mu_i \geqslant p_{ij}(\mu_j)$) *для* $i \leqslant j$.

Предложение 3. *Пусть заданы проективная система топологических пространств* $\mathcal{T} = (T_i, p_{ij})$, *индексированная множеством* I, *топологическое пространство* T, *когерентное отделяющее семейство непрерывных отображений* p_i: $T \to T_i$ (*для* $i \in I$) *и подпроективная система* $(\mu_i)_{i \in I}$ *мер на* $\mathcal{T}$. *Для любого компактного подмножества* $K \subset T$ *положим*

$$J(K) = \inf_{i \in I} \mu_i^*(p_i(K)). \tag{1}$$

Тогда существует, и притом единственная, такая ограниченная мера π *на* T, *что* $\pi^*(K) = J(K)$ *для любого компакта* $K \subset T$. *Для любого* $i \in I$ *выполняется неравенство* $\mu_i \geqslant p_i(\pi)$, *и* π — *наибольшая мера на* T, *удовлетворяющая этому условию.*

Докажем вначале, что $J(K)$ есть предел для $\mu_i(p_i(K))$ по фильтру сечений $\mathfrak{F}$ предупорядоченного фильтрующегося множества I; для этого достаточно (Общая топ., гл. IV (3-е изд.),

§ 5, п. 2, теорема 2) показать, что $\mu_i^*(p_i(K)) \geqslant \mu_j^*(p_j(K))$ для $i \leqslant j$, но если положить $\mu'_{ij} = p_{ij}(\mu_j)$, то $\mu'_{ij} \leqslant \mu_i$ и $p_j(K) \subset \subset p_{ij}^{-1}(p_i(K))$, откуда

$$\mu_j^*(p_j(K)) \leqslant \mu_j^*(p_{ij}^{-1}(p_i(K))) = (\mu'_{ij})^*(p_i(K)) \leqslant \mu_i^*(p_i(K)).$$

Перейдем теперь к изучению свойств функции J.

1) Ясно, что $J(K) \leqslant J(L)$ при $K \subset L$.

2) Если K и L — компактные подмножества из T, то для любого $i \in I$ $p_i(K \cup L) \subset p_i(K) \cup p_i(L)$, откуда

$$\mu_i^*(p_i(K \cup L)) \leqslant \mu_i^*(p_i(K)) + \mu_i^*(p_i(L));$$

переходя к пределу по фильтру $\mathfrak{F}$, получаем $J(K \cup L) \leqslant J(K) + J(L)$.

3) Предположим, что компакты K и L не пересекаются. Согласно предложению 2 п. 1 найдется такое $i \in I$, что $p_j(K) \cap p_j(L) = \varnothing$ для $j \geqslant i$. Следовательно, при $j \geqslant i$

$$\mu_j^*(p_j(K \cup L)) = \mu_j^*(p_j(K)) + \mu_j^*(p_j(L)),$$

откуда $J(K \cup L) = J(K) + J(L)$, если перейти к пределу по фильтру $\mathfrak{F}$.

4) Пусть $(K_\alpha)_{\alpha \in A}$ — фильтрующееся по убыванию семейство компактных подмножеств из T с пересечением K. В силу предложения 1 п. 1 $p_i(K) = \bigcap\limits_{\alpha \in A} p_i(K_\alpha)$, и значит, $\mu_i^*(p_i(K)) = \inf\limits_{\alpha \in A} \mu_i^*(p_i(K_\alpha))$ для любого $i \in I$ (§ 1, п. 6, следствие из предл. 5). Отсюда выводим, что

$$J(K) = \inf_{i \in I} \mu_i^*(p_i(K)) = \inf_{i \in I} \inf_{\alpha \in A} \mu_i^*(p_i(K_\alpha)) =$$

$$= \inf_{\alpha \in A} \inf_{i \in I} \mu_i^*(p_i(K_\alpha)) = \inf_{\alpha \in A} J(K_\alpha).$$

5) Выберем i в I и положим $c = \mu_i^*(T_i)$. Тогда c конечно и $J(K) \leqslant \mu_i^*(p_i(K)) \leqslant \mu_i^*(T_i)$; т. е. $J(K) \leqslant c$ для любого компакта $K \subset T$.

Сформулированные свойства позволяют применить теорему 1 § 3, п. 1; мы заключаем, что существует, и притом единственная, такая ограниченная мера π на T, что $\pi^*(K) = J(K)$ для любого компактного подмножества K из T. Для любого $i \in I$ обозначим через ν_i меру на T_i, являющуюся образом меры π при отображении

p_i. Пусть $i \in I$, A — компактное подмножество из T_i и $\mathfrak{L}$ — множество компактных подмножеств из $p_i^{-1}(A)$. Согласно замечанию 3 § 1, п. 2 имеем $\pi^*(p_i^{-1}(A)) = \sup_{K \in \mathfrak{L}} \pi^*(K)$; кроме того, $\nu_i^*(A) = \pi^*(p_i^{-1}(A))$ и $J(K) = \pi^*(K)$ для $K \in \mathfrak{L}$, откуда $\nu_i^*(A) = \sup_{K \in \mathfrak{L}} J(K)$. Для $K \in \mathfrak{L}$ имеем $p_i(K) \subset A$, откуда $J(K) \leqslant \mu_i^*(p_i(K)) \leqslant \mu_i^*(A)$, и окончательно, $\nu_i^*(A) \leqslant \mu_i^*(A)$. А поскольку A — произвольное компактное множество из T_i, то отсюда заключаем, что $\nu_i \leqslant \mu_i$.

Теорема 1 (Прохоров). *Пусть $\mathscr{T} = (T_i, p_{ij})$ — проективная система топологических пространств, индексированная множеством I, T — топологическое пространство и $(p_i)_{i \in I}$ — когерентное отделяющее семейство непрерывных отображений $p_i\colon T \to T_i$. Наконец, пусть $(\mu_i)_{i \in I}$ — проективная система мер на $\mathscr{T}$.*

Для того чтобы на T существовала такая ограниченная мера μ, что $p_i(\mu) = \mu_i$ для любого $i \in I$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее условие:

(Р) *для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое компактное подмножество $K \subset T$, что $\mu_i^*(T_i - p_i(K)) \leqslant \varepsilon$ для любого $i \in I$.*

Если это условие выполнено, то мера μ определяется единственным образом и

$$\mu^*(K) = \inf_i \mu_i^*(p_i(K)) \tag{2}$$

для любого компактного множества $K \subset T$.

Докажем сначала единственность μ. Пусть μ — такая ограниченная мера на T, что $p_i(\mu) = \mu_i$ для любого $i \in I$. Пусть K — компактное подмножество из T; согласно предложению 2 п. 1 множество K является пересечением фильтрующегося по убыванию семейства $(p_i^{-1}(p_i(K)))_{i \in I}$ *замкнутых* подмножеств из T. Стало быть, в силу следствия из предложения 5 § 1, п. 6 имеем

$$\mu^*(K) = \inf_{i \in I} \mu^*(p_i^{-1}(p_i(K))) = \inf_{i \in I} \mu_i^*(p_i(K)),$$

чем доказана формула (2). А поскольку меры, совпадающие на множестве компактных множеств, равны (§ 1, п. 2, следствие из предл. 2), то отсюда вытекает единственность μ.

Согласно предложению 3 на T существует такая ограниченная мера π, что $\pi^*(K) = \inf_{i \in I} \mu_i^*(p_i(K))$ для любого компактного

подмножества K из T. В силу формулы (2) существование ограниченной меры μ на T, для которой $p_i(\mu) = \mu_i$ при любом $i \in I$, эквивалентно, следовательно, соотношению:

(P′) $p_i(\pi) = \mu_i$ *для любого* $i \in I$.

Для $i \leqslant j$ имеем $\mu_i = p_{ij}(\mu_j)$, откуда $\mu_i^*(T_i) = \mu_j^*(T_j)$; а поскольку I — фильтрующееся, то найдется такое конечное число $c \geqslant 0$, что $\mu_i^*(T_i) = c$ для любого $i \in I$. Мера $\mu_i - p_i(\pi)$ в силу предложения 3 положительна, и значит, обращается в нуль в том и только том случае, если ее полная масса равна нулю, т. е. если $\mu_i(T_i) = p_i(\pi)^*(T_i)$. Но $p_i(\pi)^*(T_i) = \pi^*(T)$, и стало быть, условие (P′) эквивалентно равенству $\pi^*(T) = c$, т. е. (§ 1, п. 2, замечание 3) свойству:

(P″) $\sup\limits_{K \in \mathfrak{K}} \pi^*(K) = c$, *где* $\mathfrak{K}$ — *множество компактных подмножеств из* T.

Но для $K \in \mathfrak{K}$ имеем

$$\pi^*(K) = \inf_{i \in I} \mu_i^*(p_i(K)) = c - \sup_{i \in I} \mu_i^*(T_i - p_i(K)),$$

и из этой формулы сразу следует эквивалентность (P) и (P″).

Теорема доказана.

Пусть (T_i, p_{ij}) — проективная система топологических пространств. Положим $T = \varprojlim T_i$ и обозначим через p_i каноническое отображение T в T_i. Обобщая определение 2 гл. III, § 4, п. 5, будем говорить, что ограниченная мера μ на T есть *проективный предел проективной системы* $(\mu_i)_{i \in I}$ *мер*, если $\mu_i = p_i(\mu)$ для любого $i \in I$. Теорема 1 дает критерий существования проективных пределов мер. Когда пространства T_i *компактны*, а отображения p_{ij} сюръективны, то T компактно и $p_i(T) = T_i$ для любого $i \in I$; стало быть, условие (P) выполнено, и мы снова получаем предложение 8 (iv) гл. III, § 4, п. 5.

Замечание. Пусть $(\mu_i)_{i \in I}$ — проективная система мер на проективной системе пространств $\mathcal{T} = (T_i, p_{ij})$. Предположим, что задано топологическое пространство T' и непрерывные отображения $p_i' : T' \longrightarrow T_i$; предположим также, что семейство $(p_i')_{i \in I}$ когерентное, но не обязательно отделяющее. *Если условие Прохорова* (P) *выполняется для семейства* $(p_i')_{i \in I}$, *то существует такая* (*не обязательно единственная*) *мера* μ' *на* T', *что* $p_i'(\mu') = \mu_i$ *для любого* $i \in I$.

Пусть $T = \varprojlim T_i$ $p' = (p'_i)_{i\in I}$ и p_i — каноническое отображение T в T_i; условие Прохорова выполнено для T и p_i, ибо $p_i(p'(K')) = p'_i(K')$, и $p'(K')$ компактно в T для любого компактного подмножества K' из T'. По теореме 1 существует такая ограниченная мера μ на T, что $p_i(\mu) = \mu_i$ для любого $i \in I$. Пусть K' — компактное множество в T'; имеем $\mu^*(p'(K')) = \inf_{i\in I} \mu_i^*(p'_i(K'))$, откуда

$$\mu^*(T - p'(K')) = \sup_{i\in I} \mu_i^*(T_i - p'_i(K')).$$

Пусть $\varepsilon > 0$; условие Прохорова (P) удовлетворяется для p'_i, и значит, можно найти такой компакт K' из T', что $\mu^*(T - p'(K')) \leqslant \varepsilon$. Тогда предложение 8 § 2, п. 4 доказывает существование ограниченной меры μ' на T', для которой $\mu = p'(\mu')$, откуда $\mu_i = p_i(\mu) = p_i(p'(\mu')) = p'_i(\mu')$ для любого $i \in I$.

3. *Случай счетных проективных систем*

Теорема 2. *Предположим, что предупорядоченное фильтрующееся множество I имеет конфинальное счетное подмножество. И пусть $\mathcal{T} = (T_i, p_{ij})$ — проективная система топологических пространств, $T = \varprojlim T_i$ и p_i — каноническое отображение T в T_i. Тогда любая проективная система $(\mu_i)_{i\in I}$ мер на $\mathcal{T}$ имеет проективный предел.*

Мы исследуем вначале случай, когда $I = \mathbf{N}$, и положим $q_n = p_{n,n+1}$. Пусть $\varepsilon > 0$. Определим по индукции последовательность компактных множеств $L_n \subset T_n$ следующим образом: L_0 — такое компактное подмножество из T_0, что $\mu_0^*(T_0 - L_0) \leqslant \varepsilon/2$, а для $n \geqslant 0$ компактное множество L_{n+1} содержится в $q_n^{-1}(L_n)$ и таково, что

$$\mu_{n+1}^*(q_n^{-1}(L_n) - L_{n+1}) \leqslant \varepsilon/2^{n+2}.$$

Это построение возможно в силу замечания 3 § 1, п. 2. Имеем

$$\mu_{n+1}^*(T_{n+1} - L_{n+1}) = \mu_{n+1}^*(T_{n+1} - q_n^{-1}(L_n)) +$$

$$+ \mu_{n+1}^*(q_n^{-1}(L_n) - L_{n+1}) \leqslant \mu_{n+1}^*(T_{n+1} - q_n^{-1}(L_n)) + \varepsilon/2^{n+2} =$$

$$= \mu_n^*(T_n - L_n) + \varepsilon/2^{n+2},$$

ибо $\mu_n = q_n(\mu_{n+1})$; отсюда индукцией по p выводим

$$\mu_p^*(T_p - L_p) \leqslant \varepsilon(1 - 1/2^{p+1}) \leqslant \varepsilon.$$

Так как T — замкнутое подпространство из $\prod_{n\in\mathbf{N}} T_n$, а пространство — произведение $\prod_{n\in\mathbf{N}} L_n$ компактно, то подмножество $L = T \cap \prod_{n\in\mathbf{N}} L_n = \bigcap_{n\in\mathbf{N}} p_n^{-1}(L_n)$ из T компактно. Пусть $n \in \mathbf{N}$; имеем $p_n(L) = \bigcap_{m\geqslant n} p_{nm}(L_m)$ (Общая топ., гл. I (4-е изд.), § 9, п. 6, предл. 8) и $p_{nm}(L_m) \supset p_{nm'}(L_{m'})$ для $m' \geqslant m \geqslant n$, откуда

$$\mu_n^*(T_n - p_n(L)) = \lim_{m\to\infty} \mu_n^*(T_n - p_{nm}(L_m)).$$

Но при $m \geqslant n$ мера μ_n есть образ меры μ_m при отображении p_{nm}, откуда

$$\mu_n^*(T_n - p_{nm}(L_m)) = \mu_m^*(T_m - p_{nm}^{-1}(p_{nm}(L_m))) \leqslant$$
$$\leqslant \mu_m^*(T_m - L_m) \leqslant \varepsilon;$$

переходя к пределу по m, получаем $\mu_n^*(T_n - p_n(L)) \leqslant \varepsilon$. Иными словами, условие Прохорова (P) выполнено, если существует такая ограниченная мера μ на T, что $\mu_n = p_n(\mu)$ для любого $n \in \mathbf{N}$ (п. 2, теорема 1).

Перейдем к общему случаю: в I существует возрастающая конфинальная последовательность $(i_n)_{n\in\mathbf{N}}$. Отображение $t \mapsto (p_{i_n}(t))_{n\in\mathbf{N}}$ есть гомеоморфизм T на проективный предел проективной системы $(T_{i_n}, p_{i_n i_m})$ (Общая топ., гл. I (4-е изд.), § 4, п. 4). Стало быть, согласно первой части доказательства существует такая ограниченная мера μ на T, что $\mu_{i_n} = p_{i_n}(\mu)$ для любого $n \in \mathbf{N}$. Пусть $i \in I$; найдется такое $n \in \mathbf{N}$, что $i \leqslant i_n$ и что

$$p_i(\mu) = p_{ii_n}(p_{i_n}(\mu)) = p_{ii_n}(\mu_{i_n}) = \mu_i.$$

Теорема доказана.

Теорема 2 используется часто в следующей ситуации: Пусть D — счетное множество и $(X_t)_{t\in D}$ — семейство топологических пространств. И пусть $\mathfrak{F}$ — множество конечных подмножеств из D, упорядоченное по включению. Для J из $\mathfrak{F}$ положим $X_J = \prod_{t\in J} X_t$, и пусть для $J \subset J'$ через $p_{JJ'}$ обозначена каноническая проекция $X_{J'}$, на частичное произведение X_J. Положим также $X = \prod_{t\in D} X_t$ и обозначим через p_J каноническую проекцию X на частичное произведение X_J. Легко видеть (ср. Теория множ., гл. III (2-е изд.), § 7, п. 2, замечание 3), что семейство $(p_J)_{J\in\mathfrak{F}}$

определяет гомеоморфизм X на $\varprojlim X_J$. Тогда проективная система мер μ есть семейство таких ограниченных мер μ_J на X_J, что $\mu_J = p_{JJ'}(\mu_{J'})$ для $J \subset J'$. Существует, и притом единственная, такая ограниченная мера μ на X, что $\mu_J = p_J(\mu)$ для любого конечного подмножества J из D («Теорема Колмогорова»). Иногда говорят, что μ есть мера на $\coprod_{t\in D} X_t$ с *маргинальными* мерами μ_J.

В частности, предположим, что для любого $t \in D$ задана мера ν_t на X_t с полной массой 1. Положим $\mu_J = \bigotimes_{t\in J} \nu_t$ для любого конечного подмножества J из D. Пусть $J \subset J'$ — два конечных подмножества из D и $K = J' - J$; если отождествить $X_{J'}$ с $X_J \times X_K$, то $\mu_{J'} = \mu_J \otimes \mu_K$, а так как мера μ_K имеет полную массу 1, то проекция $\mu_J \otimes \mu_K$ на X_J равна μ_J. Мера на X, имеющая в качестве маргинальных меры μ_J, обозначается $\bigotimes_{t\in D} \nu_t$ и называется *произведением семейства* $(\nu_t)_{t\in D}$. В случае компактных пространств X_t мы снова приходим к построению из гл. III (2-е изд.), § 4, п. 6.

Упражнения

1) Пусть $\mathscr{T} = (K_i, p_{ij})$ — проективная система компактных пространств, индексированная множеством I, K — компактное пространство и $(p_i)_{i\in I}$ — когерентное отделяющее семейство непрерывных отображений p_i: $K \longrightarrow K_i$.

a) Пусть A — множество непрерывных функций на K вида $f_i \circ p_i$, где i пробегает I, а f_i — множество непрерывных функций на K_i. Показать, что A есть плотное векторное подпространство пространства $\mathscr{C}(K)$.

b) Пусть $(\mu_i)_{i\in I}$ — подпроективная система положительных мер на $\mathscr{T}$. Предположим, что p_i сюръективны. Для любой $f \in A$ обозначим через I_f множество тех $i \in I$, для которых f имеет вид $f_i \circ p_i$, где $f_i \in \mathscr{C}(K_i)$ (обязательно единственна). Показать, что существует, и притом единственная, такая мера π на K, что $\pi(f) = \inf_{i\in I_f} \mu_i(f_i)$ для любой $f \in A$. Показать, что π — наибольшая из положительных мер μ на K, для которых $p_i(\mu) \leqslant \mu_i$ при любом $i \in I$.

°2) Пусть имеют место условия и обозначения теоремы 1 п. 2, для которой мы наметим новое доказательство.

a) Пусть K — компактное подмножество из T; для любого $i \in I$ положим $K_i = p_i(T)$ и обозначим через q_i отображение K на K_i, совпадающее на K с p_i; для $i \leqslant j$ обозначим через q_{ij} отображение K_j в K_i, совпадающее на K_j с p_{ij}. Вывести из предыдущего упражнения суще-

ствование такой наибольшей положительной меры π^K на K, что $q_i(\pi^K) \leqslant (\mu_i)_{K_i}$ для любого $i \in I$.

b) Если K и L — компактные подмножества из T и $K \subset L$, то показать, что $(\pi^L)_K \geqslant \pi^K$; вывести отсюда, что множество мер вида $i^K(\pi^K)$ (где K пробегает множество компактных подмножеств из T и где i^K есть каноническая инъекция K в T) имеет верхнюю грань μ в $\mathscr{M}_+(T)$.

c) Показать, что $p_i(\mu) = \mu_i$ для любого $i \in I$ (достаточно заметить, что $p_i(\mu) \leqslant \mu_i$ и что меры $p_i(\mu)$ и μ_i согласно условию (P) имеют одинаковую полную массу).

§ 5. Меры на вполне регулярных пространствах

Если T — топологическое, а F — банахово пространство, то $\mathscr{C}^b(T; F)$ означает пространство непрерывных ограниченных функций на T со значениями в F, наделенное нормой равномерной сходимости. Если $F = \mathbf{R}$, то это обозначение записывается сокращенно $\mathscr{C}^b(T)$ или $\mathscr{C}^b$, когда не может быть путаницы, а через $\mathscr{C}^b_+(T)$ или $\mathscr{C}^b_+$ обозначается конус положительных функций в $\mathscr{C}^b(T)$. Пространство ограниченных комплексных мер на T будет обозначаться $\mathscr{M}^b(T, \mathbf{C})$, пространство ограниченных действительных мер — через $\mathscr{M}^b(T)$ или $\mathscr{M}^b$, а конус положительных ограниченных мер — через $\mathscr{M}^b_+(T)$ или $\mathscr{M}^b_+$.

1. Меры и непрерывные ограниченные функции

Напомним (Общая топ., гл. IX (3-е изд.), § 1, п. 5, опр. 4), что топологическое пространство T называется *вполне регулярным*, если оно униформизуемо и отделимо. Это равносильно утверждению (там же, предл. 3), что T гомеоморфно некоторому подпространству компактного пространства. Если T вполне регулярно, то всякая полунепрерывная снизу положительная функция f на T есть верхняя огибающая фильтрующегося по возрастанию множества элементов из $\mathscr{C}^b_+(T)$, мажорированных функцией f, а всякая полунепрерывная сверху положительная ограниченная функция g есть нижняя огибающая фильтрующегося по убыванию множества элементов из $\mathscr{C}^b_+(T)$, мажорирующих g (там же, § 1, п. 7, предл. 7). Нам понадобится следующая лемма:

Лемма 1. *Пусть T — вполне регулярное пространство, K — компактное подмножество из T и U — открытое подмножество из T, содержащее K.*

a) *Найдется такое открытое подмножество U' из T, что* $K \subset U' \subset \bar{U}' \subset U$.

b) *Пусть f — непрерывная функция на K со значениями в интервале I из* **R** (соответственно *в* **C**). *Существует непрерывная ограниченная функция f' на T со значениями в I* (соотв. *в* **C**), *продолжающая f и обращающаяся в нуль на $T - U$.*

Достаточно изучить случай, когда T есть подпространство компактного пространства X. Пусть V — такое открытое подмножество из X, что $V \cap T = U$; обозначим через V' такое открытое множество из X, содержащее K, что $\bar{V}' \subset V$, а через g — непрерывную функцию на X со значениями в I (соотв. в **C**), продолжающую f и обращающуюся в нуль на $X - V$ (Общая топ., гл. IX (3-е изд.), § 4, п. 1, предл. 1). Условие a) будет выполнено, если взять $U' = V' \cap T$, а b) — если взять в качестве f' сужение g на T.

Предложение 1. *Пусть T — вполне регулярное пространство.*

a) *Пусть μ — положительная мера на T, а $f \geqslant 0$ — числовая функция на T, полунепрерывная снизу* (соотв. *полунепрерывная сверху, конечная и с компактным носителем*). *Тогда*

$$\mu^*(f) = \sup_{g \in I_f} \mu^*(g) \quad (\text{соотв. } \mu^*(f) = \inf_{g \in S_f} \mu(g)), \tag{1}$$

где I_f (соотв. S_f) — *множество таких непрерывных ограниченных функций, что $0 \leqslant g \leqslant f$* (соотв. $g \geqslant f$).

b) *Пусть θ — комплексная мера на T и $f \geqslant 0$ — числовая функция на T, полунепрерывная снизу. Тогда*

$$|\theta|^*(f) = \sup_g |\theta(g)|, \tag{2}$$

где g пробегает множество непрерывных ограниченных комплексных функций, $|\theta|$-интегрируемых и таких, что $|g| \leqslant f$.

Первая формула (1) очевидна, поскольку I_f есть фильтрующееся по возрастанию множество непрерывных функций с верхней огибающей f, и мы можем применить предложение 5 § 1, п. 6. То же самое предложение позволяет получить и вторую формулу, если мы покажем, что S_f содержит непрерывную ограниченную μ-интегрируемую функцию. Итак, пусть K — носитель функции f, а M — ее верхняя грань; M конечно в силу компактности K (Общая топ., гл. IV (3-е изд.), § 6, п. 2, теорема 3). Пусть U —

открытое множество, содержащее K и такое, что $\mu^*(U) < +\infty$; найдется (лемма 1) непрерывная функция g со значениями в $[0, M]$, равная M на K и нулю вне U; тогда $g \in S_f$ и $\mu^*(g) \leqslant M\mu^*(U) < +\infty$.

Перейдем к b). Очевидно, достаточно показать, что $|\theta|^*(f) \leqslant \sup_g |\theta(g)|$. Пусть действительные числа a и b таковы, что $a < b < |\theta|^*(f)$. В силу (1) найдется такая функция $h \in \mathscr{C}_+^b(T)$, что $h \leqslant f$ и $|\theta|^*(h) > b$; обозначим через M верхнюю грань функции h. По определению $|\theta|^*$ (§ 1, п. 2, опр. 4) найдется такое компактное подмножество K из T, что $|\theta|_K^*(h_K) > b$. Тогда существует такая непрерывная комплексная функция j на K, что $|j| \leqslant h_K$ и что $|\theta_K(j)| > b$ (гл. III (2-е изд.), § 1, п. 6). Выберем открытое множество U, содержащее K и такое, что $|\theta|^*(U - K) \leqslant (b - a)/M$ (§ 1, п. 9, предл. 13 и 14); продолжим j до непрерывной комплексной функции k на T, обращающейся в нуль вне U (лемма 1); для любого $t \in T$ положим

$$g(t) = \begin{cases} k(t), & \text{если } |k(t)| \leqslant h(t), \\ \dfrac{k(t)}{|k(t)|} h(t), & \text{если } |k(t)| > h(t). \end{cases} \tag{3}$$

Очевидно, что $|g| \leqslant h \leqslant f$ и $g = j$ на K, следовательно, $||\theta_K(j)| - |\theta(g)|| = |\theta(j^0)| - |\theta(g)|| \leqslant |\theta|^*(|j^0 - g|) \leqslant M \cdot |\theta|^*(U - K) \leqslant b - a$, откуда $|\theta(g)| > a$. С другой стороны, покажем, что g — непрерывная функция: так как a подчинено только условию $a < |\theta|^*(f)$, то отсюда будет следовать, что правая часть в (2) мажорирует левую, откуда и получим утверждение. Итак, пусть F (соотв. F') — множество тех $t \in T$, для которых $|k(t)| \leqslant h(t)$ (соотв. $|k(t)| \geqslant h(t)$). Поскольку эти множества замкнуты и их объединение равно T, нам достаточно показать, что g_F и $g_{F'}$ непрерывны, но это свойство очевидно для $g_F = k_F$, а также для $g_{F'}$ в точках, где $k(t) \neq 0$; с другой стороны, если $t \in F'$ — точка, в которой $k(t) = 0$, то $h(t) = 0$, и из неравенства $|g| \leqslant h$ выводим, что g непрерывна в t.

Замечания. 1) Пусть f — полунепрерывная снизу положительная функция и пусть J_f — множество непрерывных ограниченных положительных функций, *обращающихся в нуль вне открытого* μ-*интегрируемого множества* и мажорируемых функцией f. Можно

показать, что f есть верхняя огибающая множества J_f и что $\mu^*(f) = \sup_{g \in J_f} \mu(g)$.

2) Если мера μ ограничена, то формула $\mu^*(f) = \inf_{g \in S_f} \mu(g)$, очевидно, справедлива для любой функции f, полунепрерывной сверху, положительной и ограниченной.

Предложение 2. *Пусть η и η' — такие комплексные меры на вполне регулярном пространстве T, что $\eta(f) = \eta'(f)$ для любой функции $f \in \mathscr{C}^b(T)$, интегрируемой относительно $|\eta|$ и $|\eta'|$. Тогда $\eta = \eta'$.*

Воспользуемся доказательством второй части предложения 1, положив $\theta = \eta - \eta'$. Мы можем потребовать, чтобы открытое множество U было интегрируемо относительно $|\eta|$ и $|\eta'|$. Тогда функция g интегрируема относительно этих двух мер, и из соотношения $\theta(g) = 0$ вытекает, что $a < 0$; стало быть, $|\theta|^*(f) = 0$ для любой полунепрерывной снизу положительной функции f, и, полагая $f = +\infty$, окончательно получаем, что $|\theta| = 0$.

Предложение 3. *Пусть μ — положительная мера на вполне регулярном пространстве T и пусть $p \in [1, +\infty[$. Пространство $\mathscr{H}$ функций $f \in \mathscr{C}^b(T)$, носитель которых содержится в открытом μ-интегрируемом множестве, плотно в $\mathscr{L}^p(\mu)$.*

Согласно предложению 15 § 1, п. 10 достаточно показать, что если K компактно в T и если g — нуль-продолжение на T некоторой функции из $\mathscr{C}^+(K)$, заключенной между 0 и 1, то найдется функция $f \in \mathscr{C}^b_+(T)$ с компактным носителем в открытом μ-интегрируемом множестве и такая, что $\|f - g\|_p$ сколь угодно мало. Итак, пусть $\varepsilon > 0$ — некоторое число, U — такая открытая окрестность K, что $\mu^*(U - K) < \varepsilon$, V — такая открытая окрестность K, что $\bar{V} \subset U$, и f — непрерывная функция со значениями в $[0, 1]$, равная g на K и 0 вне V (лемма 1). Тогда функция $|f-g|^p$ мажорируется функцией φ_{U-K}; стало быть, $\|f - g\|_p \leqslant \varepsilon^{1/p}$, и предложение доказано.

Замечание 3). Аналогичное утверждение имеет место для функций со значениями в банаховом пространстве F: подпространство $\mathscr{H} \otimes F$ из $\mathscr{C}^b(T; F)$ плотно в $\mathscr{L}^p_F(\mu)$.

Предложение 4. *Для того чтобы ограниченная комплексная мера θ на вполне регулярном пространстве T была положительна,*

необходимо и достаточно, чтобы $\theta(f) \geqslant 0$ *для любой функции* $f \in \mathscr{C}^b_+(T)$.

Необходимость очевидна. Для доказательства достаточности воспользуемся доказательством предыдущего предложения, взяв $p = 1$ и $\mu = |\theta|$ и сохранив остальные обозначения; из соотношений $\mu^*(|f - g|) \leqslant \varepsilon$ и $\theta(f) \geqslant 0$ получаем $\theta_K(g_K) = \theta(g) \geqslant -\varepsilon$; а так как g_K — произвольный элемент из $\mathscr{C}(K)$, заключенный между 0 и 1, то мера θ_K положительна; в силу произвольности K это означает, что θ положительна.

2. *Ограниченные меры и линейные формы на* $\mathscr{C}^b(T)$

Предложение 5. *Пусть* T *— вполне регулярное пространство и* I *— непрерывная комплексная линейная форма на нормированном пространстве* $\mathscr{C}^b(T; \mathbf{C})$. *Для того чтобы существовала такая ограниченная комплексная мера* θ *на* T, *что* $\theta(f) = I(f)$ *для любого* $f \in \mathscr{C}^b(T; \mathbf{C})$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее условие*:

(М) *Для любого числа* $\varepsilon > 0$ *найдется такое компактное подмножество* K *из* T, *что из соотношений* $g \in \mathscr{C}^b(T; \mathbf{C})$, $|g| \leqslant 1$, $g_K = 0$ *следует неравенство* $|I(g)| \leqslant \varepsilon$.

При выполнении этого условия мера θ *единственна.*

Единственность вытекает из предложения 2 п. 1. Покажем, что условие (М) необходимо. Пусть θ — ограниченная комплексная мера и пусть K — такое компактное множество, что $|\theta|^*(T - K) \leqslant \varepsilon$ (§ 1, п. 2, замечание 3). Из условий $|g| \leqslant 1$, $g_K = 0$ выводим, что $|g| \leqslant \varphi_{CK}$, и значит, $|\theta(g)| \leqslant |\theta|^*(\varphi_{CK}) \leqslant \varepsilon$.

Перейдем к доказательству достаточности. Пусть X — компактификация Стоуна — Чеха пространства T (Общая топ., гл. IX (3-е изд.), § 1, п. 6). Для любой функции $f \in \mathscr{C}^b(X; \mathbf{C})$ положим $\nu(f) = I(f_T)$; мы определяем тем самым непрерывную линейную форму ν на $\mathscr{C}^b(X; \mathbf{C})$, т. е. комплексную меру на компактном пространстве X. Пусть $\varepsilon > 0$ и K — компактное множество, удовлетворяющее (М); поскольку функция φ_{CK} полунепрерывна снизу и положительна на X, то формула (2) приводит к следующим соотношениям, где $\mathscr{G}$ означает множество функций $g \in \mathscr{C}^b(X; \mathbf{C})$, удовлетворяющих неравенству $|g| \leqslant \varphi_{CK}$:

$$|\nu|^*(X - K) = \sup_{g \in \mathscr{G}} |\nu(g)| = \sup_{g \in \mathscr{G}} |I(g_T)| \leqslant \varepsilon.$$

Пусть $(K_n)_{n\geqslant 1}$ — такая последовательность компактных подмножеств из T, что каждое K_n удовлетворяет (M) для $\varepsilon = 1/n$, и пусть $S = \bigcup_n K_n$; S есть борелевское множество в X, содержащееся в T, и $|\nu|^*(X - T) \leqslant |\nu|^*(X - S) \leqslant |\nu|^*(X - K_n) \leqslant 1/n$ для любого n, так что T ν-измеримо и ν сосредоточена на T. Пусть f — непрерывная ограниченная функция на T; так как X есть компактификация по Стоуну — Чеху пространства T, то f продолжается по непрерывности до функции $g \in \mathscr{C}^b(X; \mathbf{C})$. Пусть теперь μ — мера, индуцированная мерой ν на T; имеем $\mu(f) = \nu(f^0)$ *). Мера ν сосредоточена на T, поэтому функции f^0 и g равны ν-почти всюду, и значит, $\mu(f) = \nu(g) = I(g_T) = I(f)$, чем и завершается доказательство.

Следствие. *Предположим, что существует такая положительная ограниченная мера μ на T, что $|I(f)| \leqslant \mu(|f|)$ для любой $f \in \mathscr{C}^b(T; \mathbf{C})$; тогда существует такая комплексная мера θ на T, что $\theta(f) = I(f)$ для любой $f \in \mathscr{C}^b(T; \mathbf{C})$.*

3. Узкая сходимость ограниченных мер

Пусть T — вполне регулярное пространство; билинейная форма $(f, \mu) \mapsto \int f(t)\, d\mu(t)$ на $\mathscr{C}^b(T) \times \mathscr{M}^b(T)$ приводит эти пространства в отделяющую двойственность. В самом деле, что двойственность отделяющая по $\mathscr{C}^b(T)$, ясно из того, что меры ε_x $(x \in T)$ принадлежат $\mathscr{M}^b(T)$; она отделяющая по $\mathscr{M}^b(T)$ в силу предложения 2 п. 1.

Определение 1. *Слабая топология в $\mathscr{M}^b(T)$, ассоциированная с указанной выше двойственностью между $\mathscr{C}^b(T)$ и $\mathscr{M}^b(T)$, называется топологией узкой сходимости (или узкой топологией) в $\mathscr{M}^b(T)$.*

Узкая топология отделима в силу замечаний, предшествовавших определению. Мы часто будем использовать наречие «узко» в значении «в смысле узкой топологии». На протяжении всего

*) Это соотношение было установлено выше (§ 2, п. 1, предл. 1) только для случая, когда f и ν положительны. Распространение на настоящий случай, когда f и ν комплексны и ограничены, получается сразу по линейности.

этого параграфа, если не оговаривается противное, $\mathscr{M}^b(T)$ будет наделено узкой топологией.

Всякий элемент из $\mathscr{C}^b(T)$ есть линейная комбинация элементов из $\mathscr{C}^b_+(T)$. Для того чтобы фильтр $\mathfrak{F}$ в $\mathscr{M}^b(T)$ сходился узко к ограниченной мере λ, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{\mu} \mu(f) = \lambda(f) \text{ по } \mathfrak{F} \text{ для любой } f \in \mathscr{C}^b_+(T). \tag{4}$$

Замечания. 1) Если T локально компактно, то узкая топология является более сильной, чем топология, индуцированная в $\mathscr{M}^b(T)$ широкой топологией, и эти две топологии совпадают только в том случае, если T компактно. В самом деле, если T не компактно, то отображение $t \mapsto \varepsilon_t$ широко сходится к 0 по фильтру дополнений относительно компактных подмножеств из T, но не сходится узко к 0, ибо функция 1 принадлежит $\mathscr{C}^b(T)$ (о связи между широкой и узкой сходимостью см. предл. 9).

2) Из предложения 4 сразу же вытекает, что $\mathscr{M}^b_+(T)$ *замкнуто* в $\mathscr{M}^b(T)$.

3) Если T вполне регулярно, то отображение $t \mapsto \varepsilon_t$ пространства T в $\mathscr{M}^b(T)$ есть *гомеоморфизм* (Общая топ., гл. IX (3-е изд.), § 1, п. 5).

Предложение 6. *Пусть T — вполне регулярное пространство.*

a) *Пусть $f \geqslant 0$ — числовая полунепрерывная снизу функция на T; тогда функция $\mu \mapsto |\mu|^*(f)$ полунепрерывна снизу на $\mathscr{M}^b(T)$.*

b) *Пусть f — полунепрерывная сверху ограниченная функция на T; тогда функция $\mu \mapsto \mu(f)$ полунепрерывна сверху на $\mathscr{M}^b_+(T)$.*

В самом деле, в силу предложения 1b) п. 1 ясно, что $\mu \mapsto |\mu|^*(f)$ есть верхняя огибающая семейства функций вида $\mu \mapsto |\mu(g)|$ с $g \in \mathscr{C}^b(T)$, и значит, непрерывных в узкой топологии. Этим доказано a). Для доказательства b) достаточно выбрать константу C, мажорирующую f, и записать $\mu(f) = \mu(C) - \mu(C - f)$; функция $\mu \mapsto \mu(C)$ непрерывна, и функция $\mu \mapsto (\mu)(C - f)$, в силу изложенного выше, полунепрерывна снизу на $\mathscr{M}^b_+(T)$.

Предложение 7. *Пусть T — вполне регулярное пространство. Пусть далее, μ — положительная ограниченная мера на T и пусть f — такая положительная ограниченная функция на T, что множество точек из T, в которых f не является непрерывной, локально μ-пренебрежимо. Тогда отображение $\lambda \mapsto \lambda^*(f)$ $\mathscr{M}^b_+(T)$ в $\mathbf{R}$ непрерывно в точке μ.*

Для любого $t \in T$ положим $f'(t) = \varliminf_{s \to t} f(s)$, $f''(t) = \varlimsup_{s \to t} f(s)$. Очевидно, что $f' \leqslant f \leqslant f''$, причем равенство достигается в тех точках из T, где f непрерывна (а значит, μ-почти всюду). С другой стороны, f' полунепрерывна снизу, f'' полунепрерывна сверху и ограничена (Общая топ., гл. IV (3-е изд.), § 6, п. 2, предл. 4). Стало быть, в силу предложения 6 справедливы следующие соотношения:

$$\mu^*(f') \leqslant \varliminf_{\lambda \to \mu} \lambda^*(f') \leqslant \varliminf_{\lambda \to \mu} \lambda^*(f) \leqslant \mu^*(f) \leqslant \varlimsup_{\lambda \to \mu} \lambda^*(f) \leqslant$$
$$\leqslant \varlimsup_{\lambda \to \mu} \lambda^*(f'') \leqslant \mu^*(f'').$$

Утверждение будет получено, если заметить, что $\mu^*(f') = \mu^*(f'')$ ибо f' и f'' равны локально μ-почти всюду.

Предложение 8. *Пусть X — вполне регулярное пространство, T — его подпространство и i — каноническая инъекция T в X. Обозначим через W множество положительных ограниченных мер на X, сосредоточенных на T, наделенное топологией, индуцированной топологией из $\mathscr{M}^b(X)$. Тогда отображение $\mu \mapsto i(\mu)$ $\mathscr{M}^b_+(T)$ в $\mathscr{M}^b(X)$ есть гомеоморфизм $\mathscr{M}^b_+(T)$ на W.*

Обозначим по-прежнему через i отображение $\mu \mapsto i(\mu)$ $\mathscr{M}^b_+(T)$ в $\mathscr{M}^b_+(X)$; i инъективно (§ 2, п. 4, предл. 8) и отображает $\mathscr{M}^b_+(T)$ в W (§ 2, п. 3, предл. 7). Если $\lambda \in W$, то $\lambda = i(\lambda_T)$ (§ 2, п. 3, предл. 7b)). Следовательно, i есть биекция $\mathscr{M}^b_+(T)$ на W, и обратная к i биекция есть отображение $r: \lambda \mapsto \lambda_T$ на W. С другой стороны, i непрерывно: в самом деле, если $f \in \mathscr{C}^b(X)$, то $\langle i(\mu), f\rangle = \langle \mu, f \circ i\rangle$, и $f \circ i$ принадлежит $\mathscr{C}^b(T)$. Стало быть, все сводится к тому, чтобы показать, что для любой меры $\mu \in W$ и любой функции $f \in \mathscr{C}^b_+(T)$

$$\lim_{\substack{\lambda \to \mu \\ \lambda \in W}} \lambda_T(f) = \mu_T(f)$$

или еще

$$\lim_{\substack{\lambda \to \mu \\ \lambda \in W}} \lambda(f^0) = \mu(f^0).$$

Пусть f^∞ — функция на X, совпадающая с f на T и с $+\infty$ на $X - T$, и пусть f' и f'' — соответственно регуляризованная из f^0

полунепрерывная сверху, а f'' — регуляризованная из f^∞ полунепрерывная снизу функции (Общая топ., гл. IV (3-е изд.), § 6, п. 2). Из соотношений

$$f'(x) = \lim_{y \to x}.\sup f^0(y), \qquad f''(x) = \lim_{y \to x}.\inf f^\infty(y)$$

сразу же вытекает, что f' и f'' обе совпадают с f и f^0 на T. Тогда предложение 6 дает

$$\mu^*(f') \geqslant \lim_{\substack{\lambda \to \mu \\ \lambda \in W}}.\sup \lambda^*(f'), \qquad \mu^*(f'') \leqslant \lim_{\substack{\lambda \to \mu \\ \lambda \in W}}.\inf \lambda^*(f'').$$

Но в этих формулах можно заменить f' и f'' на f^0, поскольку меры λ и μ несомы множеством T; и тогда получим искомое соотношение.

Предложение 8 справедливо только для положительных мер: отображение $\mu \mapsto i(\mu)$ пространства $\mathscr{M}^b(T)$ в $\mathscr{M}^b(X)$ инъективно и непрерывно, но вообще говоря, не является гомеоморфизмом $\mathscr{M}^b(T)$ на свой образ. Возьмем, например, $X = \mathbf{R}$, $T = \mathbf{R} - \{0\}$; меры $\lambda_t = \varepsilon_t - \varepsilon_{-t}$ $(t > 0)$ сходятся узко к 0 на X, когда $t \to 0$, но не сходятся узко к 0 на T (характеристическая функция интервала $]\,0, +\infty\,[$ принадлежит $\mathscr{C}^b(T)$) (ср., однако, следствие из теоремы 1 п. 5).

Предложение 9. *Пусть T — локально компактное пространство и пусть $\mathfrak{F}$ — фильтр в $\mathscr{M}^b_+(T)$, широко сходящийся к ограниченной мере μ. Для того чтобы $\mathfrak{F}$ сходился узко к μ, необходимо и достаточно, чтобы $\lim_\lambda \lambda(1) = \mu(1)$ по $\mathfrak{F}$.*

Необходимость очевидна. Чтобы доказать достаточность, обозначим через X пространство, компактифицированное по Александрову из T (Общая топ., гл. I (4-е изд.), § 9, п. 8), а через i — каноническую инъекцию T в X. В силу предложения 8 все сводится к тому, чтобы показать, что $\lambda \mapsto i(\lambda)$ сходится узко к $i(\mu)$ на $\mathscr{M}^b(X)$ по $\mathfrak{F}$. А поскольку $\mu(1) < +\infty$, то найдется такое множество $A \in \mathfrak{F}$, что полные массы мер этого множества ограничены некоторым числом M; значит, нам достаточно убедиться в справедливости формулы

$$\lim_{\lambda, \mathfrak{F}} \int_X g\,d(i(\lambda)) = \int_X g\,d(i(\mu)) \tag{5}$$

для функций $g \in \mathscr{C}^b(X)$, образующих тотальное множество в $\mathscr{C}^b(X)$. Но для случая, когда g имеет компактный носитель, это

равенство верно в силу широкой сходимости $\mathfrak{F}$ к μ, а с другой стороны, когда g есть постоянная функция на X, оно верно в силу того, что $\lim_{\lambda, \mathfrak{F}} \lambda(1) = \mu(1)$. А функции этих двух типов образуют тотальное множество в $\mathscr{C}^b(X)$ (гл. III (2-е изд.), § 1, п. 2, предл. 3), и предложение доказано.

4. *Приложение: Топологические свойства пространства* $\mathscr{M}_+^b(T)$

Прежде всего заметим, что если T вполне регулярно, то $\mathscr{M}^b(T)$ есть отделимое топологическое векторное пространство, а значит, вполне регулярное. Следовательно, $\mathscr{M}_+^b(T)$ вполе регулярно.

Предложение 10. *Пусть T — польское пространство; тогда пространство $\mathscr{M}_+^b(T)$ является польским в узкой топологии.*

Начнем с изучения случая, когда T — польское и *компактное пространство*. Тогда множество U положительных мер с массой, не превосходящей 1, компактно (гл. III (2-е изд.), § 1, п. 9, следствие 2 из предл. 15), и топология, индуцированная в U узкой топологией (которая совпадает здесь с широкой топологией) индуцируется также топологией простой сходимости на некотором тотальном множестве из $\mathscr{C}(T)$ (там же, п. 10, предл. 17). Но в $\mathscr{C}(T)$ существует счетное тотальное множество (Общая топ., гл. X (2-е изд.), § 3, п. 3, теорема 1); следовательно, U есть метризуемое компактное пространство. Множество V положительных мер с массой <1 открыто в U, и значит, является локально компактным польским пространством. Но отображение $\mu \mapsto \frac{1}{1+\mu(1)}\mu$ пространства $\mathscr{M}_+^b(T)$ на V есть гомеоморфизм, для которого отображение $\lambda \mapsto \frac{1}{1-\lambda(1)}\lambda$ есть обратный гомеоморфизм.

Перейдем к случаю, когда T — польское пространство; можно предположить, что T является пересечением убывающей последовательности (G_n) открытых множеств в метризуемом локально компактном пространстве X (Общая топ., гл. IX (3-е изд.), § 6, п. 1, следствие 1 из теоремы 1); тогда пространство $\mathscr{M}_+^b(T)$ гомеоморфно подпространству W пространства $\mathscr{M}_+^b(X)$, состоящему из мер, сосредоточенных на T (п. 3, предл. 8), и нам достаточно показать, что W есть пересечение последовательности открытых

множеств в польском пространстве $\mathscr{M}_+^b(X)$ (там же, следствие 1 из теоремы 1). Итак, пусть W_n — множество мер $\mu \in \mathscr{M}_+^b(X)$, сосредоточенных на G_n; отображение h_n: $\mu \mapsto \mu^*(X - G_n)$ на $\mathscr{M}_+^b(X)$ полунепрерывно сверху (п. 3, предл. 6), и значит, множество A_k^n мер $\mu \in \mathscr{M}_+^b(X)$, для которых $h_n(\mu) < 1/k$, открыто при любом $k \geqslant 1$ и любом $n \in \mathbf{N}$. Для завершения доказательства остается заметить, что $W = \bigcap_n W_n = \bigcap_{n,k} A_k^n$.

Следствие 1. *Если T — метризуемое пространство счетного типа, то $\mathscr{M}_+^b(T)$ есть метризуемое пространство счетного типа в узкой топологии.*

В самом деле, пусть $\hat{T}$ — пополнение T относительно метрики, определяющей топологию в T; $\hat{T}$ — польское пространство, и $\mathscr{M}_+^b(T)$ гомеоморфно подпространству польского пространства $\mathscr{M}_+^b(\hat{T})$, состоящему из мер, сосредоточенных на T (п. 3, предл. 8). Но всякое подпространство польского пространства является метризуемым пространством счетного типа (Общая топ., гл. IX (3-е изд.), § 2, п. 8, следствие из предл. 11).

Следствие 2. *Если T — суслинское* (соотв. *лузинское*) *вполне регулярное пространство, то пространство $\mathscr{M}_+^b(T)$ — суслинское* (соотв. *лузинское*).

В самом деле, рассмотрим польское пространство P и непрерывное отображение f пространства P на T (Общая топ., гл. IX (3-е изд.), § 6, п. 2, опр. 2). Пусть $\tilde{f}$ — непрерывное отображение $\mu \mapsto f(\mu)$ пространства $\mathscr{M}_+^b(P)$ в $\mathscr{M}_+^b(T)$; пространство $\mathscr{M}_+^b(P)$ — польское в силу предложения 10, а $\tilde{f}$ сюръективно (§ 2, п. 4, предл. 9); значит, $\mathscr{M}_+^b(T)$ — суслинское пространство. Кроме того, если T — лузинское, то f может предполагаться инъективным (там же, § 6, п. 2, предл. 11); тогда $\tilde{f}$ инъективно (§ 2, п. 4, предл. 8), и значит, $\mathscr{M}_+^b(T)$ — лузинское.

Пусть T — суслинское вполне регулярное пространство (напомним, что для этого достаточно, чтобы T было суслинским и регулярным (там же, Приложение, следствие из предл. 2)), и пусть H — компактное подмножество из $\mathscr{M}_+^b(T)$; тогда H — компактное и суслинское, а значит, *метризуемое* в узкой топологии (там же, Приложение, следствие 2 из предл. 3).

5. Критерий компактности для узкой сходимости

Определение 2. *Пусть T — топологическое пространство и пусть H — подмножество из $\mathscr{M}^b(T)$; говорят, что H удовлетворяет условию Прохорова, если*

a) $\sup_{\mu \in H} |\mu|(1) < +\infty$;

b) *для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое компактное множество K_ε из T, что*

$$|\mu|(T - K_\varepsilon) \leqslant \varepsilon \text{ для любой меры } \mu \in H. \tag{6}$$

Можно показать, что если T вполне регулярно, то совокупность условий a) и b) эквивалентна следующему условию: существует такая действительная функция $f \geqslant 1$ на T, что множество точек $t \in T$, в которых $f(t) \leqslant c$, компактно при любом $c \in \mathbf{R}_+$ (откуда, в частности, следует, что f полунепрерывна снизу), и такая, что $\sup_{\mu \in H} |\mu|(f) < +\infty$. Кроме того, в случае локально компактного T эквивалентная формулировка получится, если потребовать непрерывности f (ср. упр. 10).

Предложение 11. *Пусть T — вполне регулярное пространство и пусть H — подмножество из $\mathscr{M}^b(T)$, удовлетворяющее условию Прохорова; тогда его замыкание $\overline{H}$ в $\mathscr{M}^b(T)$ удовлетворяет условию Прохорова.*

В самом деле, функции $\mu \mapsto |\mu|^*(1)$, $\mu \mapsto |\mu|^*(T - K_\varepsilon)$ полунепрерывны снизу на $\mathscr{M}^b(T)$ в силу предложения 6 п. 3.

Важность условия Прохорова явствует из следующей теоремы, для которой ниже будет рассмотрена обратная теорема 2.

Теорема 1 (Прохоров). *Пусть T — вполне регулярное пространство и пусть H — подмножество из $\mathscr{M}^b(T)$, удовлетворяющее условию Прохорова; тогда H относительно компактно в $\mathscr{M}^b(T)$ в узкой топологии.*

Мы можем предположить, что T есть подпространство компактного пространства X; пусть i — каноническая инъекция T в X. С другой стороны, мы можем предположить, что H *замкнуто* в $\mathscr{M}^b(T)$ в силу предложения 11. Тогда нам достаточно показать, что всякий ультрафильтр $\mathfrak{U}$ в H сходится в $\mathscr{M}^b(T)$.

Мы начнем со случая, когда $H \subset \mathscr{M}_+^b(T)$. Поскольку полные массы мер $\mu \in H$ по условию ограничены, то $i(\mu)$ широко сходится по $\mathfrak{U}$ в $\mathscr{M}_+(X)$ к мере $\nu \in \mathscr{M}_+(X)$ (гл. III (2-е изд.), § 1, п. 9, следствие 2 из предл. 15); в силу предложения 8 п. 3 все сводится к доказательству того, что ν сосредоточена на T. Итак, пусть $\varepsilon > 0$ и пусть K_ε — компактное подмножество из T, удовлетворяющее формуле (6). Поскольку $X - K_\varepsilon$ открыто в X, то, применяя предложение 6 п. 3 в X, получаем неравенства

$$\nu^*(X-T) \leqslant \nu^*(X-K_\varepsilon) \leqslant \liminf_{\mu,\,\mathfrak{U}} i(\mu)^*(X-K_\varepsilon) =$$

$$= \liminf_{\mu,\,\mathfrak{U}} \mu^*(T-K_\varepsilon) \leqslant \varepsilon;$$

а так как ε произвольно, то теорема в рассматриваемом частном случае доказана.

Перейдем к общему случаю; для любой меры μ на T положим $a_1(\mu) = \mathrm{Re}(\mu)^+$, $a_2(\mu) = \mathrm{Re}(\mu)^-$, $a_3(\mu) = \mathrm{Im}(\mu)^+$, $a_4(\mu) = \mathrm{Im}(\mu)^-$; поскольку $\mu = a_1(\mu) - a_2(\mu) + ia_3(\mu) - ia_4(\mu)$, то достаточно показать, что отображения a_j ($j = 1, 2, 3, 4$) сходятся узко по $\mathfrak{U}$. Но множество H_j мер $a_j(\mu)$, где μ пробегает H, удовлетворяет условию Прохорова в силу соотношения $|a_j(\mu)| \leqslant |\mu|$ и содержится в $\mathscr{M}_+^b(T)$; стало быть, согласно рассматриваемому частному случаю оно относительно компактно в $\mathscr{M}_+^b(T)$, и отсюда сразу же вытекает теорема.

Следствие. *Пусть T — подпространство вполне регулярного пространства X и пусть H — подмножество из $\mathscr{M}^b(T)$, удовлетворяющее условию Прохорова. Если i — каноническая инъекция T в X, то сужение на H отображения $\mu \mapsto i(\mu)$ пространства $\mathscr{M}^b(T)$ в $\mathscr{M}^b(X)$ есть гомеоморфизм H на его образ.*

Достаточно изучить случай, когда H замкнуто (предл. 11), а значит, компактно; в этом случае нужный результат будет вытекать из того, что $\mu \mapsto i(\mu)$ непрерывно и инъективно.

Напомним, что этот результат справедлив также для произвольного подмножества из $\mathscr{M}_+^b(T)$ (п. 3, предл. 8).

Теорема 2. *Пусть T — локально компактное или польское пространство и пусть H — относительно компактное подмножество из $\mathscr{M}_+^b(T)$; тогда H удовлетворяет условию Прохорова.*

Можно ограничиться случаем, когда H замкнуто, и значит, компактно. Полные массы мер $\mu \in H$, очевидно, ограничены, так как отображение $\mu \mapsto \mu(1)$ непрерывно, и все сводится к доказательству п. b) определения 2.

Допустим вначале, что T локально компактно. Пусть $\varepsilon > 0$. Сопоставим каждой мере $\mu \in H$ такое компактное множество K_μ из T, что $\mu^*(T - K_\mu) < \varepsilon$, а затем—открытую относительно компактную окрестность U_μ множества K_μ. Поскольку функция $\lambda \mapsto \lambda^*(T - U_\mu)$ полунепрерывна снизу на $\mathscr{M}^b_+(T)$ (п. 3, предл. 6), то множество V^μ мер $\lambda \in H$, для которых $\lambda^*(T - U_\mu) < \varepsilon$, есть окрестность меры μ в H. Значит, найдется такое конечное подмножество $H' \subset H$, что множества V^μ ($\mu \in H'$) покрывают H. Если теперь обозначить через K компактное множество $\bigcup_{\mu \in H'} \bar{U}_\mu$, то $\lambda^*(T - K) < \varepsilon$ для любого $\lambda \in H$.

Далее, допустим, что T — польское пространство. Мы не ограничим общности, предположив, что T есть пересечение убывающей последовательности $(T_p)_{p \geqslant 1}$ открытых множеств компактного пространства X (Общая топ., гл. IX (3-е изд.), § 6, п. 1, следствие из теоремы 1). Пусть i_p — инъекция T в T_p и H_p — множество мер вида $i_p(\lambda)$ для $\lambda \in H$; поскольку H_p компактно в $\mathscr{M}^b_+(T_p)$, то найдется такое компактное множество $K_p \subset T_p$, что $\nu^*(T_p - K_p) \leqslant \varepsilon 2^{-p}$ для любой меры $\nu \in H_p$; это следует из предыдущего результата, примененного к локально компактному пространству T_p. Стало быть, имеем также $\nu^*(T - (T \cap K_p)) \leqslant \varepsilon 2^{-p}$ и окончательно $\lambda^*(T - (T \cap K_p)) \leqslant \varepsilon 2^{-p}$ для любой меры $\lambda \in H$. Положим теперь $K = \bigcap_p K_p$; K компактно и содержится в T; для любой меры $\lambda \in H$ имеем $\lambda^*(T - K) \leqslant \sum_p \lambda^*(T - (T \cap K_p)) \leqslant \sum_p \varepsilon 2^{-p} = \varepsilon$. Таким образом, условие Прохорова выполнено.

6. *Узкая сходимость мер и компактная сходимость функций*

Предложение 21. *Пусть T — вполне регулярное пространство и B — единичный шар в нормированном пространстве $\mathscr{C}^b(T; \mathbf{C})$. И пусть I — линейная форма на $\mathscr{C}^b(T; \mathbf{C})$. Для того чтобы существовала ограниченная комплексная мера θ на T, удовлетворяющая*

равенству $I(f) = \theta(f)$ *для любого* $f \in \mathscr{C}^b(T; \mathbf{C})$, *необходимо и достаточно, чтобы сужение* I *на* B *было непрерывно в топологии компактной сходимости. Тогда мера* θ *единственна.*

Докажем необходимость. Пусть θ — ограниченная комплексная мера на T, $\varepsilon > 0$ и K — такое компактное подмножество из T, что $|\theta|^*(T - K) < \varepsilon$. Пусть $f \in B$; обозначим через U окрестность f в B относительно топологии компактной сходимости, состоящую из таких функций $g \in B$, что $\sup\limits_{x \in K} |g(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$. Для любого $g \in U$

$$|\theta(g) - \theta(f)| \leqslant \int\limits_T |g - f| \, d|\theta| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon |\theta|^*(K) + 2|\theta|^*(T - K) \leqslant (\|\theta\| + 2)\varepsilon,$$

ибо $|g - f|$ мажорируется на K числом ε, а на $T - K$ — числом 2.

Обратно, рассмотрим линейную форму I на $\mathscr{C}^b(T; \mathbf{C})$, сужение которой на B непрерывно в топологии компактной сходимости. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такое число $a > 0$ и такое компактное подмножество K из T, что из соотношений $f \in B$, $\sup\limits_{x \in K} |f(x)| \leqslant a$ следует $|I(f)| \leqslant \varepsilon$. Тогда в силу предложения 5 п. 2 существует, и притом единственная, такая ограниченная комплексная мера θ, что $I(f) = \theta(f)$ для любого $f \in \mathscr{C}^b(T; \mathbf{C})$.

Предложение 13. *Пусть* T — *локально компактное пространство,* H — *ограниченное подмножество нормированного пространства* $\mathscr{C}^b(T; \mathbf{C})$. *Тогда отображение* $(\mu, f) \mapsto \mu(f)$ *произведения* $\mathscr{M}^b_+(T) \times H$ *в* $\mathbf{C}$ *непрерывно, если наделить* $\mathscr{M}^b_+(T)$ *узкой топологией, а* H — *топологией компактной сходимости.*

Пусть $\mu \in \mathscr{M}^b_+(T)$, $f \in H$ и M — такое действительное число, что $\|\mu\| < M$, и $|g| \leqslant M$ для любого $g \in H$. Возьмем $\varepsilon > 0$ и выберем компактное подмножество K из T так, чтобы $\mu^*(T - K) < \varepsilon$, и выберем открытую относительно компактную окрестность S множества K. Множество U мер $\lambda \in \mathscr{M}^b_+(T)$, удовлетворяющих неравенствам

$$\lambda^*(T) < M, \quad \lambda^*(T - S) < \varepsilon, \quad |\lambda(f) - \mu(f)| < \varepsilon,$$

есть окрестность меры μ в $\mathscr{M}^b_+(T)$ (п. 3, предл. 6). Кроме того, пусть V — окрестность f в H, состоящая из таких функций $g \in H$,

что

$$\sup_{x\in S} |g(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

Пусть $\lambda\in U$, $g\in V$; поскольку функция $|g-f|$ мажорирована посредством ε на S и $2M$ на $T-S$, то

$$|\lambda(g)-\lambda(f)|\leqslant\int_T |g-f|\,d\lambda\leqslant\varepsilon\lambda^*(S)+2M\lambda^*(T-S)\leqslant 3M\varepsilon,$$

откуда выводим

$$|\lambda(g)-\mu(f)|\leqslant|\lambda(g)-\lambda(f)|+|\lambda(f)-\mu(f)|\leqslant(3M+1)\varepsilon.$$

Тем самым доказана непрерывность отображения $(\lambda, g)\mapsto\lambda(g)$ в точке (μ, f) пространства $\mathscr{M}^b_+(T)\times H$.

Замечание. Пусть T — вполне регулярное пространство, M — подмножество из $\mathscr{M}^b(T)$, удовлетворяющее условию Прохорова, и H — ограниченное подмножество из $\mathscr{C}^b(T)$. Рассуждение, очень близкое к только что проведенному, позволяет доказать, что отображение $(\lambda, g)\mapsto\lambda(g)$ пространства $M\times H$ в $\mathbf{C}$ непрерывно, если наделить M узкой топологией, а H — топологией компактной сходимости.

Следствие. *Пусть T — вполне регулярное пространство, X — топологическое пространство, f — комплекснозначная функция на $T\times X$, непрерывная и ограниченная. Пусть для любой ограниченной меры μ на T через F_μ обозначена функция на X, определяемая равенством $F_\mu(x)=\int_T f(t, x)\,d\mu(t)$ для любого $x\in X$.*

a) *Функция F_μ непрерывна и ограничена для любой ограниченной меры μ.*

b) *Предположим, что T локально компактно. Тогда отображение $\mu\mapsto F_\mu$ пространства $\mathscr{M}^b_+(T)$ в $\mathscr{C}^b(X;\mathbf{C})$ непрерывно, если наделить $\mathscr{M}^b_+(T)$ узкой топологией, а $\mathscr{C}^b(X;\mathbf{C})$ — топологией компактной сходимости.*

Для любого $x\in X$ обозначим через f_x непрерывную ограниченную функцию $t\mapsto f(t, x)$ на T; отображение $x\mapsto f_x$ пространства X в $\mathscr{C}^b(T;\mathbf{C})$ имеет ограниченный образ, и оно непрерывно, если наделить $\mathscr{C}^b(T;\mathbf{C})$ топологией компактной сходимости (Общая топ., гл. X (2-е изд.), § 3, п. 4, теорема 3). Поскольку $F_\mu(x)=\mu(f_x)$, то функция F_μ непрерывна в силу предложения 12.

Предположим, что T локально компактно; предложение 13 показывает, что отображение $(\mu, x) \mapsto F_\mu(x)$ пространства $\mathscr{M}_+^b(T) \times X$ в $\mathbf{C}$ непрерывно; отсюда получаем утверждение b) (там же).

7. *Приложение: Преобразование Лапласа*

В этом пункте через M обозначается коммутативный моноид с аддитивно записываемым законом композиции, наделенный топологией *локально компактного* пространства, относительно которой отображение $(m, m') \mapsto m + m'$ произведения $M \times M$ в M непрерывно. Обозначим через 0 нейтральный элемент в M. *Характером* M называется всякая непрерывная ограниченная комплексная функция χ на M, удовлетворяющая соотношениям

$$\chi(m+m') = \chi(m)\cdot\chi(m'), \quad \chi(0) = 1, \quad |\chi(m)| \leqslant 1 \tag{7}$$

для $m, m' \in M$. Если χ и χ' — характеры, то $\chi\chi'$ — тоже характер. Множество характеров моноида M есть моноид и обозначается X; он будет наделен топологией компактной сходимости, относительно которой отображение $(\chi\chi') \mapsto \chi\chi'$ произведения $X \times X$ в X непрерывно. Нейтральным элементом в X является постоянная функция 1.

Для любой ограниченной комплексной меры μ на M *преобразованием Лапласа* меры μ называется функция $\mathscr{L}\mu$ на X, определяемая соотношением

$$(\mathscr{L}\mu)(\chi) = \int_M \chi(m)\, d\mu(m). \tag{8}$$

В силу теоремы 3 (Общая топ., гл. X (2-е изд.), § 3, п. 4) отображение $(m, \chi) \mapsto \chi(m)$ произведения $M \times X$ в $\mathbf{C}$ непрерывно и ограничено. На основании следствия из предложения 13 п. 6 получаем, таким образом, следующий результат:

Предложение 14. *Для любой ограниченной комплексной меры μ на M функция $\mathscr{L}\mu$ на X непрерывна и ограничена. Если наделить $\mathscr{M}_+^b(M)$ узкой топологией, а $\mathscr{C}^b(X; \mathbf{C})$ — топологией компактной сходимости, то отображение $\mu \mapsto \mathscr{L}\mu$ пространства $\mathscr{M}_+^b(M)$ в $\mathscr{C}^b(X; \mathbf{C})$ непрерывно.*

Множество характеров моноида M, стремящихся к 0 на бесконечности, будет обозначаться X_0; это множество устойчиво

относительно умножения. Будем говорить, что подмоноид *) S из X является *полным*, если S устойчив относительно отображения $\chi \mapsto \overline{\chi}$, если $S \cap X_0$ отделяет точки моноида M (Общая топ., гл. X (2-е изд.), § 4, п. 1, опр. 1) и если для любого $m \in M$ найдется такой элемент χ из $S \cap X_0$, что $\chi(m) \neq 0$.

Предположим, кроме того, что M — не компактная коммутативная *группа*. Пусть f — функция на M, стремящаяся к 0 на бесконечности; тогда то же самое верно и для функции $x \mapsto f(x) f(-x)$ на M, тогда как всякий характер χ моноида M удовлетворяет соотношению $\chi(x)\chi(-x) = \chi(0) = 1$. Отсюда следует, что X_0 пусто и что X не содержит никакого полного подмоноида. Стало быть, приводимая ниже теорема 3 неприменима к локально компактным группам, не являющимся компактными.

Теорема 3. *Пусть S — полный подмоноид из X.*

a) *Если μ и μ' — такие ограниченные комплексные меры на M, что $\mathscr{L}\mu$ и $\mathscr{L}\mu'$ имеют одно и то же сужение на $S \cap X_0$, то $\mu = \mu'$.*

b) *Пусть $\mathfrak{F}$ — такой фильтр в $\mathscr{M}_+^b(M)$, что $\mathscr{L}\lambda(s)$ имеет предел $\Phi(s) \in \mathbf{C}$ по $\mathfrak{F}$ для любого $s \in S$. Тогда фильтр $\mathfrak{F}$ широко сходится к ограниченной положительной мере μ, и для любого $s \in S \cap X_0$ справедливо равенство $\Phi(s) = \mathscr{L}\mu(s)$.*

c) *Пусть выполнены условия из* b) *и пусть, кроме того, 1 есть точка прикосновения для $S \cap X_0$, и функция Φ на S непрерывна в точке 1. Тогда $\mathfrak{F}$ сходится узко к μ и $\Phi(s) = \mathscr{L}\mu(s)$ для любого $s \in S$.*

Обозначим через E алгебру непрерывных комплексных функций на M, стремящихся к 0 на бесконечности, и $\mathfrak{A}$ — подпространство из E, порожденное $S \cap X_0$; тогда $\mathfrak{A}$ есть подалгебра из E, устойчивая относительно отображения $f \mapsto \overline{f}$; а поскольку S — полный подмоноид из X, то в силу следствия 2 из предложения 7 (Общая топ., гл. X, § 4, п. 4) $\mathfrak{A}$ плотно в E.

Докажем a): по условию имеем $\mu(f) = \mu'(f)$ для любого $f \in \mathfrak{A}$; а так как μ и μ' — непрерывные линейные формы на E, то отсюда следует, что $\mu(f) = \mu'(f)$ для $f \in E$, и в частности, для любой непрерывной функции f с компактным носителем, откуда $\mu = \mu'$.

---

*) Напомним, что подмоноид моноида A содержит по определению нейтральный элемент из A (Алгебра, гл. I (4-е изд.), § 1).

Обратимся теперь к b). Число $\Phi(1) = \lim_{\lambda, \mathfrak{F}} \lambda(1)$ — действительное положительное; пусть действительное число $a > \Phi(1)$; так как $\| \lambda \| = \mathscr{L}\lambda(1)$ для $\lambda \in \mathscr{M}_+^b(M)$, то из соотношения $\lim_{\lambda, \mathfrak{F}} \mathscr{L}\lambda(1) = \Phi(1)$ следует, что множество H таких мер $\lambda \in \mathscr{M}_+^b(M)$, что $\| \lambda \| \leqslant a$, принадлежит $\mathfrak{F}$. Поскольку $\mathscr{M}^b(M; \mathbf{C})$ отождествляется с двойственным к нормированному пространству E (гл. III (2-е изд.), § 1, п. 8 и § 1, п. 2, предл. 3), то пространство H компактно в топологии $\sigma(\mathscr{M}^b(M; \mathbf{C}), E)$. С другой стороны (Топ. вект. пр-ва, гл. III, § 3, п. 5, предл. 5), эта топология совпадает в H с топологией простой сходимости на любом тотальном подмножестве из E. В частности, поскольку $\mathfrak{A}$ плотно в E и то же самое имеет место для пространства непрерывных функций с компактным носителем (гл. III (2-е изд.), § 1, п. 2, предл. 3), то топология простой сходимости на $S \cap X_0$ совпадает в H с широкой топологией, и H компактно в этой топологии. Отсюда сразу же следует, что $\mathfrak{F}$ широко сходится к мере $\mu \in H$ и что $\mathscr{L}\mu(s) = \lim_{\lambda, \mathfrak{F}} \mathscr{L}\lambda(s)$ для любого $s \in S \cap X_0$.

Наконец, перейдем к c). Так как функция Φ и $\mathscr{L}\mu$ непрерывны в точке $1 \in S$, равны на $S \cap X_0$ и так как 1 есть точка прикосновения для $S \cap X_0$, то $\Phi(1) = \mathscr{L}\mu(1)$. Иными словами, $\lim_{\lambda, \mathfrak{F}} \lambda(1) = \mu(1)$.

Предложение 9 п. 3 показывает, что μ есть узкий предел фильтра $\mathfrak{F}$. А поскольку всякий элемент из S есть непрерывная ограниченная функция на M, то отсюда получаем $\Phi(s) = \lim_{\lambda, \mathfrak{F}} \lambda(s) = \mu(s) = \mathscr{L}\mu(s)$ для любого $s \in S$.

Следствие. *Пусть S — такой полный подмоноид из X, что 1 есть точка прикосновения для $S \cap X_0$. И пусть L — подмножество из $\mathscr{C}^b(S; \mathbf{C})$, состоящее из сужений на S преобразований Лапласа мер $\lambda \in \mathscr{M}_+^b(M)$.*

a) *Множество L замкнуто в пространстве $\mathscr{C}^b(S; \mathbf{C})$, наделенном топологией простой сходимости.*

b) *Отображение $\lambda \mapsto (\mathscr{L}\lambda)_S$ есть гомеоморфизм $\mathscr{M}_+^b(M)$ на L, если наделить $\mathscr{M}_+^b(M)$ узкой топологией, а L — топологией простой сходимости.*

c) *Топология простой сходимости и топология компактной сходимости совпадают в* L.

Утверждения a) и b) являются непосредственными следствиями теоремы 3; утверждение c) вытекает из b) и из предложения 14, ибо топология компактной сходимости является более сильной, чем топология простой сходимости.

Следует принять во внимание, что L не замкнуто во множестве всех ограниченных комплексных функций на S, наделенном топологией простой сходимости. Возьмем, например, обозначения примера 2 ниже ($M = \mathbf{R}_+$, S отождествляется с $\mathbf{R}_+$). Преобразования Лапласа мер ε_n ($n \in \mathbf{N}$) суть функции $t \mapsto e^{-nt}$ на $\mathbf{R}_+$; когда $n \to +\infty$, эти функции сходятся просто к функции, равной 1 для $t = 0$ и 0 для $t \neq 0$, и эта функция не принадлежит L.

Пример 1). Возьмем в качестве M множество $\mathbf{N}$ положительных целых чисел, наделенное законом сложения и дискретной топологией. Пусть D — единичный диск из $\mathbf{C}$ (множество комплексных чисел с модулем $\leqslant 1$), наделенный топологией, индуцированной из $\mathbf{C}$, и законом, индуцированным умножением. Для любого $z \in D$ обозначим через $f(z)$ характер $n \mapsto z^n$ множества $\mathbf{N}$. Для любого характера χ множества $\mathbf{N}$ через $g(\chi)$ обозначим комплексное число $\chi(1) \in D$. Легко видеть, что f и g являются взаимно обратными гомеоморфизмами между D и X; это позволит нам в дальнейшем *отождествлять* X и D. Тогда множество характеров, стремящихся к 0 на бесконечности, отождествится со множеством D_0 комплексных чисел с абсолютным значением < 1. Наконец, интервал $]0, 1]$ из $\mathbf{R}$ есть полный подмоноид из D и 1 есть точка прикосновения для $]0, 1] \cap D_0 =]0, 1[$.

Всякая мера μ на $\mathbf{N}$ записывается единственным образом в виде $\mu = \sum_{n \in \mathbf{N}} u_n \cdot \varepsilon_n$, и ограничена в том и только том случае, если $\sum_n |u_n| < +\infty$; тогда $\mathscr{L}\mu(z) = \sum_{n \in \mathbf{N}} u_n z^n$ для $z \in D$. Эта функция непрерывна на D; ее принято называть *производящей функцией* суммируемой последовательности $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$. Записанная на этом языке, теорема 3 дает нам следующий результат (если учесть предл. 9 п. 3).

Предложение 15. *Пусть* A — *множество, наделенное фильтром* $\mathfrak{F}$. *Пусть, для любого* $\alpha \in A$, $(u_{\alpha,n})_{n \in \mathbf{N}}$ — *суммируемая*

последовательность положительных чисел и пусть Φ_α — *функция на* $]0, 1]$ *из* $\mathbf{R}$, *определенная соотношением* $\Phi_\alpha(x) = \sum_{n\in\mathbf{N}} u_{\alpha,n}\, x^n$. *Для того чтобы существовала такая суммируемая последовательность* $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *положительных чисел, что*

$$\lim_{\alpha,\,\mathfrak{F}} u_{\alpha,\,n} = u_n \text{ для любого } n,$$

$$\lim_{\alpha,\,\mathfrak{F}} \sum_{n\in\mathbf{N}} u_{\alpha,\,n} = \sum_{n\in\mathbf{N}} u_n,$$

необходимо и достаточно, чтобы Φ_α *сходилась просто на* $]0, 1]$ *по* $\mathfrak{F}$ *к функции* Φ, *непрерывной в точке* 1. *В этом случае* $\Phi(x) = \sum_{n\in\mathbf{N}} u_n x^n$ *для любого* $x \in]0, 1[$.

Аналогичные результаты получаются, если взять в качестве M моноид $\mathbf{N}^n$, где $n > 1$ — целое число; тогда пространство X отождествляется с D^n, и мы можем выбрать $]0, 1]^n$ в качестве полного подмоноида. Мы предоставляем читателю сформулировать для этого случая видоизменение теоремы 3.

Пример 2). Возьмем в качестве M множество $\mathbf{R}_+$, наделенное законом сложения и обычной топологией. Пусть P — множество комплексных чисел z с положительной действительной частью, наделенное топологией, индуцированной из $\mathbf{C}$, и законом, индуцированным сложением из $\mathbf{C}$. Обозначим, далее, для $p \in P$ через $f(p)$ характер $x \mapsto e^{-px}$ множества $\mathbf{R}_+$; нетрудно видеть, что f есть изоморфизм топологической структуры моноида в P на структуру в X; отождествим X с P посредством f. Ясно, что $\mathbf{R}_+$ есть полный подмоноид из P, и теорема 3 дает следующий результат.

Предложение 16. *Пусть* A — *множество, наделенное фильтром* $\mathfrak{F}$. *Пусть для любого* $\alpha \in A$ μ_α — *ограниченная положительная мера на* $\mathbf{R}_+$ *и* Φ_α — *функция на* $\mathbf{R}_+$, *определенная соотношением* $\Phi_\alpha(p) = \int_0^{+\infty} e^{-px}\, d\mu_\alpha(x)$. *Для того чтобы отображение* $\alpha \mapsto \mu_\alpha$ *сходилось узко по* $\mathfrak{F}$ *к ограниченной положительной мере* μ, *необходимо и достаточно, чтобы* Φ_α *сходилась просто на* $\mathbf{R}_+$ *по* $\mathfrak{F}$

к функции Φ, *непрерывной в точке* 0. *В этом случае* $\Phi(p) = \int_0^{+\infty} e^{-px}\, d\mu(x)$ *для любого* $p \in \mathbf{R}_+$.

Аналогичные результаты имеют место для аддитивных моноидов $\mathbf{R}_+^n$ ($n > 1$ — целое); мы предоставляем читателю сформулировать для этого случая видоизменение теоремы 3.

Упражнения

1) Пусть T — топологическое пространство и μ — положительная мера на T. Обозначим через $\mathfrak{S}_\mu$ множество подмножеств из T с μ-пренебрежимой границей.

a) Показать, что $\mathfrak{S}_\mu$ есть алгебра.

b) Если T вполне регулярно, то всякая точка из T обладает фундаментальной системой окрестностей, содержащейся в $\mathfrak{S}_\mu$ (заметить, что если f — непрерывная функция на T, обращающаяся в нуль вне некоторого μ-интегрируемого множества, то множество тех действительных чисел r, для которых $f^{-1}(r)$ не является μ-пренебрежимым, счетно).

°2) Пусть T — вполне регулярное пространство и $\mathfrak{F}$ — фильтр в $\mathscr{M}_+^b(T)$, сходящийся узко к ограниченной мере μ. Говорят, что борелевское подмножество A из T есть множество сходимости (для $\mathfrak{F}$), если $\lim_{\lambda, \mathfrak{F}} \lambda_A = \mu_A$.

a) Если непересекающиеся множества A_1 и A_2 являются множествами сходимости, то таково и $A_1 \cup A_2$.

b) Пусть A — открытое или замкнутое множество. Для того чтобы A было множеством сходимости, необходимо и достаточно, чтобы $\lim_{\lambda, \mathfrak{F}} \lambda^*(A) = \mu^*(A)$. Если A есть множество сходимости, то таково и $T - A$.

c) Пусть A — открытое или замкнутое множество сходимости из T и B — такое множество сходимости, что $T - B$ также является множеством сходимости. Тогда $A \cup B$ и $A \cap B$ — множества сходимости, равно как и их дополнения.

d) Алгебра, порожденная открытыми множествами сходимости, состоит из множеств сходимости.

e) Пусть A — подмножество из T с μ-пренебрежимой границей. Тогда A — множество сходимости.

f) Предположим, что T — локально компактное или польское пространство. Показать, что всякое компактное подмножество $K \subset T$ содержится в некотором компактном множестве сходимости (в случае локально компактного T использовать упр. 1b). В случае польского T использовать то же упражнение для построения последовательности конечных покрытий $\mathfrak{U}_p$ пространства K открытыми множествами из T

с μ-пренебрежимой границей и диаметром $< 2^{-p}$; показать, что $L = \bigcap_p \bigcup_{U \in \mathfrak{U}_p} \overline{U}$ компактно и заключить при помощи b), что это есть множество сходимости).

g) Распространить результат из f) на случай сходящейся *последовательности* мер на полном метрическом пространстве.

3) Пусть T — польское пространство и (μ_n) — последовательность ограниченных положительных мер на T, сходящаяся узко к мере μ. Обозначим через $\mathfrak{C}$ множество подмножеств A из T, обладающих следующим свойством: для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое компактное подмножество $K \subset A$, что $\sup \mu_n (A - K) < \varepsilon$. Обозначим через $\mathfrak{D}$ множество подмножеств A из T, принадлежащих $\mathfrak{C}$, равно как и их дополнение.

a) Если множества A и A' принадлежат $\mathfrak{C}$, то это верно и для $A \cup A'$, $A \cap A'$; вывести отсюда, что $\mathfrak{D}$ есть алгебра подмножеств из T.

b) Всякое подмножество $A \subset T$ с μ-пренебрежимой границей принадлежит $\mathfrak{D}$ (применить теорему Прохорова к внутренности A и использовать упр. 2e)).

c) Всякое $A \in \mathfrak{D}$ есть множество сходимости относительно последовательности (μ_n) (ср. упр. 2); обратно, всякое открытое или замкнутое множество сходимости принадлежит $\mathfrak{D}$.

d) Пусть $A \in \mathfrak{D}$. Показать, что существуют последовательность непересекающихся компактных множеств K_p и подмножество $N \subset T$, обладающие следующими свойствами: α) каждое K_p есть множество сходимости для последовательности (μ_n); β) $A \subset N \cup \bigcup_p K_p$ и $\bigcup_p K_p \subset A \cup N$; γ) для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая открытая окрестность U множества N, что $\sup \mu_n (U) < \varepsilon$ (применить упр. 2f) и теорему Прохорова к надлежащему подпространству из T, являющемуся пересечением последовательности открытых множеств).

4) Пусть T — вполне регулярное пространство, t — точка из T и $\mathfrak{U}$ — множество борелевских подмножеств из T, порождающих фильтр окрестностей точки t. Пусть I — множество, наделенное фильтром $\mathfrak{F}$, и пусть $(\mu_i)_{i \in I}$ — семейство ограниченных положительных мер с полной массой 1 на T. для того чтобы $\lim_{i, \mathfrak{F}} \mu_i = \varepsilon_t$, необходимо и достаточно, чтобы $\lim_{i, \mathfrak{F}} \mu_i (U) = 1$ для любого $U \in \mathfrak{U}$.

5) Пусть E — действительное гильбертово пространство, имеющее ортонормированный базис $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$. Пусть T — пространство E, наделенное ослабленной топологией, и пусть $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ — такая последовательность действительных чисел, что $0 < a_n < 1$ для любого n и $\lim_{n \to \infty} n^2 \log a_n = 0$. Для $n \in \mathbf{N}$ положим $\mu_n = \sum_{p \in \mathbf{N}} a_n^p (1 - a_n) \varepsilon_{nx_p}$.

Показать, что μ_n — ограниченная положительная мера с полной массой 1 на T для любого $n \in \mathbf{N}$, что $\lim_{n\to\infty} \mu_n = \varepsilon_0$ (узкая сходимость) и что $\lim_{n\to\infty} \mu_n(K) = 0$ для любого компактного подмножества K из T (применить критерий из предыдущего упражнения к множеству $\mathfrak{U}$ окрестностей 0 вида $\{x \mid (a \mid x) \leqslant 1\}$, где a пробегает E). В частности, множество элементов последовательности $(\mu_n)_{n\in\mathbf{N}}$ есть относительно компактное подмножество из $\mathscr{M}^b_+(T)$, не удовлетворяющее условию Прохорова.

6) Пусть T — топологическое пространство и H — множество положительных мер на T; предположим, что выполнено условие:

(V) Всякая точка из T обладает такой открытой окрестностью W, что $\sup_{\mu\in H} \mu^*(W)$ конечно.

Наконец, пусть $\mathfrak{U}$ — ультрафильтр в H.

a) Пусть K — компактное подмножество из T. Показать, что индуцированные меры μ_K ($\mu \in H$) широко сходятся по $\mathfrak{U}$ к некоторой мере π^K на K.

b) Пусть K и L — компактные подмножества из T и $K \subset L$; показать, что $(\pi^L)_K \geqslant \pi^K$.

c) Пусть ι^K для любого компактного подмножества $K \subset T$ есть каноническая инъекция. Показать, что семейство мер $\iota^K(\pi^K)$ имеет верхнюю грань π в $\mathscr{M}_+(T)$.

d) Пусть f — положительная полунепрерывная снизу функция на T и g — положительная полунепрерывная сверху функция на T с компактным носителем. Показать, что

$$\pi^*(f) \leqslant \lim_{\mu,\,\mathfrak{U}} \mu^*(f) \quad \text{и} \quad \pi^*(g) \geqslant \lim_{\mu,\,\mathfrak{U}} \mu^*(g).$$

°7) Пусть H — множество положительных ограниченных мер на топологическом пространстве T. Предположим, что $\sup_{\mu\in H} \mu^*(T)$ конечно и что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое компактное подмножество $K \subset T$, что $\sup_{\mu\in H} \mu^*(T - K) < \varepsilon$. Показать, что условие (V) из упражнения 6 выполнено. Пусть $\mathfrak{U}$ — ультрафильтр в H. Мера π определяется, как в упражнении 6.

a) Показать, что $\pi^*(g) \geqslant \lim_{\mu,\,\mathfrak{U}} \mu^*(g)$ для любой полунепрерывной сверху положительной ограниченной функции на T. Вывести отсюда, что $\pi^*(f) = \lim_{\mu,\,\mathfrak{U}} \mu^*(f)$ для любой ограниченной функции f на T, множество точек разрыва которой π-пренебрежимо.

b) В случае вполне регулярного T вывести из a), что H относительно компактно в узкой топологии (это дает новое доказательство теоремы 1 п. 5 для случая положительных мер).

°8) Пусть T — полное метрическое пространство счетного типа, а d — его расстояние. Для любого замкнутого подмножества $F \subset T$ и любого действительного $a > 0$ обозначим через F^a множество тех $x \in T$, для которых $d(x, F) < a$. Если заданы положительные меры λ и μ на T, то обозначим через $D(\lambda, \mu)$ нижнюю грань множества действительных чисе > 0, удовлетворяющих неравенствам $\lambda^*(F) \leqslant \mu^*(F^a) + a$, $\mu^*(F) \leqslant \lambda^*(F^a) + a$ для любого замкнутого подмножества $F \subset T$.

a) Показать, что D есть расстояние в $\mathscr{M}_+^b$ и что $D(\varepsilon_x, \varepsilon_y) = d(x, y)$ для точек x, y из T, для которых $d(x, y) < 1$.

b) Пусть f — борелевское отображение T в T (ср. Общая топ., гл. IX, § 6, п. 3) и λ — ограниченная положительная мера на T. Показать, что существует такая ограниченная положительная мера μ на T, что $\mu^*(A) = \lambda^*(f^{-1}(A))$ для любого борелевского подмножества $A \subset T$. Пусть $a > 0$ и пусть H — множество тех $x \in T$, для которых $d(x, f(x)) \geqslant a$; показать, что H — борелевское в T и что $D(\lambda, \mu) \leqslant \sup(a, \lambda(H))$ (для любого замкнутого подмножества $F \subset T$ имеем $F \cap (T - H) \subset f^{-1}(F^a)$ и $\lambda^*(F) \leqslant \lambda^*(F \cap (T - H)) + \lambda^*(H)$).

c) Пусть μ и μ_n (для $n \geqslant 1$) — такие ограниченные положительные меры на T, что $\lim_{n\to\infty} D(\mu_n, \mu) = 0$. Показать, что последовательность (μ_n) сходится узко к μ (показать, что $\lim_{n\to\infty} \mu_n^*(T) = \mu^*(T)$ и $\mu^*(F) \geqslant \limsup_{n\to\infty} \mu_n^*(F)$ для любого замкнутого компактного подмножества $F \subset T$; вывести отсюда, что $\mu^*(f) \leqslant \liminf_{n\to\infty} \mu_n^*(f)$ для любой полунепрерывной снизу функции $f \geqslant 0$; использовать для этого метод леммы 3 § 2, п. 6).

d) Обратно, показать, что для любой последовательности ограниченных положительных мер μ_n, стремящихся узко к μ в $\mathscr{M}_+^b$, имеем $\lim D(\mu_n, \mu) = 0$. Можно поступить следующим образом: пусть $\varepsilon > 0$ и пусть K — такое компактное подмножество из T, что $\mu^*(T - K) < \varepsilon$ и $\sup_n \mu_n^*(T - K) < \varepsilon$; построить конечное семейство $(B_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ попарно не пересекающихся множеств с μ-пренебрежимой границей и диаметром $\leqslant \varepsilon/2$, объединение которых содержит K (ср. упр. 1). Пусть f — отображение T в T, постоянное на каждом из множеств $B_1, \ldots, B_p$ и $\mathbf{C}(B_1 \cup \ldots \cup B_p)$ и такое, что $f(B_i) \subset B_i$ для $1 \leqslant i \leqslant p$. Определить меры π_n и π соотношениями $\pi_n^*(A) = \mu_n^*(f^{-1}(A))$ и $\pi^*(A) = \mu^*(f^{-1}(A))$ для любого борелевского подмножества $A \subset T$; вывести из b) соотношения $D(\pi_n, \mu_n) \leqslant \varepsilon$, $D(\pi, \mu) \leqslant \varepsilon$ и показать, что $\lim_{n\to\infty} D(\pi_n, \pi) = 0$.

e) Расстояние D в $\mathscr{M}_+^b$ согласуется с узкой топологией (заметить, что $\mathscr{M}_+^b$ метризуемо в узкой топологии).

°9) Пусть имеют место условия и обозначения упражнения 8. Пусть (μ_n) — последовательность Коши для расстояния D в $\mathscr{M}_+^b$; показать, что последовательность (μ_n) сходится (это дает новое доказательство того, что пространство $\mathscr{M}_+^b$ — польское в узкой топологии). Можно поступить следующим образом.

а) Пусть $\varepsilon > 0$ и $a > 0$ — действительные числа; найдется такое конечное подмножество $F \subset T$, что $\sup_n \mu_n^*(T - F^a) \leqslant \varepsilon$ (выбрать такое целое $N \geqslant 1$ и такое компактное подмножество $K \subset T$, что $\sup_{n \geqslant N} D(\mu_n, \mu_N) \leqslant \varepsilon/2$ и $\mu_N^*(T - K) \leqslant \varepsilon/2$; вывести отсюда, что $\sup_{n \geqslant N} |\mu_n^*(T) - \mu^*(T)| \leqslant \varepsilon$ и $\sup_{n \geqslant N} \mu_n^*(T - K^{a/2}) \leqslant \varepsilon$; наконец выбрать такое конечное подмножество $F \subset T$, что $K^{a/2} \subset F^a$ и $\sup_{n < N} \mu_n^* \times (T - F^a) \leqslant \varepsilon$).

в) Пусть $\varepsilon > 0$; найдется такое компактное подмножество $K \subset T$, что $\sup \mu_n^*(T - K) \leqslant \varepsilon$ (выбрать для любого целого $p \geqslant 1$ такое конечное подмножество F_p из T, что $\sup \mu_n^*(T - \overline{(F_p)^{2^{-p}}}) \leqslant \varepsilon/2^p$, и положить $K = \bigcap_{p \geqslant 1} \overline{(F_p)^{2^{-p}}}$).

с) Вывести из b), что из последовательности Коши (μ_n) можно выбрать сходящуюся подпоследовательность (относительно расстояния D).

°10) Пусть T — вполне регулярное пространство; обозначим через $\mathscr{S}$ множество таких действительных функций $f \geqslant 1$ на T, что множество точек $t \in T$, в которых $f(t) \leqslant c$, компактно для любого действительного c. Для любой $f \in \mathscr{S}$ обозначим через $\mathscr{M}_f$ множество таких ограниченных мер μ на T, что $|\mu|^*(f) \leqslant 1$.

а) Для того чтобы подмножество H из $\mathscr{M}^b(T)$ удовлетворяло условию Прохорова, необходимо и достаточно, чтобы существовала такая функция $f \in \mathscr{S}$, что $H \subset \mathscr{M}_f$ (для доказательства необходимости взять f вида $c\left(1 + \sum_{n \geqslant 1} n f_n\right)$, где f_n — характеристическая функция такого множества U_n, что $T - U_n$ компактно и $\sup_{\mu \in H} |\mu|^*(U_n) \leqslant 2^{-n}$).

b) Предположим, что T локально компактно. Для того чтобы подмножество H из $\mathscr{M}^b(T)$ было относительно компактно (в узкой топологии), необходимо и достаточно, чтобы существовала такая непрерывная функция $f \in \mathscr{S}$, что $H \subset \mathscr{M}_f$.

с) Пусть C — замкнутый выпуклый конус в $\mathscr{M}_+^b(T)$. Показать, что $C \cap \mathscr{M}_f$ есть шапочка (Топ. век. пр-ва, гл. II (2-е изд.), § 7, п. 2, опр. 3) конуса C для любого $f \in \mathscr{S}$, и вывести отсюда, что C есть объединение его шапочек. Обозначим через E объединение экстремальных образующих конуса C. Предположим, что T — суслинское пространство. Показать, что для любого $\mu \in C$ найдется такое борелевское

подмножество B из $\mathscr{M}_+^b(T)$, содержащееся в E, и такая положительная мера P с полной массой 1 на B, что $\pi = \int_B \mu\, dP(\mu)$ (применить теорему Шоке об интегральном представлении).

11) Пусть T — вполне регулярное пространство. Предположим, что для любого компактного пространства K и любого непрерывного отображения f пространства T в K задана положительная мера $\mu_{f,K}$ на K; предположим, что $g(\mu_{f,K}) = \mu_{gof,L}$ для любых компактных пространств K и L и любых непрерывных отображений $f\colon T \longrightarrow K$ и $g\colon K \longrightarrow L$; предположим еще, что мера $\mu_{f,K}$ сосредоточена на $f(T)$ для любых f и K. Показать, что существует, и притом единственная, такая ограниченная положительная мера π на T, что $\mu_{f,K} = f(\pi)$ для любых f и K (использовать универсальное свойство компактификации Стоуна — Чеха пространства T).

12) Пусть T — вполне регулярное пространство, являющееся подпространством локально компактного пространства L. Для любой меры μ (положительной или нет) на T существуют локально компактное подпространство T' из L, содержащее T, и мера μ' на T', сосредоточенная на T и индуцирующая μ на T.

°13)* Пусть G — локально компактная коммутативная группа. Обозначим через $\hat{G}$ двойственную группу к G и через α — меру Хаара на $\hat{G}$. Для любой ограниченной меры μ на G обозначим через $\mathscr{F}\mu$ преобразование Фурье меры μ, которое является функцией на группе $\hat{G}$ (ср. Спектр. теория, гл. II, § 1, п. 3).

a) Преобразование Фурье $\mathscr{F}$ есть непрерывное отображение $\mathscr{M}_+^b(G)$, наделенного узкой топологией, в $\mathscr{C}^b(\hat{G})$, наделенное топологией компактной сходимости. (Использовать следствие из предл. 13 п. 6.)

b) Пусть $\mathfrak{F}$ — фильтр в $\mathscr{M}_+^b(G)$ и Φ — непрерывная ограниченная функция на $\hat{G}$; предположим, что $\lim_{\lambda,\,\mathfrak{F}} (\mathscr{F}\lambda)\cdot\alpha = \Phi\cdot a$ (широкая сходимость) и $\lim_{\lambda,\,\mathfrak{F}} (\mathscr{F}\lambda)(0) = \Phi(0)$. Показать, что фильтр $\mathfrak{F}$ сходится узко к такой мере μ, что $\mathscr{F}\mu = \Phi$ (применив теорему Вейерштрасса — Стоуна, показать, что множество преобразований Фурье непрерывных функций с компактным носителем на G есть плотное векторное подпространство из $\mathscr{C}^0(\hat{G})$ относительно равномерной сходимости; заметить далее, что $\lim_{\lambda,\,\mathfrak{F}} \int (\mathscr{F}\lambda)\cdot u\, d\alpha = \int \Phi u\, d\alpha$ для любого $u \in E$ и что фильтр $\mathfrak{F}$ содержит некоторое широко компактное множество ограниченных мер; вывести отсюда, что фильтр $\mathfrak{F}$ имеет не более одной точки прикосновения, а затем — что он узко сходится).

c) Пусть $\mathfrak{F}$ — фильтр *со счетным базисом* в $\mathscr{M}_+^b(G)$. Для того отобы $\mathfrak{F}$ узко сходился к ограниченной положительной мере μ, необходимо и достаточно, чтобы существовала такая непрерывная функция Φ на $\hat{G}$, что $\mathscr{F}\lambda$ сходится просто к Φ по $\mathfrak{F}$, и тогда $\mathscr{F}\mu = \Phi$ («теорема П. Леви»).

§ 6. Промеры и меры на локально выпуклом пространстве

В этом параграфе рассматриваются лишь векторные пространства над полем действительных чисел. Под локально выпуклым пространством понимается отделимое локально выпуклое топологическое пространство над **R**. *Топологическое сопряженное к локально выпуклому пространству E будет обозначаться E'; для $x \in E$ и $x' \in E'$ полагаем $\langle x, x' \rangle = x'(x)$.*

1. Промеры на локально выпуклом пространстве

Пусть E — локально выпуклое пространство. Обозначим через $\mathscr{F}(E)$ множество замкнутых векторных подпространств из E конечной коразмерности, упорядоченное отношением $\supset$. Для любого $V \in \mathscr{F}(E)$ через p_V обозначим каноническое отображение E на E/V. Пусть V и W — такие элементы из $\mathscr{F}(E)$, что $V \supset W$; обозначим через p_{VW} отображение E/W в E/V, полученное факторизацией из тождественного отображения пространства E. Семейство $\mathfrak{A}(E) = (E/V, p_{VW})$ есть проективная система локально выпуклых пространств, индексированная множеством $\mathscr{F}(E)$. Она называется *проективной системой конечномерных факторов пространства E*.

Можно показать, что проективный предел проективной системы $\mathfrak{A}(E)$ канонически изоморфен алгебраическому сопряженному E'^* пространства E', наделенному слабой топологией $\sigma(E'^*, E')$.

Определение 1. *Пусть E — локально выпуклое пространство. Промерой на E называется всякая проективная система мер* (§ 4, п. 2, опр. 1) *на проективной системе конечномерных факторов пространства E.*

Иными словами, промера μ на E есть семейство $(\mu_V)_{V \in \mathscr{F}(E)}$, где μ_V — (положительная) ограниченная мера на конечномерном пространстве E/V и где $\mu_V = p_{VW}(\mu_W)$, когда $V \supset W$. Все меры

μ_V имеют одну и ту же полную массу, которая называется *полной массой* промеры μ.

Для того чтобы подпространство V из E принадлежало $\mathscr{F}(E)$, необходимо и достаточно, чтобы в E' нашлось конечное число таких элементов $x'_1, \ldots, x'_n$, что V состоит из элементов $x \in E$, удовлетворяющих соотношению $\langle x, x'_i\rangle = 0$ для $1 \leqslant i \leqslant n$ (Топ. вект. пр-ва, гл. II (2-е изд.), § 6, п. 3, следствие 2 из теоремы 1 и п. 5, следствие 2 из предл. 7). Кроме того, в конечномерном векторном пространстве существует единственная отделимая топология топологического векторного пространства (там же, гл. 1, § 2, п. 3, теорема 2). Следовательно, понятие промеры на E зависит лишь от сопряженного к E пространства E'.

Пусть λ — ограниченная мера на E. Для любого $V \in \mathscr{F}(E)$ обозначим через $\tilde{\lambda}_V$ образ меры λ при каноническом отображении p_V пространства E на E/V. Для двух элементов V и W из $\mathscr{F}(E)$, для которых $V \supset W$, имеем $p_V = p_{VW} \circ p_W$; стало быть, семейство $\tilde{\lambda} = (\tilde{\lambda}_V)_{V \in \mathscr{F}(E)}$ есть промера на E. Будем говорить, что $\tilde{\lambda}$ есть промера, *ассоциированная* с мерой λ. Легко видеть, что λ и $\tilde{\lambda}$ имеют одну и ту же полную массу.

Предложение 1. *Пусть E — локально выпуклое пространство. Отображение $\lambda \mapsto \tilde{\lambda}$ есть биекция множества ограниченных мер на E на множество промер $(\mu_V)_{V \in \mathscr{F}(E)}$ на E, удовлетворяющее следующему условию:*

Для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое компактное подмножество K из E, что $\mu_V(E/V - p_V(K)) \leqslant \varepsilon$ для любого $V \in \mathscr{F}(E)$.

Мы знаем, что пересечение ядер непрерывных линейных форм на E равно 0 (Топ. вект. пр-ва, гл. II (2-е изд.), § 4, п. 2, следствие 1 из предл. 2); стало быть, $\bigcap_{V \in \mathscr{F}(E)} V = \{0\}$, и семейство $(p_V)_{V \in \mathscr{F}(E)}$ — когерентное и отделяющее. Теперь предложение следует из теоремы 1 § 4, п. 2.

В частности, отображение $\lambda \mapsto \tilde{\lambda}$ инъективно. Если μ — промера на E и если существует такая ограниченная мера λ на E, что $\mu = \tilde{\lambda}$, то мы будем, допуская вольность, говорить, что μ есть мера. Если E конечномерно, то всякая промера $\mu = (\mu_V)_{V \in \mathscr{F}(E)}$

есть мера: в самом деле, $\{0\} \in \mathscr{F}(E)$, $E/\{0\} = E$ и $p_{V,\{0\}} = p_V$, откуда $\mu_V = p_V(\mu_{\{0\}})$ для любого $V \in \mathscr{F}(E)$; иными словами, $\mu = \widetilde{\lambda}$, где $\lambda = \mu_{\{0\}}$.

Предложение 2. *Пусть T — счетное множество и E — пространство действительных функций на T, наделенное топологией простой сходимости. Тогда всякая промера на E есть мера.*

Пусть для любого $t \in T$ через ε_t обозначена линейная форма $f \mapsto f(t)$ на E. Мы знаем (Топ. вект. пр-ва, гл. II (2-е изд.), § 6, п. 6, следствие 2 из предл. 8), что семейство $(\varepsilon_t)_{t\in T}$ есть базис векторного пространства E'. Обозначим через Ф множество конечных подмножеств из T, а для любого $J \in \Phi$ через E_J обозначим множество функций на T, обращающихся в нуль в каждой точке из J. Пусть $F \in \mathscr{F}(E)$; так как ортогональное к F пространство F^0 есть конечномерное подпространство из E', то найдется такое $J \in \Phi$, что F^0 содержится в подпространстве G из E', порожденном ε_t при $t \in J$. А поскольку $F^0 \subset G$, то

$$E_J = G^0 \subset F^{00} = F,$$

и *счетное* семейство $(E_J)_{J\in\Phi}$ конфинально в $\mathscr{F}(E)$. Теперь предложение вытекает из теоремы 2 § 4, п. 3.

2. *Образ промеры*

Пусть E и E_1 — локально выпуклые пространства и u — непрерывное линейное отображение E в E_1. Для любого $V_1 \in \mathscr{F}(E_1)$ подпространство $V = u^{-1}(V_1)$ из E принадлежит $\mathscr{F}(E)$ и u определяет факторизацией линейное отображение u_{V_1} пространства E/V в E_1/V_1. Пусть V_1 и W_1 из $\mathscr{F}(E_1)$ таковы, что $V_1 \supset W_1$; положим $V = u^{-1}(V_1)$ и $W = u^{-1}(W_1)$. Тогда $V \supset W$ и имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{p_W} & E/W & \xrightarrow{p_{VW}} & E/V \\ {\scriptstyle u}\downarrow & & {\scriptstyle u_{W_1}}\downarrow & & {\scriptstyle u_{V_1}}\downarrow \\ E_1 & \xrightarrow{p_{W_1}} & E_1/W_1 & \xrightarrow{p_{V_1W_1}} & E_1/V_1 \end{array}$$

Пусть теперь $\mu = (\mu_V)_{V\in\mathscr{F}(E)}$ — промера на E. Для любого $V_1 \in \mathscr{F}(E_1)$ положим

$$\nu_{V_1} = u_{V_1}(\mu_{u^{-1}(V_1)}). \qquad (1)$$

Коммутативность диаграммы показывает, что семейство $\nu = (\nu_{V_1})_{V_1 \in \mathscr{F}(E_1)}$ есть промера на E_1. Говорят, что ν есть *образ* μ *при отображении* u, и обозначают его $u(\mu)$.

Пусть λ — ограниченная мера на E и $u(\lambda)$ — мера на E_1, являющаяся образом λ при отображении u. Если промера μ ассоциирована с λ, то промера $u(\mu)$ ассоциирована с $u(\lambda)$. Это вытекает из коммутативности диаграммы.

Пусть $V \in \mathscr{F}(E)$. Ясно, что промера на E/V, являющаяся образом промеры μ при каноническом отображении $p_V : E \to E/V$, ассоциирована с мерой μ_V.

Пусть u_1 — непрерывное линейное отображение E_1 в локально выпуклое пространство E_2. Без труда доказывается соотношение $(u_1 \circ u)(\mu) = u_1(u(\mu))$ («транзитивность образа промер»).

3. *Преобразование Фурье промеры*

Пусть E — локально выпуклое пространство и $\mu = (\mu_V)_{V \in \mathscr{F}(E)}$ — промера на E. Для любой непрерывной линейной формы x' на E через $\mu_{x'}$ обозначим меру на $\mathbf{R}$ — образ промеры μ на E при отображении x'. Преобразование Фурье промеры μ есть функция $\mathscr{F}\mu$ на E', определенная формулой

$$(\mathscr{F}\mu)(x') = \int_{\mathbf{R}} e^{it}\, d\mu_{x'}(t). \tag{2}$$

Пусть λ — ограниченная мера на E. Преобразование Фурье меры λ есть функция на E', определяемая формулой

$$(\mathscr{F}\lambda)(x') = \int_{E} e^{i\langle x,\, x'\rangle}\, d\lambda(x). \tag{3}$$

Пусть μ — промера, ассоциированная с λ. Для любого $x' \in E'$ мера $\mu_{x'}$ на $\mathbf{R}$ есть образ меры λ на E при отображении $x' : E \to \mathbf{R}$; формулы (2) и (3) сразу же приводят к соотношению $\mathscr{F}\mu = \mathscr{F}\lambda$.

Пусть μ — произвольная промера на E и u — непрерывное линейное отображение E в локально выпуклое пространство E_1. Обозначим через ${}^t u$ транспонированное к u линейное отображение E_1' в E', а через ν — промеру $u(\mu)$ на E_1. Для любого $x_1' \in E_1'$ имеем ${}^t u(x_1') = x_1' \circ u$, откуда

$$\nu_{x_1'} = x_1'(\nu) = x_1'(u(\mu)) = (x_1' \circ u)(\mu) = \mu_{t_{u(x_1')}}.$$

Следовательно,

$$\mathscr{F}(u(\mu)) = (\mathscr{F}\mu) \circ {}^t u. \tag{4}$$

В частности, возьмем в качестве u каноническое отображение p_V пространства E на E/V (для $V \in \mathscr{F}(E)$). Промера $p_V(\mu)$ на E/V ассоциирована с мерой μ_V и ${}^t p_V$ есть изоморфизм сопряженного к E/V на подпространство V^0 из E', ортогональное к V. Если мы отождествим $(E/V)'$ с V^0 при помощи ${}^t p_V$, то

$$(\mathscr{F}\mu)(x') = \int_{E/V} e^{i\langle x, x'\rangle}\, d\mu_V(x) \tag{5}$$

для любого $x' \in V^0$. Имеем $E' = \bigcup_{V \in \mathscr{F}(E)} V^0$, так что предыдущая формула задает функцию $\mathscr{F}\mu$ на E'. Наконец, если в (5) положить $x' = 0$, то ясно, что полная масса промеры μ равна $(\mathscr{F}\mu)(0)$.

Предложение 3. *Пусть E — локально выпуклое пространство. Отображение $\mu \mapsto \mathscr{F}\mu$ множества промер на E в множество функций на E' инъективно.*

Формула (5) позволяет свести все к случаю, когда E конечномерно; а так как всякое конечномерное пространство изоморфно пространству $\mathbf{R}^n$, то мы можем даже предположить существование такого целого $n \geqslant 0$, что $E = \mathbf{R}^n$. Стало быть, достаточно доказать, что если μ — ограниченная (не обязательно положительная) мера на $\mathbf{R}^n$ и

$$\int_{R^n} e^{i\langle x, y\rangle}\, d\mu(x) = 0$$

для любой линейной формы y на $\mathbf{R}^n$, то $\mu = 0$.

Пусть для любого целого $m \geqslant 0$ через G_m обозначена подгруппа $m \cdot \mathbf{Z}^n$ из $\mathbf{R}^n$. Через $\mathscr{C}_m$ обозначим векторное пространство таких непрерывных функций f на $\mathbf{R}^n$, что $f(x + a) = f(x)$ для $x \in \mathbf{R}^n$, а $a \in G_m$. В силу предложения 8 (Общая топ., гл. X (2-е изд.), § 4, п. 4) всякая функция из $\mathscr{C}_m$ есть равномерный предел конечных линейных комбинаций функций типа $x \mapsto e^{2\pi i\langle x, q\rangle}$ с $q \in m^{-1} \cdot \mathbf{Z}^n$. Стало быть, $\mu(f) = 0$ для любой функции $f \in \mathscr{C}_m$.

Пусть f — непрерывная функция с компактным носителем на $\mathbf{R}^n$. Для любого целого $m \geqslant 0$ положим $f_m(x) = \sum_{q \in G_m} f(x + q)$. Очевидно, что для любого $x \in \mathbf{R}^n$ этот ряд имеет лишь

конечное число членов и что f_m принадлежит $\mathscr{C}_m$. Кроме того, легко видеть, что последовательность (f_m) равномерно стремится к f на любом компакте и что существует такая константа $C \geqslant 0$, что $|f_m| \leqslant C$ для любого m. Значит, в силу предложения 12 § 5, п. 6, $\mu(f) = \lim_{m\to\infty} \mu(f_m)$. А поскольку $f_m \in \mathscr{C}_m$, то $\mu(f_m) = 0$, откуда окончательно получаем $\mu(f) = 0$. Итак, $\mu = 0$.

* Замечание. Если E конечномерно, то всякий его характер имеет вид $x \mapsto e^{i\langle x, x'\rangle}$ с $x' \in E'$. (Спектр. теор., гл. II, § 1, п. 9, следствие 3 из предл. 12). В этом случае предложение 3 вытекает из теоремы единственности для преобразования Фурье (там же, § 1, п. 6, следствие из предл. 6).*

4. *Вычисление гауссовых интегралов*

Лемма 1. *Для любого целого* $n \geqslant 0$

$$\int_{\mathbf{R}} |x|^n e^{-x^2/2}\, dx = 2^{\frac{n+1}{2}}\, \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right), \tag{6}$$

$$\int_{\mathbf{R}} x^{2n} e^{-x^2/2}\, dx = (2\pi)^{1/2}\, \frac{(2n)!}{2^n n!}, \tag{7}$$

$$\int_{\mathbf{R}} x^{2n+1} e^{-x^2/2}\, dx = 0. \tag{8}$$

Напомним формулу

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty u^{s-1} e^{-u}\, du, \tag{9}$$

справедливую для любого действительного $s > 0$ (Функции действ. перем., гл. VII, § 1, п. 3, предл. 3). Производя замену переменного $x = (2u)^{1/2}$, получаем согласно (9):

$$\int_0^\infty x^n e^{-x^2/2}\, dx = \int_0^\infty (2u)^{n/2} e^{-u}\, \frac{1}{2} 2^{1/2} u^{-1/2}\, du = 2^{\frac{n-1}{2}}\, \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right),$$

откуда вытекает формула (6), поскольку

$$\int_{\mathbf{R}} |x|^n e^{-x^2/2}\, dx = 2 \int_0^\infty x^n e^{-x^2/2}\, dx.$$

Формула (7) следует из (6) и из соотношения

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\pi^{1/2}\frac{(2n)!}{2^{2n}n!}. \tag{10}$$

Для $n=0$ это соотношение принимает вид $\Gamma(1/2)=\pi^{1/2}$, т. е. сводится к формуле (21) (Функции действ. перем., гл. VII, § 1, п. 3). Общий случай получается отсюда индукцией по n, если принять во внимание соотношение $\Gamma(x+1)=x\,\Gamma(x)$ (там же, § 1, п. 1).

Наконец, формула (8) следует из того, что функция $x\mapsto x^{2n+1}e^{-x^2/2}$ нечетна.

Лемма 2. *Для любого комплексного числа* y

$$(2\pi)^{-1/2}\int_{\mathbf{R}} e^{-x^2/2}e^{ixy}\,dx=e^{-y^2/2}. \tag{11}$$

В частности,

$$(2\pi)^{-1/2}\int_{\mathbf{R}} e^{-x^2/2}\,dx=1.$$

Замена переменной $x\mapsto -x$ дает

$$(2\pi)^{-1/2}\int_{\mathbf{R}} e^{-x^2/2}e^{ixy}\,dx=(2\pi)^{-1/2}\int_{\mathbf{R}} e^{-x^2/2}e^{-ixy}\,dx;$$

а поскольку $\cos u=(e^{iu}+e^{-iu})/2$ для любого комплексного числа u, то отсюда получаем

$$(2\pi)^{-1/2}\int_{\mathbf{R}} e^{-x^2/2}e^{ixy}\,dx=(2\pi)^{-1/2}\int_{\mathbf{R}} e^{-x^2/2}\cos xy\,dx. \tag{12}$$

Для любого целого $n\geqslant 0$ полагаем

$$g_n(x)=(-1)^n(2\pi)^{-1/2}\frac{(xy)^{2n}}{(2n)!}e^{-x^2/2}.$$

В силу (7) имеем

$$\int_{\mathbf{R}}|g_n(x)|\,dx=\frac{1}{n!}\left(\frac{|y|^2}{2}\right)^n, \tag{13}$$

$$\int_{\mathbf{R}} g_n(x)\,dx=\frac{1}{n!}\left(-\frac{y^2}{2}\right)^n, \tag{14}$$

откуда

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_{\mathbf{R}}|g_n(x)|\,dx=e^{|y|^2/2}<+\infty.$$

Так как, кроме того,

$$(2\pi)^{-1/2} e^{-x^2/2} \cos xy = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(x),$$

то можно почленно интегрировать это равенство, в результате чего в силу (14) получаем

$$(2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbf{R}} e^{-x^2/2} \cos xy \, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\mathbf{R}} g_n(x) \, dx = e^{-y^2/2}.$$

Теперь формула (11) следует из (12).

5. *Гауссовы промеры и меры*

Предложение 4. *Пусть E — локально выпуклое пространство. Для любой положительной квадратичной формы Q на E' существует, и притом единственная, такая промера Γ_Q на E, что $\mathcal{F}\Gamma_Q = e^{-Q/2}$. Полная масса Γ_Q равна* 1.

Единственность Γ_Q следует из предложения 3 п. 3. Полная масса промеры Γ_Q равна $(\mathcal{F}\Gamma_Q)(0) = e^{-Q(0)/2} = 1$. *Существование* мы будем доказывать по этапам.

А) *E имеет конечную размерность n, а Q невырождена.*

Согласно лемме 2 п. 4 мера γ_1 на $\mathbf{R}$, имеющая плотность $t \mapsto (2\pi)^{-1/2} e^{-t^2/2}$, ограничена и имеет полную массу 1. Положим $\gamma = \gamma_1 \otimes \ldots \otimes \gamma_1$ (n сомножителей). Из леммы 2 п. 4 получаем

$$\int_{\mathbf{R}^n} \exp(i(a_1 t_1 + \ldots + a_n t_n)) \, d\gamma(t_1, \ldots, t_n) =$$

$$= \prod_{j=1}^{n} \int_{\mathbf{R}} e^{ia_j t} \, d\gamma_1(t) = \prod_{j=1}^{n} (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbf{R}} e^{ia_j t} e^{-t^2/2} \, dt =$$

$$= \prod_{j=1}^{n} e^{-a_j^2/2} = \exp\left(-\frac{1}{2}(a_1^2 + \ldots + a_n^2)\right).$$

А так как Q положительна и невырождена, то в E' существует ортонормированный базис $(e_1', \ldots, e_n')$ относительно Q (Алгебра, гл. IX, § 7, п. 1). Обозначим через f изоморфизм $x \mapsto (e_1'(x), \ldots, e_n'(x))$ пространства E на $\mathbf{R}^n$, а через Γ_Q — меру $f^{-1}(\gamma)$ на E

Пусть $x' = a_1 e'_1 + \ldots + a_n e'_n$ в E'; имеем $x'(f^{-1}(t_1, \ldots, t_n)) = \sum_{j=1}^{n} t_j a_j$ для действительных $t_1, \ldots, t_n$, откуда

$$\int_E e^{i\langle x, x'\rangle}\, d\Gamma_Q(x) = \int_{\mathbf{R}^n} \exp\left(i\left(a_1 t_1 + \ldots + a_n t_n\right)\right) d\gamma(t_1, \ldots, t_n) =$$

$$= \exp\left(-\tfrac{1}{2}\left(a_1^2 + \ldots + a_n^2\right)\right) = \exp\left(-\tfrac{1}{2} Q(x')\right).$$

Следовательно, $\mathcal{F}\Gamma_Q = e^{-Q/2}$.

B) *E конечномерно.*

Пусть N — векторное подпространство пространства E', состоящее из тех x', для которых $Q(x') = 0$. Обозначим через M ортогональное к N подпространство в E, а через j — каноническую инъекцию M в E. Линейное отображение ${}^t j\colon E' \to M'$ сюръективно и имеет ядро N, а значит, существует такая невырожденная положительная квадратичная форма q на M', что $Q = q \circ {}^t j$. В силу вышеизложенного на M существует такая ограниченная мера Γ, что $\mathcal{F}\Gamma = e^{-q/2}$. Если положить $\Gamma_Q = j(\Gamma)$, то в силу формулы (4) п. 3

$$\mathcal{F}\Gamma_Q = (\mathcal{F}\Gamma) \circ {}^t j = \exp\left(-q \circ {}^t j/2\right) = e^{-Q/2}.$$

C) *Общий случай.*

Пусть $V \in \mathcal{F}(E)$. Обозначим через p_V каноническое отображение E на E/V, а через Q_V — положительную квадратичную форму $Q \circ {}^t p_V$ на $(E/V)'$; наконец, пусть μ_V — мера на E/V с преобразованием Фурье $e^{-Q_V/2}$ (ср. B)). Если $W \in \mathcal{F}(E)$ содержится в V, то $p_V = p_{VW} \circ p_W$, откуда $Q_V = Q_W \circ {}^t p_{VW}$; в силу формулы (4) п. 3 мера p_{VW} (μ_W) имеет в качестве преобразования Фурье функцию $(e^{-Q_W/2}) \circ {}^t p_{VW} = e^{-Q_V/2}$, и значит, равна μ_V. Стало быть, семейство $(\mu_V)_{V \in \mathcal{F}(E)}$ есть промера μ на E. Формула 5 п. 3 показывает, что $\mathcal{F}\mu$ равно $e^{-Q/2}$.

Определение 2. *Пусть E — локально выпуклое пространство. Для любой положительной квадратичной формы Q на E' гауссовой промерой с вариацией Q на E называется, и обозначается Γ_Q, промера на E, преобразование Фурье которой равно $e^{-Q/2}$. Говорят, что промера μ гауссова на E, если существует такая положительная квадратичная форма Q на E', что $\mu = \Gamma_Q$.*

Допуская вольность, будем говорить, что ограниченная мера μ на E гауссова с вариацией Q, если ассоциированная промера $\check{\mu}$ равна Γ_Q.

Замечания. 1) Пусть E — конечномерное векторное пространство и пусть μ — такая положительная мера на E с массой 1, что всякая линейная форма на E принадлежит $\mathscr{L}^2(E, \mu)$. Определим элемент m из E и положительную квадратичную форму V на E' формулами

$$\langle m, x'\rangle = \int_E \langle x, x'\rangle \, d\mu(x),$$

$$V(x') = \int_E \langle x - m, x\rangle^2 \, d\mu(x).$$

В традиционной терминологии теории вероятностей m называется *средним*, а V — *вариацией* μ; говорят, что μ *центрирована*, если $m = 0$.

Пусть теперь a — элемент из E и Q — положительная квадратичная форма на E'. Обозначим через $\Gamma_{a,Q}$ образ меры Γ_Q при сдвиге $x \mapsto x + a$. Легко видеть, что $\Gamma_{a,Q}$ есть положительная мера на E с массой 1, с преобразованием Фурье $x' \mapsto \exp(i\langle a, x'\rangle - (1/2)\,Q(x'))$ и средним a. Кроме того, предложение 6 влечет, что Q есть вариация для $\Gamma_{a,Q}$. В соответствии с традицией говорят, что $\Gamma_{a,Q}$ есть гауссова мера со средним a и вариацией Q и что $\Gamma_Q = \Gamma_{0,Q}$ есть *центрированная* гауссова мера с вариацией Q. Так как мы будем рассматривать лишь *центрированные* гауссовы меры, то мы слово «центрированные» будем опускать.

2) Пусть Q — квадратичная форма на сопряженном пространстве E' к локально выпуклому пространству E. Если существует промера на E с преобразованием Фурье $e^{-Q/2}$, то квадратичная форма Q положительна: в самом деле, функция $e^{-Q/2}$ ограничена на E'; значит, для любого $x' \in E'$ функция $t \mapsto e^{-t^2Q(x')/2} = e^{-Q(tx')/2}$ на $\mathbf{R}$ ограничена, откуда $Q(x') \geqslant 0$.

3) Сопряженное к $\mathbf{R}$ канонически изоморфно $\mathbf{R}$, и положительные квадратичные формы на $\mathbf{R}$ являются функциями вида $t \mapsto at^2$ с $a \geqslant 0$. Значит, для любого $a \geqslant 0$ существует, и притом только одна, ограниченная мера γ_a на $\mathbf{R}$, преобразование Фурье которой равно функции $t \mapsto e^{-at^2/2}$; говорят, допуская вольность, что γ_a есть *гауссова мера на* $\mathbf{R}$ *с вариацией* a.

Преобразование Фурье меры γ_0 есть константа 1, откуда $\gamma_0 = \varepsilon_0$ (единичная масса в начале $\mathbf{R}$). Предположим, что $a > 0$, и обозначим через u_a линейное отображение $x \mapsto a^{1/2}x$; имеем $\mathscr{F}\gamma_a = \mathscr{F}\gamma_1 \circ {}^t u_a$, откуда $\gamma_a = u_a(\gamma_1)$. Лемма 2 показывает, что γ_1 есть мера с плот-

ностью $x \longmapsto (2\pi)^{-1/2} e^{-x^2/2}$ относительно меры Лебега; отсюда легко вывести формулу

$$d\gamma_a(x) = (2\pi a)^{-1/2} e^{-x^2/2a}\, dx. \tag{15}$$

Образ гауссовой промеры при непрерывном линейном отображении есть гауссова промера. Более точно, имеет место следующий результат:

Предложение 5. *Пусть E и E_1 — локально выпуклые пространства и u — непрерывное линейное отображение E в E_1. Пусть Q — положительная квадратичная форма на E' и Q_1 — положительная квадратичная форма $Q \circ {}^t u$ на E_1'. Справедливо равенство $u(\Gamma_Q) = \Gamma_{Q_1}$.*

Положим $\mu = u(\Gamma_Q)$. Согласно формуле (4) п. 3

$$\mathscr{F}\mu = (\mathscr{F}\Gamma_Q) \circ {}^t u = e^{-Q/2} \circ {}^t u = e^{-Q_1/2} = \mathscr{F}\Gamma_{Q_1},$$

откуда $\mu = \Gamma_{Q_1}$ в силу предложения 3 п. 3.

Следствие. *Пусть E — локально выпуклое пространство и Q — положительная квадратичная форма на E'. Для любого $x' \in E'$ образ Γ_Q при отображении x' есть гауссова мера с вариацией $Q(x')$ на $\mathbf{R}$.*

Предложение 6. *Пусть E — локально выпуклое пространство и μ — гауссова мера на E с вариацией Q. Для любого целого $n \geqslant 0$ и любого $x' \in E'$ справедливы соотношения*

$$\int_E |\langle x, x'\rangle|^n\, d\mu(x) = \pi^{-1/2} 2^{n/2} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) Q(x')^{n/2}, \tag{16}$$

$$\int_E \langle x, x'\rangle^{2n}\, d\mu(x) = \frac{(2n)!}{2^n n!} Q(x')^n, \tag{17}$$

$$\int_E \langle x, x'\rangle^{2n+1}\, d\mu(x) = 0. \tag{18}$$

В частности,

$$\int_E \langle x, x'\rangle^2\, d\mu(x) = Q(x') \qquad (x' \in E'). \tag{19}$$

Если эти формулы верны для некоторого элемента $x' \in E'$, то они верны и для всех его кратных tx' (с действительным t). Стало быть, можно ограничиться случаем, когда $Q(x')$ равна 0 или 1.

a) Предположим, что $Q(x') = 0$. Мера $x'(\mu)$ равна $\gamma_0 = \varepsilon_0$, и значит, x' равно нулю μ-почти всюду; тогда формулы (16) — (19) очевидны.

b) Предположим, что $Q(x') = 1$; отсюда $x'(\mu) = \gamma_1$. Имеем

$$\int_E |\langle x, x'\rangle|^n \, d\mu(x) = \int_{\mathbf{R}} |t|^n \, d\gamma_1(t) = (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbf{R}} |t|^n e^{-t^2/2} \, dt,$$

и (16) сразу же вытекает из (6) (п. 4, лемма 1). Точно так же формулы (17) и (18) следуют из (7) и (8). Наконец, (19) получим, положив в (17) $n = 1$.

Теперь мы можем доказать утверждение, обратное к следствию из предложения 5.

Предложение 7. *Пусть E — локально выпуклое пространство и μ — промера на E. Предположим, что $x'(\mu)$ есть гауссова мера на $\mathbf{R}$ для любого $x' \in E'$. Тогда μ есть гауссова промера на E.*

Пусть для любого $x' \in E'$ через $Q(x')$ обозначена вариация гауссовой меры $x'(\mu)$ на $\mathbf{R}$. Имеем $x'(\mu) = \gamma_{Q(x')}$, откуда в силу определения $\mathcal{F}\mu$ (п. 3, формула (2))

$$(\mathcal{F}\mu)(x') = \int_{\mathbf{R}} e^{it \cdot 1} \, d\gamma_{Q(x')}(t) = e^{-Q(x') \cdot 1^2/2}.$$

Иными словами, $\mathcal{F}\mu = e^{-Q/2}$, и остается доказать, что Q есть положительная квадратичная форма на E'.

Для любого замкнутого векторного подпространства V из E конечной коразмерности обозначим через p_V каноническое отображение E на E/V, через μ_V — меру $p_V(\mu)$ на E/V и положим $Q_V = Q \circ {}^t p_V$. Так как $E' = \bigcup_{V \in \mathcal{F}(E)} \operatorname{Im}({}^t p_V)$ и так как ${}^t p_V$ инъективно, то достаточно доказать, что Q_V есть положительная квадратичная форма на $(E/V)'$. Пусть $u \in (E/V)'$ и $x' = {}^t p_V(u)$. Имеем

$$u(\mu_V) = u(p_V(\mu)) = x'(\mu) = \gamma_{Q(x')};$$

поэтому в силу предложения 6

$$Q_V(u) = Q(x') = \int_{\mathbf{R}} t^2 \, d\gamma_{Q(x')}(t) = \int_{E/V} u(x)^2 \, d\mu_V(x),$$

и значит, Q_V есть положительная квадратичная форма на $(E/V)'$.

6. *Примеры гауссовых промер*

1) Пусть E — действительное гильбертово пространство. Отображение $x' \mapsto \| x' \|^2$ есть положительная квадратичная форма на E'. Соответствующая гауссова промера называется *канонической гауссовой промерой* на E. Можно показать, что эта промера не будет мерой в случае бесконечномерного E.

Пусть A — непрерывный линейный оператор на E. Отображение $x' \mapsto \| {}^t A x' \|^2$ есть положительная квадратичная форма на E'. Соответствующая промера μ_A на E есть мера в том и только том случае, если A есть оператор Гильберта — Шмидта.

2) *Ядра положительного типа.* Обозначим через T некоторое множество, а через $E = \mathbf{R}^T$ — векторное пространство действительных функций на T, наделенное топологией простой сходимости. Для любого $t \in T$ через ε_t обозначим линейную форму $f \mapsto f(t)$ на E. Семейство $(\varepsilon_t)_{t \in T}$ есть базис пространства E' (Топ. вект. пр-ва, гл. II (2-е изд.), § 6, п. 6, следствие 2 из предл. 8).

Ядром положительного типа (действительным) на T называется всякая функция K на $T \times T$ с действительными значениями, удовлетворяющая соотношениям

$$K(t, t') = K(t', t) \quad \text{для} \quad t,\ t' \in T, \tag{20}$$

$$\sum_{i,\, j=1}^{p} c_i c_j K(t_i, t_j) \geqslant 0, \tag{21}$$

каковы бы ни были положительные целые p, элементы $t_1, \ldots, t_p$ из T и действительные числа $c_1, \ldots, c_p$. Если это выполняется, то формула

$$q\Big(\sum_{t \in T} c_t \varepsilon_t\Big) = \sum_{t,\, t' \in T} c_t c_{t'} K(t, t') \tag{22}$$

определяет положительную квадратичную форму на E'. Обратно, если q — положительная квадратичная форма на E', то формула

$$K(t, t') = \frac{1}{2}\left[q(\varepsilon_t + \varepsilon_{t'}) - q(\varepsilon_t) - q(\varepsilon_{t'})\right] \tag{23}$$

определяет ядро положительного типа K на T. Таким образом, получаем две взаимно обратные биекции между множеством ядер положительного типа на T и множеством положительных квадратичных форм на E'.

Пусть K — ядро положительного типа на T и q — ассоциированная квадратичная форма на E'. Гауссова промера на E с вариацией q называется также *гауссовой промерой на E с ковариацией K*. Если T счетно, то из предложения 2 п. 1 выводим, что эта промера является мерой.

3) Пусть T — счетное множество. Определим ядро положительного типа δ на T, положив

$$\delta(t, t') = \begin{cases} 1, & \text{если } t = t', \\ 0, & \text{если } t \neq t'. \end{cases} \tag{24}$$

Соответствующая квадратичная форма задается равенством $q\left(\sum_{t\in T} c_t\varepsilon_t\right) = \sum_{t\in T} c_t^2$. Для любого $t \in T$ через μ_t обозначим гауссову меру с вариацией 1 на $\mathbf{R}$; легко показать, что гауссова мера на $\mathbf{R}^T$ с ковариацией δ равна $\bigotimes_{t\in T} \mu_t$.

4) Пусть $n \geqslant 1$ — целое число. Квадратная матрица $C = (c_{ij})$ порядка n называется *положительной симметрической*, если она симметрическая и если $\sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}x_ix_j \geqslant 0$, каковы бы ни были действительные $x_1, \ldots, x_n$; это сводится к утверждению, что отображение $(i, j) \mapsto c_{ij}$ есть ядро положительного типа на множестве $\{1, 2, \ldots, n\}$. Стало быть, будем говорить о гауссовой мере γ_C на $\mathbf{R}^n$ с ковариацией C; она характеризуется формулой

$$\int_{\mathbf{R}^n} \exp\left(i\left(x_1t_1 + \ldots + x_nt_n\right)\right) d\gamma_C(t_1, \ldots, t_n) =$$

$$= \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n} c_{jk}x_jx_k\right) \tag{25}$$

для действительных $x_1, \ldots, x_n$. Из предложения 6 п. 5 (формула (19)) выводим

$$\int_{\mathbf{R}^n} t_jt_k\, d\gamma_C(t_1, \ldots, t_n) = c_{jk} \quad (1 \leqslant j, k \leqslant n). \tag{26}$$

Из предложения 5 п. 5 получаем формулу

$$u(\gamma_C) = \gamma_{UCtU}, \tag{27}$$

где u — линейное отображение $\mathbf{R}^n$ в $\mathbf{R}^m$ с матрицей U. Кроме того, легко видеть (ср. начало доказательства предл. 4 п. 5), что

если I_n — единичная матрица порядка n, то мера γ_{I_n} имеет плотность

$$(2\pi)^{-n/2}\exp\left(-\frac{1}{2}(t_1^2+\ldots+t_n^2)\right)$$

относительно меры Лебега λ_n на $\mathbf{R}^n$.

Мы покажем, что если матрица C обратима, с обратной матрицей $D=(d_{jk})$, то

$$d\gamma_C(t_1,\ldots,t_n)=$$

$$=(2\pi)^{-n/2}(\det D)^{1/2}\left(\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n}d_{jk}t_jt_k\right)\right)dt_1\ldots dt_n. \quad (28)$$

В самом деле, если C обратима, то квадратичная форма q на $\mathbf{R}^n$, определяемая соотношением

$$q(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{j,k=1}^{n}c_{jk}x_jx_k,$$

невырождена. Используя существование базиса в $\mathbf{R}^n$, ортонормированного относительно q, доказываем существование такой квадратной матрицы U порядка n, что $C=U\cdot{}^tU$, откуда в силу (27) $\gamma_C=u(\gamma_{I_n})$ (через u обозначен автоморфизм $\mathbf{R}^n$ с матрицей U). Пусть Q — квадратичная форма:

$$Q(t_1,\ldots,t_n)=t_1^2+\ldots+t_n^2;$$

имеем

$$\gamma_{I_n}=(2\pi)^{-n/2}e^{-Q/2}\lambda_n,$$

откуда

$$u(\gamma_{I_n})=(2\pi)^{-n/2}e^{-(Q\circ u^{-1})/2}u(\lambda_n). \quad (29)$$

Очевидно, что квадратичная форма $Q\circ u^{-1}$ на $\mathbf{R}^n$ принимает значение $\sum_{j,k=1}^{n}d_{jk}t_jt_k$ в точке $(t_1,\ldots,t_n)$, и предложение 15 гл. VII, § 1, п. 10 показывает, что

$$u(\lambda_n)=(\det U)^{-1}\lambda_n=(\det D)^{1/2}\lambda_n. \quad (30)$$

Отсюда следует формула (28).

7. *Мера Винера*

В этом пункте мы будем обозначать через T интервал $]0,1]$ из $\mathbf{R}$, а через $\mathscr{H}$ — гильбертово пространство действительных функций, интегрируемых с квадратом относительно меры Лебега

на T; через $(f \mid g)$ обозначается скалярное произведение. Обозначим также через $\mathscr{C}$ пространство непрерывных действительных функций на T, стремящихся к 0 в точке 0; $\mathscr{C}$ наделено нормой $\| f \| = \sup_{t \in T} | f(t) |$. Компактный интервал $[0, 1] = T \cup \{0\}$ есть компактификация Александрова локально компактного, но не компактного интервала T; следовательно, множество непрерывных функций на T с компактным носителем плотно в $\mathscr{C}$, и сопряженное к $\mathscr{C}$ отождествляется с пространством $\mathscr{M}^1$ ограниченных (не обязательно положительных) мер на T (гл. III (2-е изд.), § 1, п 8, опр. 3).

Для любой функции $f \in \mathscr{H}$ определим функцию Pf на T формулой

$$(Pf)(t) = \int_0^t f(x)\, dx = (f \mid I_t), \tag{31}$$

где I_t — характеристическая функция интервала $]0, t]$. Неравенство Коши — Шварца влечет неравенства

$$| (Pf)(t) | \leqslant \| f \|_2 t^{1/2}, \tag{32}$$

$$| (Pf)(t) - (Pf)(t') | \leqslant \| f \|_2 | t - t' |^{1/2}; \tag{33}$$

стало быть, Pf принадлежит $\mathscr{C}$, и линейное отображение P пространства $\mathscr{H}$ в $\mathscr{C}$ непрерывно и имеет норму $\leqslant 1$.

Отождествим гильбертово пространство $\mathscr{H}$ с его сопряженным (Топ. векст. пр-ва, гл. V, § 1, п. 6. теорема 3) и обозначим через $\Pi: \mathscr{M}^1 \to \mathscr{H}$ транспонированное к отображению $P: \mathscr{H} \to \mathscr{C}$. Для любой меры $\mu \in \mathscr{M}^1$ и любой функции $f \in \mathscr{H}$ в силу теоремы Лебега — Фубини имеем

$$(\Pi\mu \mid f) = \mu(Pf) = \int_T d\mu(t) \int_T I_t(x) f(x)\, dx = \int_T f(x)\, dx \int_T I_t(x)\, d\mu(t).$$

Но

$$I_t(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 < x \leqslant t \leqslant 1, \\ 0 & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

отсюда окончательно получаем

$$(\Pi\mu)(x) = \mu([x, 1]) \quad \text{для} \quad x \in T. \tag{34}$$

Пусть μ, $\nu \in \mathscr{M}^1$. Тогда

$$(\Pi\mu \mid \Pi\nu) = \int_T \Pi\mu(x)\,\Pi\nu(x)\,dx =$$

$$= \int_T dx \int_T I_t(x)\,d\mu(t) \int_T I_{t'}(x)\,d\nu(t') =$$

$$= \int_T \int_T d\mu(t)\,d\nu(t') \int_T I_t(x)\,I_{t'}(x)\,dx.$$

Но $I_t \cdot I_{t'}$ есть характеристическая функция интервала $]0, t] \cap]0, t']$; отсюда сразу вытекает, что

$$\int_T I_t(x)\,I_{t'}(x)\,dx = \inf(t, t'). \tag{35}$$

Из этого заключаем, что

$$(\Pi\mu \mid \Pi\nu) = \int_T \int_T \inf(t, t')\,d\mu(t)\,d\nu(t'). \tag{36}$$

Полученный результат позволяет определить положительную квадратичную форму W на $\mathscr{M}^1$ формулой

$$W(\mu) = \int_T \int_T \inf(t, t')\,d\mu(t)\,d\mu(t') = \|\Pi\mu\|_2^2. \tag{37}$$

В частности, если $t_1, \ldots, t_n$ — элементы из T, а $c_1, \ldots, c_n$ — действительные числа, то

$$W\Big(\sum_{j=1}^n c_j \varepsilon_{t_j}\Big) = \sum_{j,\,k=1}^n c_j c_k \inf(t_j, t_k); \tag{38}$$

но так как W положительна, функция $(t, t') \mapsto \inf(t, t')$ есть ядро положительного типа на T.

Теорема 1 (Винер). *Пусть w — образ при отображении $P : \mathscr{H} \to \mathscr{C}$ канонической гауссовой промеры на гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$. Тогда w есть гауссова мера с вариацией W на $\mathscr{C}$.*

По построению имеем $W(\mu) = \|{}^tP(\mu)\|_2^2$; предложение 5 п. 5 показывает, что w есть гауссова промера с вариацией W. Остается доказать, что w есть мера на $\mathscr{C}$.

А) *Построение вспомогательного пространства с мерой* (Ω, m).

Для любого целого $n \geqslant 0$ обозначим через D_n множество чисел вида $k/2^n$ с $k = 1, 2, 3, \ldots, 2^n$. Положим $D = \bigcup_{n \geqslant 0} D_n$ (множест-

во двоичных дробей, содержащихся в T) и $\Omega = \mathbf{R}^D$. Для любого $t \in D$ через $X(t)$ обозначим линейную форму $f \mapsto f(t)$ на Ω.

Для $t, t' \in D$ положим $M(t, t') = \inf(t, t')$; ясно, что M — ядро положительного типа на D. А поскольку D счетно, то можно определить гауссову *меру* m на Ω с ковариацией M (п. 6, пример 2).

Лемма 3. *Для любых t, t' из D*

$$\int_\Omega \left| X\left(\frac{t+t'}{2}\right) - \frac{X(t)+X(t')}{2} \right|^3 dm = \frac{1}{(8\pi)^{1/2}} |t-t'|^{3/2}.$$

Отметим, что $(t + t')/2$ принадлежит D. Известно (п. 6, пример 2), что семейство $(X(t))_{t\in D}$ есть базис топологического сопряженного Ω' к Ω; значит, существует симметрическая билинейная форма $\hat{M}$ на $\Omega' \times \Omega'$, характеризуемая соотношением $\hat{M}(X(t), X(t')) = \inf(t, t')$. По построению, вариация гауссовой меры m на Ω есть квадратичная форма $\xi \mapsto \hat{M}(\xi, \xi)$ на Ω'. Положим, в частности,

$$\xi = X\left(\frac{t+t'}{2}\right) - \frac{X(t)+X(t')}{2}; \tag{39}$$

простое вычисление дает

$$\hat{M}(\xi, \xi) = \frac{|t-t'|}{4}. \tag{40}$$

Согласно предложению 6 п. 5 (формула (16))

$$\int_\Omega |\xi|^3 dm = \pi^{-1/2} 2^{3/2} \Gamma(2) \hat{M}(\xi, \xi)^{3/2}, \tag{41}$$

и лемма сразу же вытекает из формул (40), (41).

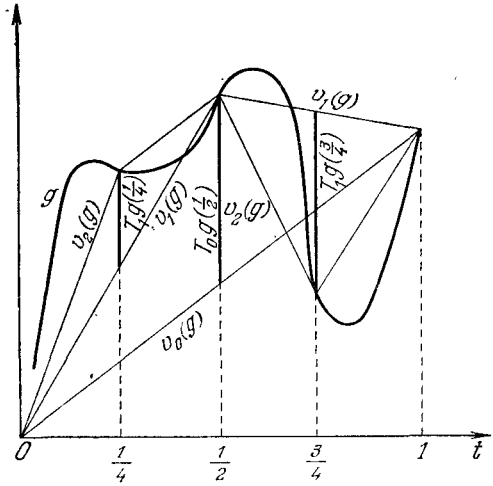
B) *Построение отображения и пространства Ω в $\mathscr{C}$.*

Для любого целого $n \geqslant 0$ обозначим через E_n подпространство из $\mathscr{C}$, состоящее из функций, аффинных на каждом из интервалов $[(k-1)/2^n, k/2^n]$ для $1 \leqslant k \leqslant 2^n$. Аффинная функция на компактном интервале I из $\mathbf{R}$ достигает своих граней на концах интервала I; следовательно,

$$\|f\| = \sup_{1\leqslant k\leqslant 2^n} \left| f\left(\frac{k}{2^n}\right) \right| \tag{42}$$

для $f \in E_n$.

Для любой функции $g \in \Omega$ и любого целого $n \geqslant 0$ существует, и притом единственная, функция $u_n(g)$, принадлежащая E_n



и совпадающая с g в каждой точке из D_n; положим $T_n g = u_{n+1}(g) - u_n(g)$. Так как D_n конечно, то отображение T_n пространства Ω в $\mathscr{C}$ непрерывно, и значит, m-измеримо.

Лемма 4. *Для любого целого* $n \geqslant 0$

$$\int_\Omega \| T_n g \|^3 \, dm(g) \leqslant \frac{1}{(8\pi)^{1/2}} 2^{-n/2}. \tag{43}$$

Пусть $g \in \Omega$ и $n \in \mathbf{N}$. Имеем $E_n \subset E_{n+1}$; следовательно, функция $T_n g$ принадлежит E_{n+1} и обращается в нуль в каждой точке из D_n; стало быть, в силу (42)

$$\| T_n g \|^3 = \sup_{1 \leqslant k \leqslant 2^n} \left| T_n g \left(\frac{2k-1}{2^{n+1}} \right) \right|^3 = \sum_{k=1}^{2^n} \left| T_n g \left(\frac{2k-1}{2^{n+1}} \right) \right|^3. \tag{44}$$

Примем соглашение $g(0) = 0$. Построение $u_n(g)$ линейной интерполяцией g влечет соотношения

$$T_n g \left(\frac{2k-1}{2^{n+1}} \right) = g \left(\frac{2k-1}{2^{n+1}} \right) - \frac{1}{2} \left(g \left(\frac{k-1}{2^n} \right) + g \left(\frac{k}{2^n} \right) \right) \tag{45}$$

для $1 \leqslant k \leqslant 2^n$. Отсюда интегрированием получаем

$$\int_\Omega \left| T_n g \left(\frac{2k-1}{2^{n+1}} \right) \right|^3 dm(g) =$$

$$= \int_\Omega \left| X \left(\frac{2k-1}{2^{n+1}} \right) - \frac{1}{2} \left(X \left(\frac{k-1}{2^n} \right) + X \left(\frac{k}{2^n} \right) \right) \right|^3 dm;$$

теперь можно применить лемму 3 с

$$t=\frac{k-1}{2^n},\qquad t'=\frac{k}{2^n},$$

откуда

$$\int_{\Omega}\left|T_n g\left(\frac{2k-1}{2^{n+1}}\right)\right|^3=\frac{1}{(8\pi)^{1/2}}2^{-3n/2}. \tag{46}$$

Тогда в силу (44)

$$\int_{\Omega}\|T_n g\|^3\,dm(g)\leqslant\sum_{k=1}^{2^n}\int_{\Omega}\left|T_n g\left(\frac{2k-1}{2^{n+1}}\right)\right|^3 dm(g)=\frac{1}{(8\pi)^{1/2}}2^n\cdot 2^{-3n/2};$$

лемма доказана.

В силу леммы 4 отображение T_n пространства Ω в банахово пространство $\mathscr{C}$ принадлежит $L^3_{\mathscr{C}}(\Omega, m)$ и

$$N_3(T_n)\leqslant\frac{1}{(8\pi)^{1/6}}(2^{-1/6})^n,$$

откуда

$$\sum_{n=0}^{\infty}N_3(T_n)<+\infty.$$

Согласно предложению 6 гл. IV (2-е изд.), § 3, п. 3, найдется такое множество $\Omega_0\subset\Omega$, что $\Omega-\Omega_0$ m-пренебрежимо и что ряд $\sum_{n=0}^{\infty}T_n(g)$ абсолютно сходится на $\mathscr{C}$ для любого $g\in\Omega_0$. Определим теперь m-измеримое отображение u пространства Ω в $\mathscr{C}$ формулой

$$u(g)=\begin{cases}\sum_{n=0}^{\infty}T_n g=\lim_{n\to\infty}u_n(g) & \text{для } g\in\Omega_0,\\ 0 & \text{для } g\in\Omega-\Omega_0.\end{cases} \tag{47}$$

Так как $u_n(g)$ и g совпадают на $D_m\subset D_n$ для $0\leqslant m\leqslant n$, то очевидно, что сужение $u(g)$ на D равно g для любого $g\in\Omega_0$.

C) *Построение гауссовой меры на* $\mathscr{C}$.

Пусть w' — ограниченная мера на $\mathscr{C}$, являющаяся образом меры m при m-измеримом отображении $u:\Omega\to\mathscr{C}$. Мы покажем, что w' есть гауссова мера на $\mathscr{C}$ с вариацией W, и отсюда получим $w=w'$. Обозначим через $\mathscr{D}$ векторное подпространство из $\mathscr{M}^1$, порожденное мерами ε_t для t, пробегающего D.

Лемма 5. *Для любой меры* $\mu \in \mathscr{D}$

$$\int_{\mathscr{C}} e^{i\langle f,\,\mu\rangle}\,dw'(f) = e^{-W(\mu)/2}. \tag{48}$$

Положим $\mu = c_1\varepsilon_{t_1} + c_2\varepsilon_{t_2} + \ldots + c_n\varepsilon_{t_n}$ с $t_1, \ldots, t_n$ из D и $c_1, \ldots, c_n$ из $\mathbf{R}$. Для любого $g \in \Omega_0$ функция $u(g)$ совпадает с g на D; следовательно,

$$\langle u(g),\,\mu\rangle = \sum_{j=1}^{n} c_j g(t_j) \qquad (g \in \Omega_0). \tag{49}$$

Имеем также

$$W(\mu) = \sum_{j,\,k=1}^{n} c_j c_k \inf(t_j,\,t_k), \tag{50}$$

а так как m — гауссова мера на Ω с ковариацией M и $\Omega - \Omega_0$ m-пренебрежимо, то

$$\int_{\Omega} \exp\Big(i\sum_{j=1}^{n} c_j g(t_j)\Big)\,dm(g) = \exp\Big(-\frac{1}{2}\sum_{j,\,k=1}^{n} c_j c_k \inf(t_j,\,t_k)\Big). \tag{51}$$

Но $\Omega - \Omega_0$ m-пренебрежимо и $w' = u(m)$; отсюда получаем

$$\int_{\mathscr{C}} e^{i\langle f,\,\mu\rangle}\,dw'(f) = \int_{\Omega_0} e^{i\langle u(g),\,\mu\rangle}\,dm(g). \tag{52}$$

Формула (48) сразу же вытекает из формул (49) — (52).

Лемма 6. *Пусть* $\mu \in \mathscr{M}^1$. *Существует последовательность таких мер* $\mu_n \in \mathscr{D}$, *что* $\mu(f) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu_n(f)$ *для любой* $f \in \mathscr{C}$, *и* $W(\mu) = \lim\limits_{n\to\infty} W(\mu_n)$.

Пусть $I = [0,\,1]$. Пространство $\mathscr{M}^1$ ограниченных мер на $T =]0,\,1]$ будет отождествлено с подпространством из $\mathscr{M}(I)$, состоящим из мер, наделяющих 0 массой нуль. Наделим $\mathscr{M}(I)$ широкой топологией. Отображение $t \mapsto \varepsilon_t$ интервала I в $\mathscr{M}(I)$ непрерывно (гл. II (2-е изд.), § 1, п. 9, предл. 13); а поскольку D плотно в I, то замыкание $\overline{\mathscr{D}}$ множества $\mathscr{D}$ содержит все точечные меры. Пусть A — множество таких мер $\nu \in \mathscr{D}$, что $\|\nu\| \leqslant \|\mu\|$; мера μ является точкой прикосновения множества A (гл. III (2-е изд.), § 2, п. 4, следствие 1 из теоремы 1). Множество A относительно компактно в $\mathscr{M}(I)$ (гл. III (2-е изд.), § 1, п. 9, предл. 15), и компактные подмножества из $\mathscr{M}(I)$ метризуемы (Топ. вект.

пр-ва, гл. IV, § 5, п. 1, предл. 2 и Общая топ., гл. X (2-е изд.), § 3, п. 3, теорема 1). Стало быть, существует последовательность мер $\mu_n \in A$, сходящаяся к μ в $\mathscr{M}(I)$. А поскольку $\mathscr{C}$ отождествляется с подпространством непрерывных функций на I, обращающихся в нуль в начале, то $\mu(f) = \lim_{n\to\infty} \mu_n(f)$ для любой $f \in \mathscr{C}$. Кроме того, так как $\mathscr{C}(I) \otimes \mathscr{C}(I)$ плотно в нормированном пространстве $\mathscr{C}(I \times I)$ (гл. III (2-е изд.), § 4, п. 1, лемма 1), то из соотношений $\lim_{n\to\infty} \mu_n = \mu$ и $\| \mu_n \| \leqslant \| \mu \|$ следует, что $\lim_{n\to\infty} (\mu_n \otimes \mu_n) = \mu \otimes \mu$ (гл. III (2-е изд.), § 1, п. 10, предл. 17); поскольку меры μ_n и μ наделяют 0 нулевой массой, то

$$W(\mu_n) = \int_I \int_I \inf(t, t')\, d\mu_n(t)\, d\mu_n(t'),$$

$$W(\mu) = \int_I \int_I \inf(t, t')\, d\mu(t)\, d\mu(t'),$$

откуда $\lim_{n\to\infty} W(\mu_n) = W(\mu)$.

Остается показать, что преобразование Фурье меры w' равно $e^{-W/2}$. Пусть $\mu \in \mathscr{M}^1$; выберем меры $\mu_n \in \mathscr{D}$, как в лемме 6. Мера w' ограничена и $| e^{i\langle f, \mu_n\rangle} | = 1$ для любого n; из леммы 5 и теоремы сходимости Лебега (гл. IV (2-е изд.), § 4, п. 3, теорема 2) получаем теперь

$$\int_{\mathscr{C}} e^{i\langle f, \mu\rangle}\, dw'(f) = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathscr{C}} e^{i\langle f, \mu_n\rangle}\, dw'(f) = \lim_{n\to\infty} e^{-W(\mu_n)/2} = e^{-W(\mu)/2}.$$

Лемма доказана.

Мера w на $\mathscr{C}$, преобразование Фурье которой равно $e^{-W/2}$, называется *мерой Винера на* $\mathscr{C}$.

Замечание. Для любого полуоткрытого интервала $J =]a, b]$, содержащегося в T, положим $l(J) = b - a$ (длина J) и обозначим через A_J линейную форму $f \mapsto f(b) - f(a)$ на $\mathscr{C}$. Можно показать, что мера Винера характеризуется следующим свойством.

Пусть $J_1, \ldots, J_n$ — полуоткрытые интервалы, содержащиеся в T и попарно не пересекающиеся. Образ меры w при линейном отображении $f \mapsto (A_{J_1}(f), \ldots, A_{J_n}(f))$ пространства $\mathscr{C}$ в $\mathbf{R}^n$ равен $\gamma_{a_1} \otimes \ldots \otimes \gamma_{a_n}$ с $a_i = l(J_i)^{1/2}$ для $1 \leqslant i \leqslant n$.

8. *Непрерывность преобразования Фурье*

Предложение 8. *Пусть E — локально выпуклое пространство, μ — промера на E и Φ — преобразование Фурье промеры μ. Справедливы неравенства*

$$|\Phi(x')| \leqslant \Phi(0), \tag{53}$$

$$|\Phi(x') - \Phi(y')|^2 \leqslant 2\Phi(0)(\Phi(0) - \operatorname{Re}\Phi(x'-y')), \tag{54}$$

для x', y' из E'.

Формула (5) п. 3 позволяет свести все к случаю, когда E конечномерно и μ есть мера. Имеем

$$|\Phi(x')| = \left|\int_E e^{i\langle x, x'\rangle}\, d\mu(x)\right| \leqslant \int_E |e^{i\langle x, x'\rangle}|\, d\mu(x) = \int_E d\mu(x) = \Phi(0),$$

откуда следует (53). Кроме того, если a и b — действительные числа, то

$$|e^{ia} - e^{ib}|^2 = |e^{ib}|^2 |e^{i(a-b)} - 1|^2 =$$

$$= (e^{i(a-b)} - 1)(e^{-i(a-b)} - 1) = 2 - 2\cos(a-b);$$

в силу неравенства Коши — Шварца получаем поэтому

$$|\Phi(x') - \Phi(y')|^2 = \left|\int_E (e^{i\langle x, x'\rangle} - e^{i\langle x, y'\rangle})\, d\mu(x)\right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \int_E |e^{i\langle x, x'\rangle} - e^{i\langle x, y'\rangle}|^2\, d\mu(x) \int_E 1^2\, d\mu(x) =$$

$$= \int_E (2 - 2\cos\langle x, x'-y'\rangle)\, d\mu(x) \cdot \Phi(0) =$$

$$= 2\Phi(0)(\Phi(0) - \operatorname{Re}\Phi(x'-y')),$$

откуда следует (54).

Следствие. *Пусть E' наделено топологией, согласующейся со структурой векторного пространства. Для того чтобы Φ было непрерывно, необходимо и достаточно, чтобы его действительная часть* Re Φ *была непрерывна в начале, и тогда Φ равномерно непрерывно.*

Это вытекает из неравенства (54).

Пусть F — локально выпуклое пространство. Наделим сопряженное F' к F топологией, согласующейся с двойственностью между F и F', и отождествим F с сопряженным к F'. Следователь-

но, преобразование Фурье ограниченной меры μ на F' есть функция $\mathcal{F}\mu$ на F, определяемая равенством

$$(\mathcal{F}\mu)(x) = \int_{F'} e^{i\langle x, x'\rangle}\, d\mu(x').$$

Предложение 9. *Если F бочечно, то преобразование Фурье всякой ограниченной меры на F' есть равномерно непрерывная функция на F.*

Пусть μ — ограниченная мера на F'_t и Φ — ее преобразование Фурье. И пусть $\varepsilon > 0$. Найдется такое компактное подмножество K из F', что $\mu(F' - K) \leqslant \varepsilon$. Но K компактно в слабой топологии $\sigma(F', F)$, и значит, равностепенно непрерывно, поскольку F бочечно (Топ. вект. пр-ва, гл. IV, § 2, п. 2, теорема 1). Следовательно, найдется симметричная окрестность U точки 0 в F, поляра U^0 которой содержит K. Пусть $x \in \varepsilon U$; имеем

$$\Phi(0) - \operatorname{Re}\Phi(x) = \int_{F'} (1 - \cos\langle x, x'\rangle)\, d\mu(x').$$

Но $0 \leqslant 1 - \cos\langle x, x'\rangle \leqslant 2$ для любого $x' \in F' - K$ и

$$1 - \cos\langle x, x'\rangle \leqslant \frac{1}{2}\langle x, x'\rangle^2 \leqslant \frac{\varepsilon^2}{2}$$

для $x' \in K \subset U^0$; отсюда получаем

$$0 \leqslant \Phi(0) - \operatorname{Re}\Phi(x) \leqslant 2\mu(F' - K) + \frac{\varepsilon^2}{2}\mu(K) \leqslant 2\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2}\mu(F').$$

Правая часть этого неравенства стремится к 0 вместе с ε; значит, Re Φ непрерывно в 0, и предложение вытекает из следствия к предложению 8.

9. *Лемма Минлоса*

Пусть T — конечномерное векторное пространство и μ — ограниченная мера на T'; мы отождествляем T с сопряженным к T', так что преобразование Фурье Φ меры μ есть функция на T. Предположим, что заданы две положительные квадратичные формы h и q на T и число $\varepsilon > 0$. Для любого действительного числа $r > 0$ обозначим через C_r множество тех $x' \in T'$, для которых $\langle x, x'\rangle^2 \leqslant r^2 h(x)$ для любого $x \in T$.

Предложение 10. *В предположении, что* $\Phi(0) - \operatorname{Re}\Phi \leqslant \varepsilon + q$, *справедливо неравенство*

$$\mu(T' - C_r) \leqslant 3(\varepsilon + r^{-2} \operatorname{Tr}(q/h)) \tag{55}$$

для любого $r > 0$.

Через $\operatorname{Tr}(q/h)$ обозначается след q относительно h (ср. Добавление, п. 1). Формула (55) тривиальна в случае бесконечного $\operatorname{Tr}(q/h)$. Далее будем предполагать $\operatorname{Tr}(q/h)$ конечным, и значит, $h(x) = 0$ влечет $q(x) = 0$ для любого $x \in T$.

Пусть $a_1, \ldots, a_n$ — элементы из T и D — множество тех $x' \in T'$, для которых $\sum_{j=1}^{n} \langle a_j, x'\rangle^2 > 1$. Для любого действительного $t \geqslant 0$ имеем $3(1 - e^{-t/2}) \geqslant 0$, а для $t > 1$ имеем

$$3(1-e^{-t/2}) \geqslant 3(1-e^{-1/2}) \geqslant 3\left(1-\left(\frac{9}{4}\right)^{-1/2}\right) = 1,$$

так как $e > 9/4$. Применяя эти неравенства к $t = \sum_{j=1}^{n} \langle a_j, x'\rangle^2$, получаем

$$\mu(D) \leqslant 3 \int_{T'} \left(1 - \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \langle a_j, x'\rangle^2\right)\right) d\mu(x'). \tag{56}$$

Пусть γ — мера на $\mathbf{R}$ с плотностью $t \mapsto (2\pi)^{-1/2} e^{-t^2/2}$ относительно меры Лебега. В силу леммы 2 п. 4 имеем

$$\int_{\mathbf{R}} e^{iut}\, d\gamma(t) = e^{-u^2/2}$$

для любого действительного u. Следовательно,

$$1 - \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{j=1} \langle a_j, x'\rangle^2\right) =$$

$$= \int \ldots \int \left(1 - \exp\left(i \sum_{j=1}^{n} \langle a_j, x'\rangle t_j\right)\right) d\gamma(t_1) \ldots d\gamma(t_n) \tag{57}$$

для любого $x' \in T'$. Подынтегральная функция от $x', t_1, \ldots, t_n$ в правой части непрерывна и мажорирована по модулю числом 2, а меры μ и γ ограничены; стало быть, можно проинтегрировать обе части формулы (57) относительно $d\mu(x')$ и переставить местами

интегрирование относительно μ и γ; получаем

$$\int_{T'} \left(1-\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\langle a_j, x'\rangle^2\right)\right) d\mu(x') =$$

$$= \int \dots \int \left(\Phi(0) - \Phi\left(\sum_{j=1}^{n} t_j a_j\right)\right) d\gamma(t_1) \dots d\gamma(t_n). \quad (58)$$

Поскольку q — квадратичная форма на T, то найдутся такие действительные числа q_{jk}, что

$$q\left(\sum_{j=1}^{n} t_j a_j\right) = \sum_{j,k} q_{jk} t_j t_k$$

для действительных $t_1, \dots, t_n$; в частности, $q_{jj} = q(a_j)$ для $1 \leqslant j \leqslant n$. Кроме того, интеграл $\int_{\mathbf{R}} t^n d\gamma(t)$ равен соответственно 1, 0, 1 для $n = 0, 1, 2$ (п. 4, лемма 1). Отсюда получаем

$$\int \dots \int \left(\varepsilon + q\left(\sum_{j=1}^{n} t_j a_j\right)\right) d\gamma(t_1) \dots d\gamma(t_n) = \varepsilon + \sum_{j=1}^{n} q(a_j). \quad (59)$$

Итак, левая часть формулы (58) и $\Phi(0)$ — действительные числа; стало быть, можно в правой части (58) заменить Φ на $\operatorname{Re}\Phi$. Тогда из неравенства $\Phi(0) - \operatorname{Re}\Phi \leqslant \varepsilon + q$ и из формул (56), (58) и (59) выводим

$$\mu(D) \leqslant 3\left(\varepsilon + \sum_{j=1}^{n} q(a_j)\right). \quad (60)$$

Зафиксируем $r > 0$. Так как квадратичная форма h положительна, то найдется такой базис $(e_1, \dots, e_n)$ в T и такое целое m между 0 и n, что

$$h\left(\sum_{j=1}^{n} t_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{m} t_j^2$$

для действительных $t_1, \dots, t_n$ (Добавление, п. 1, предл. 2). Теперь очевидно, что C_r состоит из таких $x' \in T'$, для которых

$$\sum_{j=1}^{m} \langle e_j, x'\rangle^2 \leqslant r^2, \qquad \sum_{j=m+1}^{n} \langle e_j, x'\rangle^2 = 0.$$

Пусть для любого целого $l \geqslant 1$ через D_l обозначено множество $x' \in T'$, удовлетворяющих неравенству

$$\sum_{j=1}^{m} \langle r^{-1}e_j, x'\rangle^2 + \sum_{j=m+1}^{n} \langle le_j, x'\rangle^2 > 1.$$

Легко видеть, что последовательность $(D_l)_{l\geqslant 1}$ возрастает и в объединении дает множество $T' - C_r$, откуда

$$\mu(T' - C_r) = \lim_{l\to\infty} \mu(D_l). \tag{61}$$

Но в силу (60)

$$\mu(D_l) \leqslant 3\left(\varepsilon + \sum_{j=1}^{m} r^{-2}q(e_j) + \sum_{j=m+1}^{n} l^2 q(e_j)\right); \tag{62}$$

для $j = m+1, \ldots, n$ имеем $h(e_j) = 0$, и значит, $q(e_j) = 0$. Кроме того, $\mathrm{Tr}(q/h) = \sum_{j=1}^{m} q(e_j)$ (Добавление, п. 1, предл. 2). Соотношение (55) следует теперь из (61) и (62).

10. *Меры на сопряженном к ядерному пространству*

Пусть F — локально выпуклое пространство. Пусть $\mathscr{T}_s$ — слабая топология $\sigma(F', F)$ в F' и $\mathscr{T}_c$ — топология равномерной сходимости на выпуклых компактных подмножествах из F. Согласно теореме Макки (Топ. вект. пр-ва, гл. IV, § 2, п. 3, теорема 2) топологии $\mathscr{T}_s$ и $\mathscr{T}_c$ в F' согласуются с двойственностью между F и F'; стало быть, то же самое имеет место для любой локально выпуклой топологии $\mathscr{T}$ в F', промежуточной между $\mathscr{T}_s$ и $\mathscr{T}_c$. Если $\mathscr{T}$ — такая топология и если $F'_{\mathscr{T}}$ означает пространство F', наделенное $\mathscr{T}$, то F отождествляется с сопряженным к $F'_{\mathscr{T}}$. Следовательно, промеры на F' будут одними и теми же для всех топологий $\mathscr{T}$ указанного типа, и если μ — такая промера, то ее преобразование Фурье есть функция на F.

Топологией Сазонова в F называется локально выпуклая топология $\mathscr{S}$, определенная посредством непрерывных полунорм N, удовлетворяющих следующему условию: *N^2 есть положительная квадратичная форма на F и существует такая непрерывная положительная квадратичная форма H на F, что* $\mathrm{Tr}(N^2/H) < +\infty$. Топология $\mathscr{S}$ мажорируется топологией, заданной в F; говорят,

что F — *ядерное* пространство, если эти топологии совпадают. Этот класс пространств позднее будет детально изучен.

Теорема 2. (Минлос). *Пусть F — локально выпуклое пространство, $\mathscr{T}$ — локально выпуклая топология в F', промежуточная между $\mathscr{T}_s$ и $\mathscr{T}_c$, и μ — промера на $F_{\mathscr{T}}$. Предположим, что преобразование Фурье промеры μ непрерывно на F в топологии Сазонова. Тогда μ есть мера на $F'_{\mathscr{T}}$.*

Пусть $\varepsilon > 0$. Так как Φ непрерывно в топологии Сазонова в F, то существуют такие непрерывные положительные квадратичные формы Q и H на F, что $\operatorname{Tr}(Q/H) < +\infty$ и что

$$\Phi(0) - \operatorname{Re}\Phi(x) \leqslant \varepsilon/6$$

для любого $x \in F$, в котором $Q(x) \leqslant 1$. В силу предложения 8 п. 8 для любого $x \in F$ имеем $|\operatorname{Re}\Phi(x)| \leqslant \Phi(0)$, откуда

$$\Phi(0) - \operatorname{Re}\Phi(x) \leqslant \varepsilon/6 + 2\Phi(0)\,Q(x) \tag{63}$$

для любого $x \in F$.

Положим $r = (12\Phi(0)\operatorname{Tr}(Q/H)\varepsilon^{-1})^{1/2}$ и обозначим через K множество тех $x' \in F'_{\mathscr{T}}$, в которых $\langle x, x'\rangle^2 \leqslant r^2 H(x)$ для любого $x \in F$. Поскольку $H^{1/2}$ — непрерывная полунорма на F, то множество K равностепенно непрерывно и замкнуто в $F'_{\mathscr{T}}$; стало быть, оно компактно в силу теоремы Асколи (Общая топ., гл. X (2-е изд.), § 2, п. 5, следствие 1 из теоремы 2).

Пусть V — замкнутое векторное подпространство из $F_{\mathscr{T}}$ конечной коразмерности; тогда V ортогонально конечномерному подпространству T из F. Пусть мера μ_V на T' есть образ промеры μ на $F'_{\mathscr{T}}$ при отображении p_V, транспонированном к канонической инъекции T в F; ее преобразование Фурье есть сужение Φ на T. Наконец, по теореме Хана — Банаха (Топ. вект. пр-ва, гл. II (2-е изд.), § 3, п. 2, следствие 1 из теоремы 1), $p_V(K)$ равно множеству C_r тех $x' \in T'$, в которых $\langle x, x'\rangle^2 \leqslant r^2 H(x)$ для любого $x \in T$. В силу неравенства (63) можно применить предложение 10 п. 9 к мере μ_V на T', взяв в качестве q сужение $2\Phi(0)\,Q$ на T, а в качестве h — сужение H на T. Имеем $\operatorname{Tr}(q/h) \leqslant 2\Phi(0)\operatorname{Tr}(Q/H)$, откуда

$$\mu_V(T' - C_r) \leqslant 3\left(\frac{\varepsilon}{6} + 2\Phi(0)\operatorname{Tr}(Q/H)\,r^{-2}\right) = \varepsilon.$$

Так как отображение p_V определяет при факторизации изоморфизм $F'_{\mathscr{T}}/V$ на T', то предложение 1 п. 1 показывает, что μ есть мера на $F'_{\mathscr{T}}$.

Следствие. *Пусть F — ядерное бочечное пространство, $\mathscr{T}$ — локально выпуклая топология, промежуточная между $\mathscr{T}_s$ и $\mathscr{T}_c$ в F', μ — промера на $F'_{\mathscr{T}}$ и Φ — преобразование Фурье промеры μ. Для того чтобы μ была мерой, необходимо и достаточно, чтобы Φ было непрерывно на F.*

Необходимость следует из предложения 9 п. 8, а достаточность из теоремы 2.

Замечание. Пусть F — бочечное пространство и $\mathscr{T}$ — локально выпуклая топология в F', промежуточная между $\mathscr{T}_s$ и $\mathscr{T}_c$. Всякое подмножество из F', компактное в топологии $\mathscr{T}$, компактно и в менее сильной топологии $\mathscr{T}_s$. Обратно, пусть K — подмножество из F', компактное в $\mathscr{T}_s$. Так как F бочечно, то K равностепенно непрерывно (Топ. вект. пр-ва, гл. IV, § 2, п. 2, теорема 1); но в силу теоремы Асколи всякое равностепенно непрерывное подмножество из F' относительно компактно в топологии $\mathscr{T}_c$ и тем более в топологии $\mathscr{T}$, и значит, K содержится в подмножестве из F', компактном в топологии $\mathscr{T}$. Из этого нетрудно заключить, что тождественное отображение $F'_{\mathscr{T}}$ на $F'_{\mathscr{T}_s}$ определяет биекцию между множествами мер этих двух пространств.

11. Меры на гильбертовом пространстве

Пусть E — действительное гильбертово пространство со скалярным произведением $(x \mid y)$ Существует изоморфизм j пространства E на его сопряженное E', характеризующийся формулой $\langle x, j(y)\rangle = (x \mid y)$ для x, y из E (Топ. вект. пр-ва, гл. V, § 1, п. 6, теорема 3). Мы отождествим E и E' посредством j. Стало быть, преобразование Фурье промеры μ на E есть функция $\mathscr{F}\mu$ на E; в случае, когда μ есть мера, имеем

$$(\mathscr{F}\mu)(x) = \int_E e^{i(x|y)}\, d\mu(y) \qquad (x \in E). \tag{64}$$

Теорема 2 (Прохоров — Сазонов). *Пусть E — гильбертово пространство и E_s — пространство E, наделенное ослабленной топологией. Пусть μ — промера на E и Φ — ее преобразование Фурье. Следующие условия эквивалентны:*

a) *Функция* Φ *непрерывна на* E *в топологии Сазонова.*

b) *Для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такая ядерная положительная квадратичная форма* Q *на* E, *что* $\Phi(0) - \operatorname{Re}\Phi \leqslant \varepsilon + Q$.

c) *Промера* μ *есть мера на* E_s.

b) $\Rightarrow$ a): это следует из предложения 8 п. 8 (ср. неравенство (54)).

a) $\Rightarrow$ c): это следует из теоремы 2 п. 10.

c) $\Rightarrow$ b): предположим, что μ есть мера на E_s. И пусть $\varepsilon > 0$. Для любого целого $n \geqslant 1$ множество B_n элементов $x \in E$ с нормой $\leqslant n$ есть замкнутое подмножество из E_s, и $E = \bigcup\limits_{n \geqslant 1} B_n$. Стало быть, найдется такое целое $n \geqslant 1$, что $\mu(E - B_n) \leqslant \varepsilon/2$. Формула

$$Q(x) = \frac{1}{2} \int\limits_{B_n} (x \mid y)^2 \, d\mu(y) \tag{65}$$

определяет положительную квадратичную форму Q на E. Положим $C = \frac{n^2}{2} \mu(B_n)$. Если $(e_1, \ldots, e_p)$ — конечная ортонормированная последовательность в E, то в силу неравенства Бесселя имеем

$$\sum_{j=1}^{p} (e_j \mid y)^2 \leqslant \| y \|^2 \leqslant n^2$$

для любого $y \in B_n$. В результате интегрирования получаем

$$\sum_{j=1}^{p} Q(e_j) = \frac{1}{2} \int\limits_{B_n} \sum_{j=1}^{p} (e_j \mid y)^2 \, d\mu(y) \leqslant \frac{n^2}{2} \mu(B_n) = C,$$

и значит, форма Q ядерна.

Кроме того, $1 - \cos t \leqslant \inf(2, t^2/2)$ для любого действительного t, откуда

$$\Phi(0) - \operatorname{Re}\Phi(x) = \int\limits_E (1 - \cos(x \mid y)) \, d\mu(y) \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{B_n} \frac{1}{2} (x \mid y)^2 \, d\mu(y) + \int\limits_{E - B_n} 2 \, d\mu(y) = Q(x) + \varepsilon$$

для любого $x \in E$. Стало быть, b) выполнено.

Следствие 1. *Пусть* E_1 *и* E_2 — *гильбертовы пространства,* u — *отображение Гильберта — Шмидта* E_1 *в* E_2 *и* μ — *промера на* E_1. *Предположим, что преобразование Фурье* Φ *промеры* μ *непрерывно на* E_1. *Тогда промера* $\nu = u(\mu)$ *есть мера на* E_2, *наделенном слабой топологией.*

При отождествлении E_1 и E_2 с их сопряженными, введенном в этом пункте, преобразование Фурье для ν равно $\Phi \circ u^*$, где u^* — сопряженное к u. Но u^* есть отображение Гильберта — Шмидта E_2 в E_1 (Добавление, п. 2), и значит, квадратичная форма $y \mapsto \|u^*(y)\|^2$ на E_2 является ядерной. Стало быть, если обозначить через $(E_2)_{\mathscr{S}}$ пространство E_2, наделенное топологией Сазонова, то u^* будет непрерывным линейным отображением $(E_2)_{\mathscr{S}}$ в E_1 и $\mathscr{F}\nu = \Phi \circ u^*$ непрерывно на $(E_2)_{\mathscr{S}}$; тогда теорема 3 показывает, что ν есть мера на E_2, наделенном слабой топологией

Следствие 2. *Пусть Q — ядерная положительная квадратичная форма на гильбертовом пространстве E. Гауссова промера Γ_Q с вариацией Q на E есть мера на E_s.*

Преобразование Фурье Φ промеры Γ_Q равно $e^{-Q/2}$. Но $e^t \geqslant 1 + t$ для любого действительного t, откуда $\Phi(0) - \operatorname{Re}\Phi \leqslant Q/2$; стало быть, условие b) теоремы 3 выполнено, и Γ_Q есть мера на E_s.

Замечания. 1) Пусть E — гильбертово пространство, E_s — пространство E, наделенное слабой топологией, и j — тождественное отображение E в E_s. Известно, что j определяет биекцию множества промер на E на соответствующее множество на E_s. Кроме того, если E — пространство счетного типа, то оно есть польское пространство, и j определяет биекцию множества ограниченных мер на E на множество ограниченных мер на E_s (§ 3, п. 3, замечание); можно показать (теорема Филлипса), что эта теорема выполняется, если E не является пространством счетного типа. Следовательно, теорема 3 дает нам критерии того, чтобы промера на E была мерой.

2) Можно показать (Добавление, упр. 7b)), что топология Сазонова на гильбертовом пространстве E определяется посредством полунорм типа $Q^{1/2}$, где Q — *ядерная* положительная квадратичная форма на E.

*12. Связи с функциями положительного типа

Определение 3. *Пусть G — группа. Комплекснозначная функция Φ на G называется функцией положительного типа, если выполняются неравенства*

$$\sum_{j,k=1}^{p} c_j \bar{c}_k \Phi(x_j x_k^{-1}) \geqslant 0 \tag{66}$$

для любых $x_1, \ldots, x_p$ из G и любых комплексных $c_1, \ldots, c_p$.

Это понятие будет позже изучено более детально.

Предложение 11. *Пусть E — конечномерное векторное пространство, μ — (положительная) ограниченная мера на E и Φ — преобразование Фурье меры μ. Функция Φ непрерывна на E' и является функцией положительного типа.*

Непрерывность Φ вытекает из предложения 9 п. 8.

Покажем, что Φ — функция положительного типа. Пусть $x'_1, \ldots, x'_p$ принадлежат E', а $c_1, \ldots, c_p$ — комплексные числа. Имеем

$$\sum_{j,k} c_j \bar{c}_k \Phi(x'_j - x'_k) = \int_E \sum_{j,k} c_j \bar{c}_k e^{i\langle x, x'_j - x'_k\rangle}\, d\mu(x) =$$

$$= \int_E \left| \sum_{j=1}^{p} c_j e^{i\langle x, x'_j\rangle} \right|^2 d\mu(x) \geqslant 0.$$

Можно доказать обратное утверждение, известное как *теорема Бохнера*: всякая непрерывная функция положительного типа на E' есть преобразование Фурье некоторой (положительной) ограниченной меры *). Мы будем пользоваться этим результатом в оставшейся части п. 12.

Теорема 4. *Пусть E — локально выпуклое пространство. Преобразование Фурье есть биекция множества промер на E на множество функций положительного типа на E', сужение которых на всякое конечномерное подпространство непрерывно.*

Известно (п. 3, предл. 3), что преобразование Фурье инъективно. Пусть $\mu = (\mu_V)_{V \in \mathscr{F}(E)}$ — промера на E и Φ — ее преобразование Фурье. Пусть, далее, T — конечномерное подпространство из E' и пусть V ортогонально к T в E. Можно отождествить T с сопряженным к E/V; сужение Φ_T преобразования Φ на T есть преобразование Фурье ограниченной меры μ_V на E/V. В силу предложения 11 Φ_T непрерывно и является функцией положительного типа на T. Ввиду произвольности T ясно, что Φ есть функция положительного типа на E'.

Обратно, пусть Φ — функция положительного типа на E', сужение которой на любое конечномерное подпространство из E непрерывно. Для любого $V \in \mathscr{F}(E)$ отождествим сопряженное

*) Этот вопрос будет изучен в книге «Спектральная теория». По поводу этой тематики читатель может обратиться также к книге Люмиса «Абстрактный гармонический анализ».

к E/V с ортогональным подпространством V^0 к V в E'; сужение Φ_V преобразования Φ на V^0 непрерывно и является функцией положительного типа, и стало быть, в силу теоремы Бохнера существует (положительная) ограниченная мера μ_V на E/V, преобразованием Фурье которой будет Φ_V. Пусть V и W принадлежат $\mathscr{F}(E)$ и $W \subset V$, и пусть p_{VW} — каноническое отображение E/W на E/V; при сделанных отождествлениях ${}^t p_{VW}$ есть инъекция V^0 в W^0. Тогда, согласно формуле (4) п. 3,

$$\mathscr{F}(p_{VW}(\mu_W)) = (\mathscr{F}\mu_W) \circ {}^t p_{VW} = \Phi_W \circ {}^t p_{VW} = \Phi_V = \mathscr{F}\mu_V,$$

откуда $p_{VW}(\mu_W) = \mu_V$ в силу предложения 3 п. 3. Следовательно, семейство $\mu = (\mu_V)_{V \in \mathscr{F}(E)}$ есть промера на E; ясно, что Φ есть преобразование Фурье промеры μ.

Следствие. *Пусть F — ядерное бочечное пространство; наделим F' локально выпуклой топологией $\mathscr{T}$, промежуточной между слабой топологией $\sigma(F', F)$ и топологией равномерной сходимости на компактных выпуклых подмножествах из F. Преобразование Фурье есть биекция множества (положительных) ограниченных мер на F' на множество непрерывных функций положительного типа на F.*

* Это вытекает сразу же из теоремы 4 и следствия из теоремы 2 п. 10.*

Упражнения

°1. Для любого компактного интервала K из $\mathbf{R}$ через $\mathscr{C}(K)$ обозначим векторное пространство непрерывных функций на K, наделенное топологией равномерной сходимости; через $\mathscr{D}(K)$ обозначим векторное пространство действительных бесконечно дифференцируемых функций на $\mathbf{R}$, обращающихся в нуль вне K. Пусть $\mathscr{D}(K)$ наделено слабейшей топологией, относительно которой непрерывны отображения $f \mapsto D^p f \mid K$ для любого положительного целого p (D есть оператор дифференцирования). Пусть $\mathscr{D} = \bigcup_K \mathscr{D}(K)$ — пространство, наделенное локально выпуклой топологией — индуктивным пределом топологий подпространств $\mathscr{D}(K)$.

а) Для любого целого $p \geqslant 0$ и любой функции $f \in \mathscr{D}(K)$ положим $Q_p(f) = \int_K (D^p f(x))^2\, dx$. Показать, что Q_p есть положительная квадратичная форма на $\mathscr{D}(K)$, что последовательность норм $Q_p^{1/2}$ определяет топологию в $\mathscr{D}(K)$ и что $\mathrm{Tr}(Q_{p+1}/Q_p)$ конечно при

любом $p \geqslant 0$. (Пусть I_t для любого действительного t — характеристическая функция интервала $[t, +\infty[$; используя формулу $D^p f(t) = \int_K D^{p+1} f\, I_t\, dx$ и неравенство Бесселя, доказать, что $\sum_{i=1}^{n} Q_p(f_i) \leqslant l^2$ для любой конечной последовательности $f_1, \ldots, f_n$ функций из $\mathscr{D}(K)$, ортонормированных относительно Q_{p+1}, где l есть длина интервала K.) Вывести отсюда, что $\mathscr{D}(K)$ — ядерное пространство.

b) Доказать, что $\mathscr{D}$ — ядерное пространство. (Вначале доказать существование ненулевой функции в $\mathscr{D}$, откуда вывести существование такой функции $h \geqslant 0$ в $\mathscr{D}$, что $\sum_{n \in \mathbf{Z}} h(x - n) = 1$ для любого $x \in \mathbf{R}$. Пусть K — такой компактный интервал из $\mathbf{R}$, что h обращается в нуль вне K; для любого целого n положим $h_n(x) = h(x - n)$ и $K_n = K + n$. Пусть V — выпуклая окрестность 0 в $\mathscr{D}$; найдутся такие положительные целые p_n, что всякая функция $f \in \mathscr{D}(K_n)$, удовлетворяющая неравенству $Q_{p_n}(f) \leqslant 1$, принадлежит V. Определить непрерывные квадратичные формы Q и R на $\mathscr{D}$ соотношениями $Q(f) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} 2^{2n} Q_{p_n}(f \cdot h_n)$ и $R(f) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} 2^{3n} Q_{p_n+1}(f \cdot h_n)$; показать, что V содержит множество таких $f \in \mathscr{D}$, что $Q(f) \leqslant 1$ и $\mathrm{Tr}(R/Q)$ конечно.)

*c) Обобщить предыдущее на бесконечно дифференцируемые функции на $\mathbf{R}^n$ с компактным носителем. *

Добавление. Дополнения о гильбертовых пространствах

1. *След одной квадратичной формы относительно другой*

В этом пункте через E обозначается действительное векторное пространство, а через Q, H — положительные квадратичные формы на E. Существуют симметрические билинейные формы $(x, y) \mapsto (x \mid y)_Q$ и $(x, y) \mapsto (x \mid y)_H$, характеризуемые равенствами

$$Q(x) = (x \mid x)_Q, \quad H(x) = (x \mid x)_H$$

для любого $x \in E$.

Следом Q относительно H называется, и обозначается $\mathrm{Tr}(Q/H)$, положительное конечное или бесконечное действительное число, определяемое следующим образом.

a) Если найдется такое $x \in E$, что $H(x) = 0$, а $Q(x) \neq 0$, то полагаем $\mathrm{Tr}(Q / H) = +\infty$.

b) В противном случае $\mathrm{Tr}\,(Q/H)$ есть верхняя грань множества чисел вида $\sum_{i=1}^{p} Q(e_i)$, где $(e_1, \ldots, e_p)$ пробегает множество конечных последовательностей элементов из E, ортонормированных относительно H.

Пусть E — действительно гильбертово пространство и Q — положительная квадратичная форма на E. Положим $H(x) = \| x \|^2$ для любого $x \in E$; тогда H есть положительная квадратичная форма на E. Говорят, что Q — *ядерная* форма, если $\mathrm{Tr}\,(Q/H)$ конечно. Для любого $x \in E$ с нормой 1 имеем $Q(x) \leqslant \mathrm{Tr}\,(Q/H)$, откуда $Q \leqslant \mathrm{Tr}\,(Q/H) \cdot H$; в частности, всякая ядерная форма Q непрерывна.

Замечания. 1) Для любого подпространства F из E обозначим через Q_F сужение Q на F, а через H_F — сужение H на F. Имеем $\mathrm{Tr}\,(Q_F/H_F) \leqslant \mathrm{Tr}\,(Q/H)$, и $\mathrm{Tr}\,(Q/H)$ есть верхняя грань чисел $\mathrm{Tr}\,(Q_F/H_F)$ по конечномерному $F \subset E$.

2) Пусть E_1 — действительное векторное пространство, Q_1 и H_1 — положительные квадратичные формы на E_1 и π: $E \longrightarrow E_1$ — сюръективное линейное отображение. Если $Q = Q_1 \circ \pi$ и $H = H_1 \circ \pi$, то $\mathrm{Tr}\,(Q/H) = \mathrm{Tr}\,(Q_1/H_1)$.

Предложение 1. *Предположим, что E конечномерно, а H невырождена.*

a) *Существует эндоморфизм u пространства E, характеризуемый равенством $(x \mid y)_Q = (u(x) \mid y)_H$ для x, y из E.*

b) $\mathrm{Tr}\,(Q/H) = \mathrm{Tr}\,(u)$.

c) $\mathrm{Tr}\,(Q/H) = \sum_{i=1}^{m} Q(e_i)$ *для любого базиса $(e_1, \ldots, e_m)$ в E, ортонормированного относительно H.*

a) следует из того, что билинейная форма $(x, y) \mapsto (x \mid y)_H$ невырождена. Всякая ортонормированная относительно H последовательность в E может быть дополнена до базиса пространства E, ортонормированного относительно H. Следовательно, $\mathrm{Tr}\,(Q/H)$ есть верхняя грань множества чисел вида $\sum_{i=1}^{m} Q(e_i)$ для всех базисов $(e_1, \ldots, e_m)$ в E, ортонормированных относительно H. Для доказательства b) и c) достаточно показать, что $\sum_{i=1}^{m} Q(e_i) = \mathrm{Tr}\,(u)$ для любого базиса этого типа.

Положим $a_{ij} = (u(e_i) \mid e_j)_H = (e_i \mid e_j)_Q$ для $1 \leqslant i,\ j \leqslant m$; имеем $u(e_i) \sum_{j=1}^{m} a_{ij} e_j$ для $1 \leqslant i \leqslant m$, откуда

$$\mathrm{Tr}(u) = \sum_{i=1}^{m} a_{ii} = \sum_{i=1}^{m} (e_i \mid e_i)_Q = \sum_{i=1}^{m} Q(e_i).$$

Предложение 2. *Предположим, что E конечномерно. Найдутся такой базис $(e_1, \ldots, e_n)$ в E и такое целое m, $0 \leqslant m \leqslant n$, что*

$$H\left(\sum_{i=1}^{n} t_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{m} t_i^2 \tag{1}$$

для действительных $t_1, \ldots, t_n$. Если при этом соотношение $H(x) = 0$ влечет $Q(x) = 0$ для любого $x \in E$, то $\mathrm{Tr}(Q/H) = \sum_{i=1}^{m} Q(e_i)$.

Существует ортогональный базис $(e_1', \ldots, e_n')$ пространства E относительно H. Можно предположить, что этот базис занумерован так, что $H(e_i') > 0$ для $1 \leqslant i \leqslant m$ и $H(e_i') = 0$ для $m < i \leqslant n$. Тогда положим $e_i = e_i'/H(e_i')^{1/2}$ для $1 \leqslant i \leqslant m$ и $e_i = e_i'$ для $m < i \leqslant n$; соотношение (1) при этом выполняется.

Пусть F — подпространство из E, порожденное элементами $e_{m+1}', \ldots, e_n'$; F есть множество тех $x \in E$, для которых $H(x) = 0$. Обозначим через π каноническое отображение E на $E_1 = E/F$. Так как Q и H обращаются в нуль на F, то существуют такие положительные квадратичные формы Q_1 и H_1 на E_1, что $Q = Q_1 \circ \pi$ и $H = H_1 \circ \pi$. Кроме того, $(\pi(e_1), \ldots, \pi(e_m))$ есть базис пространства E_1, ортонормированный относительно H_1, и значит, H_1 невырождена.

Согласно предложению 1 и замечанию 2 имеем

$$\mathrm{Tr}(Q/H) = \mathrm{Tr}(Q_1/H_1) = \sum_{i=1}^{m} Q_1(\pi(e_i)) = \sum_{i=1}^{m} Q(e_i).$$

Замечание 3) Предположим, что E конечномерно и H невырождена. Пусть $(e_1, \ldots, e_n)$ — базис в E. Положим $q = ((e_i \mid e_j)_Q)_{1 \leqslant i,\ j \leqslant n}$ и $h = ((e_i \mid e_j)_H)_{1 \leqslant i,\ j \leqslant n}$. В обозначениях предложения 1 матрица отображения u в базисе $(e_1, \ldots, e_n)$ равна $h^{-1}q$, откуда

$$\mathrm{Tr}(Q/H) = \mathrm{Tr}(h^{-1}q) = \mathrm{Tr}(gh^{-1}). \tag{2}$$

2. *Отображение Гильберта—Шмидта*

Пусть E — действительное гильбертово пространство со скалярным произведением $(x \mid y)$. Существует изометрия j_E пространства E на его сопряженное, характеризуемая формулой

$$(x \mid y) = \langle x, j_E(y) \rangle \text{ для } x, y \in E \tag{3}$$

(Топ. вект. пр-ва, гл. V, § 1, п. 6, теорема 3).

Пусть E_1, E_2 — действительные гильбертовы пространства и u — непрерывное линейное отображение E_1 в E_2. *Сопряженным к* u называется непрерывное линейное отображение $u^* = j_{E_1}^{-1} \circ {}^t u \circ j_{E_2}$ пространства E_2 в E_1. Отображение u^* характеризуется соотношением

$$(u(x_1) \mid x_2) = (x_1 \mid u^*(x_2)) \text{ для } x_1 \in E_1,\ x_2 \in E_2. \tag{4}$$

Если v — непрерывное линейное отображение E_2 в гильбертово пространство E_3, то $(v \circ u)^* = u^* \circ v^*$.

Пусть E_1, E_2 — действительные гильбертовы пространства и u — линейное отображение E_1 в E_2. Определим на E_1 положительные квадратичные формы H и Q при помощи равенств

$$H(x) = \| x \|^2,\ Q(x) = \| u(x) \|^2 \qquad (x \in E_1)$$

Предложение 3. *Предположим, что u непрерывно. Пусть $(e_i)_{i \in I}$ — ортонормированный базис в E_1 и $(f_j)_{j \in J}$ — ортонормированный базис в E_2. Справедливы соотношения*

$$\operatorname{Tr}(Q/H) = \sum_{i \in I} \| u(e_i) \|^2 = \sum_{j \in J} \| u^*(f_j) \|^2 = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} (u(e_i) \mid f_j)^2.$$

Для любого $x \in E_1$ имеем $\| x \|^2 = \sum_{i \in I} (x \mid e_i)^2$, и точно так же, $\| y \|^2 = \sum_{j \in J} (y \mid f_j)^2$ для любого $y \in E_2$. Следовательно,

$$\sum_{i \in I} \| u(e_i) \|^2 = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} (u(e_i) \mid f_j)^2 = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} (e_i \mid u^*(f_j))^2 = \sum_{j \in J} \| u^*(f_j) \|^2.$$

В частности, число $\sum_{i \in I} \| u(e_i) \|^2$ зависит только от ортонормированного базиса $(e_i)_{i \in I}$ пространства E_1.

Положим $t = \operatorname{Tr}(Q/H)$. Для любого конечного подмножества $I' \subset I$ по определению имеем

$$\sum_{i \in I'} \| u(e_i) \|^2 = \sum_{i \in I'} Q(e_i) \leqslant t,$$

откуда $\sum_{i\in I} \| u(e_i) \|^2 \leqslant t$. Пусть $(e'_1, \ldots, e'_\rho)$ — конечная ортонормированная последовательность в E. Ее можно дополнить до ортонормированного базиса $(e'_\alpha)_{\alpha\in A}$ пространства E_1. Тогда

$$\sum_{\alpha=1}^{\rho} \| u(e'_\alpha) \|^2 \leqslant \sum_{\alpha\in A} \| u(e'_\alpha) \|^2 = \sum_{i\in I} \| u(e_i) \|^2,$$

и переходя к верхней грани по $(e'_1, \ldots, e'_\rho)$, получаем неравенство $t \leqslant \sum_{i\in I} \|u(e_i)\|^2$. Таким образом, доказано равенство $t = \sum_{i\in I} \|u(e_i)\|^2$.

Будем говорить, что u есть *отображение Гильберта — Шмидта* пространства E_1 в E_2, если положительная квадратичная форма $Q : x \mapsto \| u(x) \|^2$ на E_1 является ядерной. Если это так, то $Q \leqslant \mathrm{Tr}\,(Q/H)\cdot H$, и значит, u непрерывна и

$$\| u \| \leqslant \mathrm{Tr}\,(Q/H)^{1/2}.$$

Пусть $u : E_1 \to E_2$ — непрерывное линейное отображение. Согласно предложению 3 u есть отображение Гильберта — Шмидта в том и только том случае, если существует такой ортонормированный базис $(e_i)_{i\in I}$ в E_1, что $\sum_{i\in I} \| u(e_i) \|^2 < +\infty$. Если это так, то всякий ортонормированный базис в E_1 обладает тем же свойством. Кроме того, если u — отображение Гильберта — Шмидта, то то же самое верно и для его сопряженного u^*, в силу формулы $\sum_{i\in I} \| u(e_i) \|^2 = \sum_{j\in J} \|u^*(f_j)\|^2$ (предл. 3).

Упражнения

1) Пусть E — конечномерное векторное пространство над коммутативным полем характеристики $\neq 2$. Обозначим через H невырожденную квадратичную форму на E, а через S — такую симметрическую билинейную форму на $E \times E$, что $H(x) = S(x, x)$ для любого $x \in E$. И пусть Q — квадратичная форма на E.

a) Существует эндоморфизм u пространства E, характеризуемый соотношениями $Q(x) = S(u(x), x)$ и $S(u(x), y) = S(x, u(y))$ при любых x, y из E. Положим $\mathrm{Tr}\,(Q/H) = \mathrm{Tr}\,(u)$.

b) Обобщить замечание 3 п. 1.

c) Если $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$ — ортонормированный относительно H базис в E, то $\mathrm{Tr}\,(Q/H) = \sum_{i=1}^{m} Q(e_i)$.

2) Пусть E — действительное гильбертово пространство, Q — непрерывная положительная квадратичная форма на E и H — квадратичная форма $x \longmapsto \| x \|^2$ на E.

а) Показать, что $\mathrm{Tr}\,(Q/H) = \sum_{i \in I} Q(e_i)$ для любого ортонормированного базиса $(e_i)_{i \in I}$ в E. (Пусть $(a_1, \ldots, a_p)$ — конечное ортонормированное семейство в E; для любого $\varepsilon > 0$ найдутся конечное подмножество $J \subset I$ и элементы $a'_1, \ldots, a'_p$, являющиеся линейными комбинациями e_i для $i \in J$, такие, что $\| a_j - a'_j \| < \varepsilon$ для $1 \leqslant j \leqslant p$; имеем

$$\sum_{j=1}^{p} Q(a'_j) \leqslant \sum_{j \in J} Q(e_j) \leqslant \sum_{i \in I} Q(e_i).$$

Вывести отсюда, что $\sum_{j=1}^{p} Q(a_j) \leqslant \sum_{i \in I} Q(e_i)$.)

b) Получить из а) новое доказательство предложения 3.

c) Пусть E_0 — плотное векторное подпространство из E, Q_0 (соотв. H_0) — сужение Q (соотв. H) на E_0. Показать, что $\mathrm{Tr}\,(Q/H) = \mathrm{Tr}(Q_0/H_0)$. (Пусть $(e_1, \ldots, e_n)$ — линейно независимая последовательность из E, порождающая подпространство F. Обозначим через Q_F (соотв. H_F) сужение Q (соотв. H) на F. Показать, используя замечание 3 п. 1, что $\mathrm{Tr}\,(Q_F/H_F)$ есть непрерывная функция от $(e_1, \ldots, e_n)$.)

3) Пусть E, F — действительные векторные пространства и u — линейное отображение E в F; если Q и H — такие положительные квадратичные формы на F, что $H(x) = 0$ влечет $Q(x) = 0$ для любого $x \in F$, то $\mathrm{Tr}\,(Q \circ u/H \circ u) \leqslant \mathrm{Tr}\,(Q/H)$.

4) Пусть I — некоторое множество и $l^2(I)$ — векторное пространство таких семейств $\mathbf{x} = (x_i)_{i \in I}$ действительных чисел, что $\sum_{i \in I} x_i^2$ конечно. Пусть $(\lambda_i)_{i \in I}$ — суммируемое семейство положительных чисел. Для любого $\mathbf{x}$ из $l^2(I)$ полагаем $Q(\mathbf{x}) = \sum_{i \in I} \lambda_i x_i^2$ и $H(\mathbf{x}) = \sum_{i \in I} x_i^2$. Показать, что $\mathrm{Tr}\,(Q/H) = \sum_{i \in I} \lambda_i$. (Использовать упр. 2а).)

5) Пусть E — действительное векторное пространство, $(\lambda_i)_{i \in I}$ — суммируемое семейство положительных чисел и $(y_i)_{i \in I}$ — семейство линейных форм на E. Для любого $x \in E$ полагаем $H(x) = \sum_{i \in I} \langle x, y_i \rangle^2$ и $Q(x) = \sum_{i \in I} \lambda_i \langle x, y_i \rangle^2$; предположим, что $H(x)$ конечно при любом $x \in E$. Показать, что $Q(x)$ конечно при любом $x \in E$, что Q и H — положительные квадратичные формы на E и что $\mathrm{Tr}\,(Q/H) \leqslant \sum_{i \in I} \lambda_i$. (Положить $u(x) = (\langle x, y_i \rangle)_{i \in I}$ и применить упр. 3 к линейному отображению uE в $l^2(I)$.)

6) Пусть E — действительное векторное пространство, Q, H и H_0 — положительные квадратичные формы на E. Предположим, что $H \leqslant aH_0$, где a — положительное действительное число. Доказать, что $\mathrm{Tr}\,(Q/H_0) \leqslant a \cdot \mathrm{Tr}\,(Q/H)$. (Свести все к случаю, когда E конечномерно, воспользовавшись замечанием 1 п. 1, а затем при помощи предл. 1 завершить доказательство, используя существование ортогонального базиса в E одновременно относительно H и H_0.)

7) Пусть E — действительное гильбертово пространство. Показать, что топология Сазонова на E определяется при помощи множества полунорм $Q^{1/2}$, где Q пробегает множество ядерных положительных квадратичных форм на E. (Использовать упр. 6.)

8) Пусть E и F — действительные гильбертовы пространства. В $E \otimes F$ существует такая структура отделимого предгильбертова пространства, что $(x_1 \otimes y_1 \mid x_2 \otimes y_2) = (x_1 \mid x_2) \cdot (y_1 \mid y_2)$ для x_1, x_2 из E и y_1, y_2 из F. Обозначим через $E \otimes_2 F$ гильбертово пространство, полученное из $E \otimes F$ пополнением.

a) Если E' (соотв. F') — замкнутое векторное подпространство из E (соотв. F), то показать, что $E' \otimes_2 F'$ отождествляется с замкнутым векторным подпространством из $E \otimes_2 F$, порожденным такими элементами $x \otimes y$, что $x \in E'$, $y \in F'$.

b) Предположим, что E (соотв. F) есть гильбертова сумма семейства $(E_\alpha)_{\alpha \in A}$ (соотв. $(F_\beta)_{\beta \in B}$) замкнутых векторных подпространств. Показать, что $E \otimes_2 F$ есть гильбертова сумма семейства $(E_\alpha \otimes_2 F_\beta)_{(\alpha,\, \beta) \in A \times B}$ замкнутых векторных подпространств.

c) Если $(e_i)_{i \in I}$ (соотв. $(f_j)_{j \in J}$ — ортонормированный базис в E (соотв. в F), то семейство $(e_i \otimes f_j)_{(i,\, j) \in I \times J}$ есть ортонормированный базис в $E \otimes_2 F$.

d) Пусть G — действительное гильбертово пространство. Определить канонические изоморфизмы $E \otimes_2 F$ на $F \otimes_2 E$ и $(E \otimes_2 F) \otimes_2 G$ на $E \otimes_2 (F \otimes_2 G)$.

e) Пусть E_1 и F_1 — действительные гильбертовы пространства и $u\colon E \longrightarrow E_1$, $v\colon F \longrightarrow F_1$ — непрерывные линейные отображения. Показать, что $u \otimes v$ продолжается по непрерывности до непрерывного линейного отображения $u \otimes_2 v$ пространства $E \otimes_2 F$ в $E_1 \otimes_2 F_1$ и что $\| u \otimes_2 v \| = \| u \| \cdot \| v \|$.

9) Пусть E и F — действительные гильбертовы пространства.

a) Показать, что существует непрерывное линейное отображение φ пространства $E \otimes_2 F$ в $\mathscr{L}(E; F)$, характеризуемое соотношением $\varphi(x \otimes y)(x') = (x \mid x') \cdot y$ для x, x' из E и y из F. Показать, что φ имеет норму 1 и что $\varphi(E \otimes F)$ есть множество непрерывных линейных отображений конечного ранга пространства E в F.

b) Показать, что φ есть биекция $E \otimes_2 F$ на множество $HS(E, F)$ линейных отображений Гильберта — Шмидта пространства E в F (использовать упр. 8c) и предл. 3). Пусть $HS(E, F)$ наделено струк-

турой гильбертова пространства, полученной из структуры пространства $E \otimes_2 F$ при биекции φ; соответствующая норма обозначается $\| u \|_2$. Пусть $u \in HS(E, F)$; определим положительные квадратичные формы Q_u и H на E как $Q_u(x) = \| u(x) \|^2$ и $H(x) = \| x \|^2$. Показать, что $\| u \|_2^2 = \mathrm{Tr}(Q_u/H)$.

c) Пусть E_1 и F_1 — действительные гильбертовы пространства и u: $E_1 \longrightarrow E$, v: $F \longrightarrow F_1$ — непрерывные линейные отображения. Пусть φ_1 — изоморфизм $E_1 \otimes_2 F_1$ на $HS(E_1, F_1)$, определенный аналогично φ. Показать, что $v \circ \varphi(t) \circ u = \varphi_1((u^* \otimes v)(t))$ для любого $t \in E \otimes_2 F$. Вывести отсюда, что для любого отображения Гильберта — Шмидта w пространства E в F линейное отображение $v \circ w \circ u$ пространства E_1 в F_1 есть отображение Гильберта — Шмидта и что $\| v \circ w \circ u \|_2 \leqslant \leqslant \| v \| \cdot \| w \|_2 \cdot \| u \|$.

ИСТОРИЧЕСКИЙ ОЧЕРК

К ГЛАВЕ IX

(Римские цифры отсылают к библиографии, помещенной в конце этого очерка)

Если изучение связей между топологией и теорией меры восходит к началам современной теории функций действительного переменного, то лишь совсем недавно интегрирование в отделимых топологических пространствах встало на повестку дня во всей общности. Прежде чем перейти к истории работ, предшествовавших современному синтезу, мы напомним некоторые этапы в развитии идей, касающихся взаимодействия между топологией и мерой.

Для Лебега не стоял вопрос о том, интегрировать функции одной или нескольких действительных переменных. В 1913 г. Радон определил общие меры на $\mathbf{R}^n$ и соответствующие интегралы; эта теория, изложенная подробно в работе (I) Ш. Валле Пуссена, опирается существенным образом на топологические свойства евклидовых пространств. Несколько позже Радона, в 1915 г., Фреше определил в (IIa) «абстрактные» меры на множестве, с выделенной в нем σ-алгеброй подмножеств, и интегралы относительно этих мер; он отмечает, что можно установить таким образом основные результаты теории Лебега, не пользуясь топологическими средствами. Это положение подтверждается следующими его словами, взятыми из введения к работе (IIб) (первая часть): «Когда, например, в бесконечномерном пространстве, где различные приложения анализа приводят к различным не эквивалентным определениям сходящейся последовательности, заменяют одно определение другим, то ничто не меняется в свойствах аддитивных семейств и функций множеств в этих пространствах». Исследования Фреше были дополнены Каратеодори, которому принадлежит важная теорема о продолжении функции множества до меры. В концентрированном виде изложение этой точки зрения содержится в начале книги Сакса (III).

Открытие меры Хаара на локально компактных группах (ср. Исторический очерк к гл. VII и VIII) и многочисленные приложения, которые она сразу же получила, а затем работы Вейля и Гельфанда по гармоническому анализу привели к 1940 г. к глубокому изменению в этой точке зрения: в этом круге вопросов удобнее всего рассматривать меру как линейную форму на пространстве непрерывных функций. Этот метод требует сужения на ком-

пактные или локально компактные пространства, но это не может быть помехой подавляющему большинству приложений; наиболее замечательно, что введение гармонического анализа на p-адических группах и группах аделей Ж. Тейтом и А. Вейлем позволило ощутимым образом обновить аналитическую теорию чисел.

И совсем в другом направлении возникает необходимость расширения этой точки зрения при рассмотрении мер на топологических пространствах, не являющихся локально компактными: теория вероятностей неуклонно приводит к изучению таких пространств и дает многочисленные нетривиальные примеры. Может быть, следует искать причину запоздалого влияния подобного развития на теорию меры в относительно изолированном положении теории вероятностей, остававшейся до последнего времени в стороне от традиционных математических дисциплин.

Меры на пространствах последовательностей. Одна из наиболее развитых ветвей классической теории вероятностей — та, которая содержит предельные теоремы (закон больших чисел, сходимость к закону Гаусса — Лапласа ...); речь идет об углублении понятия статистической регулярности, проявляющейся в явлениях, связанных с популяциями с очень большим числом знаков. Корректное математическое формулирование этих проблем требует введения мер на пространствах последовательностей; эти пространства, представляющие собой наиболее очевидное обобщение конечномерных пространств, явились предпочтительным объектом исследований общего анализа, которые были предприняты к 1920 г. Фреше, Леви, Лузиным. И не случайно, что Хинчин и Колмогоров, создатели новых методов теории вероятностей, оба были учениками Лузина и что Леви очень скоро обратился к вероятностным проблемам: эти проблемы служили пробным камнем для новых методов.

Первое неявное обращение к мере на пространствах последовательностей появилось в работе Э. Бореля 1909 г., посвященной счетным вероятностям (IV). Весьма оригинальная идея Бореля состояла в применении известных вероятностных результатов к доказательству свойств, которыми обладает десятичное разложение почти всех чисел, заключенных между 0 и 1. Это применение основано на следующем фундаментальном замечании: определим любое действительное число между 0 и 1 при помощи последовательности цифр его разложения в заданном базисе $q \geqslant 2$; при случайном последовательном выборе цифр некоторого числа x независимо друг от друга и с равной вероятностью $1/q$ для $0, 1, \ldots, q-1$ вероятность того, что x находится в некотором подмножестве интервала $[0, 1[$, равна длине этого интервала.

В 1923 г. Штейнгауз (V) строго доказал эти результаты и описал точную математическую модель неограниченной последовательности случайного выбора, рассмотренной Борелем: возьмем для простоты $q = 2$ и обозначим через I множество $\{0, 1\}$ из двух элементов; если наделить I мерой μ, определяемой как $\mu(0) = \mu(1) = 1/2$, то элементами пространства-произведения $I^{\mathbf{N}}$ будут служить последовательности $\varepsilon = (\varepsilon(n))_{n \in \mathbf{N}}$ чисел, равных 0

или 1, а отображение $\varphi\colon \varepsilon \mapsto \sum_{n\geqslant 0} \varepsilon(n)\cdot 2^{-n-1}$ будет, с точностью до счетного множества, биекцией $I^{\mathbf{N}}$ на интервал [0, 1]; при этом φ^{-1} переводит меру Лебега на [0, 1] в меру P на $I^{\mathbf{N}}$ — произведение мер μ на каждом из сомножителей. На самом деле Штейнгауз не располагал конструкцией мер-произведений; он использовал существование квазибиекции φ, чтобы *построить* меру P на $I^{\mathbf{N}}$, исходя из меры Лебега на [0, 1], а затем дал аксиоматическую характеристику меры P. Полученный таким образом изоморфизм позволяет перевести язык вероятностей на язык меры и применить известные теоремы об интеграле Лебега.

В той же работе Штейнгауз рассматривает случайный ряд $\sum_{n\geqslant 0} \sigma_n \cdot a_n$, где знаки $\sigma_n = \pm 1$ выбираются случайно, независимо друг от друга и с равной вероятностью 1/2; между 1928 и 1935 гг. он изучает другие многочисленные случайные ряды. Со своей стороны, Пэли, Винер и Зигмунд рассматривают случайные ряды Фурье [1]) вида $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp(2\pi i(nt + \Phi_n))$; «амплитуды» a_n фиксированы, а «фазы» Φ_n суть независимые случайные переменные, равномерно распределенные на [0, 1].

И если аналитические трудности сильно меняются от одной из этих проблем к другой, то перевод на язык теории меры будет во всех случаях один и тот же и представляет собой расширение случая, исследованного Борелем и Штейнгаузом; речь идет о построении меры на $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$, являющейся произведением семейства всех мер, каждая из которых тождественна одной и той же положительной мере μ с массой 1 на $\mathbf{R}$; например, случайные ряды Фурье, о которых только что говорилось, соответствуют случаю, когда μ есть мера Лебега на [0, 1].

Для построения таких мер-произведений можно использовать два метода. Первый есть прямой метод, предложенный впервые Даниелем (VIa) в 1918 г.; он был вновь предложен в 1934 г. Иессеном (VII), который детально изучил случай, когда μ есть мера Лебега на [0, 1]. Второй метод состоит в отыскании специальных приемов, аналогичных приему Штейнгауза, с тем чтобы свести все к мере Лебега на [0, 1]; этот способ действий выгоден своим удобством в том случае, когда не располагают полным изложением общей теории меры, ибо он позволяет использовать без нового доказательства теоремы Лебега [2]).

---

[1]) Относительно случайных рядов Фурье см. изложение Ж.-П. Кахана в «Seminaire Bourbaki» (n. 200, 12-e annè, 1959/60, Benjamin, New York).

[2]) Винер предпринимал также многочисленные попытки (ср., например, (XI), гл. IX) показать, что мера броуновского движения изоморфна мере Лебега на [0, 1]. Возможность таких приемов находит свое объяснение в общей теореме фон Неймана, которая дает аксиоматическую характеризацию мер, изоморфных мере Лебега на [0, 1].

Теория броуновского движения. Эта теория занимает в современной науке исключительное место тем, что она осуществляет постоянный и плодотворный обмен между проблемами физическими и чисто математическими. Изучение броуновского движения, открытого в 1829 г. ботаником Броуном, интенсивно проводилось в XIX веке многими физиками [3]), но первая удовлетворительная математическая модель была придумана Эйнштейном только в 1905 г. В простом случае частицы, перемещающейся вдоль прямой, основные гипотезы Эйнштейна формулируются следующим образом: если $x(t)$ — абсцисса частицы в момент t и если $t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n$, то последовательные перемещения $x(t_i) - x(t_{i-1})$ (для $1 \leqslant i \leqslant n$) суть независимые случайные гауссовы переменные. Мы не будем здесь говорить подробно о важных экспериментальных работах Ж. Перрена, подтверждавших теорию Эйнштейна; по нашему мнению, следует привести только одно замечание Перрена, свидетельствующее о том, что наблюдение траектории броуновского движения неуклонно вызывало в нем мысль о «математических функциях, не имеющих производной». Это замечание в дальнейшем послужило отправным толчком для Винера.

Совсем другое течение идей берет свое начало в кинетической теории газа, развитой между 1870 и 1900 гг. Больцманом и Гиббсом. Рассмотрим газ, состоящий из N молекул массы m с (абсолютной) температурой T, и обозначим через $v_1, \ldots, v_N$ скорости N молекул газа; кинетическая энергия системы равна

$$\frac{m}{2}(v_1^2 + \ldots + v_N^2) = 3NkT, \tag{1}$$

где k — константа Больцмана. Согласно идеям Гиббса, огромное число столкновений между молекулами не позволяет точно определить скорости молекул, и следует ввести закон вероятности P на сфере S пространства размерности $3N$, определяемый уравнением (1). «Микроканоническое» условие состоит в предположении, что P есть мера с массой 1, инвариантная относительно вращения сферы S. С другой стороны, закон скоростей Максвелла утверждает, что вероятностный закон составляющей скорости молекулы есть гауссова мера с вариацией $2kT/m$ (гл. IX, § 6, п. 5, замечание 3). По-видимому, Борель первый заметил в 1914 г., что закон Максвелла является следствием гипотез Гиббса и свойств сферы, когда число молекул очень велико. Он рассматривает сферу S в евклидовом пространстве большой размерности и меру P с массой 1, инвариантную относительно вращения на S; используя классические методы приближения, основанные на формуле Стирлинга, он показывает, что проекция P на ось координат является аппроксимативно гауссовой. Эти результаты были уточнены несколько позже Гато и Леви (IXa). Пусть заданы целое число $m \geqslant 1$ и число $r > 0$ и пусть $S_{m,r}$ — множество последовательностей вида

$$(x_1, \ldots, x_m, 0, 0, \ldots) \text{ с } x_1^2 + \ldots + x_m^2 = r^2;$$

[3]) Имеется весьма живое изложение этой истории в недавней работе Е. Нельсона (E. Nelson, Dynamical theory of the brownian movement, Math. Not., Princeton, 1967.

обозначим также через $\sigma_{m,r}$ меру с массой 1, инвариантную относительно вращения на $S_{m,r}$. В современной терминологии результат Гато и Леви формулируется следующим образом: последовательность мер $\sigma_{m,1}$ сходится узко к единичной массе в начале (0, 0, ...), а последовательность мер $\sigma_{m,\sqrt{m}}$ сходится узко к мере Г вида

$$d\Gamma(x_1, x_2, \ldots) = \prod_{n=1}^{\infty} d\gamma(x_n)$$

(γ есть гауссова мера с вариацией 1 на $\mathbf{R}$).

Указанная выше мера Г играет роль гауссовой меры, когда размерность бесконечна. Судя по всему, Леви смутно надеялся определить внутренним образом гауссову меру на любом бесконечномерном гильбертовом пространстве. В действительности, как показали Леви и Винер, мера Г инвариантна в некотором смысле [4]) относительно автоморфизмов пространства l^2, но к сожалению, множество l^2 последовательностей $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ с суммируемым квадратом имеет относительно Г меру нуль. В настоящее время известно, что можно ограничиться на бесконечномерном гильбертовом пространстве гауссовой промерой [5]).

Винеру принадлежит следующее существенное продвижение: если на бесконечномерном гильбертовом пространстве нет разумной меры Гаусса, то можно построить при помощи очень простой операции меру w на пространстве непрерывных функций, исходя из гауссовой промеры (в деталях см. гл. IX, § 6, п. 7, теорема 1). Мы кратко объясним первоначальную конструкцию Винера меры w (X); она берет непосредственное начало в соотношении $\Gamma = \lim_{m\to\infty} \sigma_{m,\sqrt{m}}$ Гато и Леви. Для любого целого $m \geqslant 1$ через H_m обозначим множество функций на $T =]0, 1]$, постоянных на каждом из интервалов $](k-1)/m, k/m]$ (для $k = 1, 2, \ldots, m$), а через π_m — меру с массой 1, инвариантную относительно вращения на евклидовой сфере радиуса 1 в $\mathbf{R}^m$. Пусть f_m — изоморфизм H_m на $\mathbf{R}^m$, который каждой функции, принимающей значение a_k на интервале $](k-1)/m, k/m]$, ставит в соответствие вектор $(a_1, a_2 - a_1, \ldots, a_m - a_{m-1})$ (отсюда и название «разностное пространство», принятое Винером); обозначим через w_m меру на H_m — образ π_m при отобра-

[4]) Более точно, имеет место следующий результат. Пусть U — автоморфизм гильбертова пространства l^2 и (u_{mn}) — его матрица. Пусть E — векторное пространство всех действительных последовательностей $(x_n)_{n\geqslant 1}$, а F — подпространство пространства E, состоящее из последовательностей $(x_n)_{n\geqslant 1}$, для которых ряды $\sum_{n\geqslant 1} u_{mn}x_n$ сходятся при $m \geqslant 1$. Формула $(\widetilde{U}x)_m = \sum_{n\geqslant 1} u_{mn}x_n$ определяет линейное отображение $\widetilde{U}$ пространства F в E, мера Г сосредоточена на F и $\widetilde{U}(\Gamma) = \Gamma$.

[5]) Это понятие было введено под названием «слабого канонического распределения» И. Сегалом (I. Segal, Trans. Amer. Math. Soc., 88 (1958), 12—42). Этому автору принадлежит детальное изучение гауссовых промер и их приложение к некоторым проблемам квантовой теории поля.

жении f_m^{-1}. Винер определяет искомую меру w как предел мер w_m. Более точно, обозначим через H множество линейчатых функций на T с топологией равномерной сходимости (имеем $H_m \subset H$ для любого целого $m \geqslant 1$); для любой равномерно непрерывной ограниченной функции F на H предел $A\{F\} = \lim_{m\to\infty} \int_{H_m} F(x)\, dw_m(x)$ существует; далее Винер получил некоторые оценки сверху при помощи тонкого анализа колебаний игры в орла и решетку, и используя аргументы компактности, найденные Даниелем, он показал, что в данной ситуации применима теорема продолжения Даниеля. Отсюда можно заключить о существовании меры w, несомой пространством $\mathscr{C}(T)$ и такой, что $A\{F\} = \int_{\mathscr{C}(T)} F(x)\, dw(x)$. Винер смог затем показать, что мера w соответствует гипотезам Эйнштейна [6]), и найденные оценки позволили ему придать точный смысл замечанию Перрена о функциях без производных: множество функций, удовлетворяющих условию Липшица порядка 1/2, пренебрежимо относительно w (напротив, для любого a, $0 < a < 1/2$, почти любая функция удовлетворяет условию Липшица порядка a).

В настоящее время известны многие способы построения меры Винера. Так, Пэли и Винер используют случайные ряды Фурье (XI), гл. IX: для любой действительной последовательности $a = (a_n)_{n\geqslant 1}$ и любого целого $m \geqslant 0$ определим функцию $f_{m,a}$ на $]0, 1]$ как

$$f_{m,a}(t) = a_1 t + 2 \sum_{k=2}^{2^{m+1}} \frac{1}{\pi k} a_{k-1} \sin \pi k t;$$

можно показать, что для Г-почти любой последовательности a последовательность функций $f_{m,a}$ стремится к непрерывной функции f_a и что w есть образ меры Г при отображении (определенном почти всюду) $a \mapsto f_a$. Позже Леви

---

[6]) Это записывается при помощи формулы

$$\int_{\mathscr{C}(T)} f(x(t_1), \cdots, x(t_n))\, dw(x) = (2\pi)^{-n/2} \prod_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1})^{-1/2} \times$$

$$\times \int \cdots \int f(x_1, \ldots, x_n) \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - x_{i-1})^2}{t_i - t_{i-1}}\right) dx_1 \ldots dx_n,$$

где f — произвольная непрерывная ограниченная функция на $\mathbf{R}^n$ и где $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n \leqslant 1$ (по соглашению $x_0 = 0$). Винер, приученный Харди к аналитической строгости и не доверявший, совершенно справедливо, основаниям теории вероятностей в эту эпоху, постарался не использовать ни вероятностную терминологию, ни результаты. Это привело к тому, что его работы наполнены огромными формулами, одна из которых приведена выше; эта особенность является одним из факторов, задержавших распространение идей Винера.

привел в (IXb, c) конструкцию, очень близкую к той, которую мы изложили в § 6, п. 7 гл. IX. Наконец, Кац, Донскер и Эрдёш показали к 1950 г., как заменить в первоначальном построении Винера сферические меры π_m на $\mathbf{R}^m$ более общими мерами. Их результаты устанавливают прочную связь между мерой Винера и предельными теоремами теории вероятностей; в дальнейшем они были дополнены и систематизированы Прохоровым (XIII) в работе, на которой мы задержимся ниже.

Мы не будем здесь анализировать многочисленные и важные вероятностные работы, вызванные открытием Винера; в настоящее время броуновское движение появляется уже только как один из наиболее важных примеров марковских процессов. Мы упомянем только приложение Кацем меры Винера к решению некоторых параболических уравнений с частными производными; это связано с применением идей Фейнмана в квантовой теории поля — один из многих примеров взаимного влияния математики и физических задач.

Проективные пределы мер. Речь идет о теории, которая развивалась главным образом для обеспечения нужд теории вероятностей. Проблемы, касающиеся конечной последовательности случайных величин $X_1, \ldots, X_n$, в принципе решены, когда известен закон P_X этой последовательности: это есть положительная мера с массой 1 на $\mathbf{R}^n$, такая, что вероятность одновременного выполнения неравенств $a_1 \leqslant X_1 \leqslant b_1, \ldots, a_n \leqslant X_n \leqslant b_n$ равна $P_X(C)$, где C — замкнутый кирпич $[a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ в $\mathbf{R}^n$. В практике мера P_X имеет дискретный носитель или имеет плотность относительно меры Лебега. Когда имеют дело с бесконечной последовательностью $(X_n)_{n\geqslant 1}$ случайных величин, то обычно известен закон P_n частичной последовательности $(X_1, \ldots, X_n)$ для любого целого $n \geqslant 1$; эти законы удовлетворяют условию согласованности, которое выражает тот факт, что последовательность $(P_n)_{n\geqslant 1}$ есть проективная система мер. К 1920 г. более или менее неявным образом были определены вероятности событий, связанные с бесконечной последовательностью, путем «естественных» переходов к пределу, исходя из конечного случая; таким образом, допускается, что вероятность окончания игры есть предел, при $n \to \infty$, вероятности того, что она окончится не более чем за n партий. Естественно, что такая теория довольно мало связна, и ничто не исключает наличие «парадоксов», когда одна и та же вероятность может получать два различных значения в зависимости от двух различных процессов, в одинаковой мере «естественных», по которым она вычисляется.

Штейнгауз (V), по-видимому, был первым, кто почувствовал необходимость рассмотреть (для игры в орла и решетку) не только проективную систему $(P_n)_{n\geqslant 1}$, но и ее предел. Незадолго до этого, в 1919 г., Даниель (VIb) доказал в общем случае существование таких проективных пределов [7]),

[7]) Даниель изучает случай мер на произведении $\prod_{n\geqslant 1} I_n$ компактных интервалов из $\mathbf{R}$, но его метод сразу же распространяется на случай произвольного произведения компактных пространств; это в основе и есть то, что мы использовали в гл. III, § 4, п. 5.

но этот результат, судя по всему, оставался неизвестным в Европе. Он был вновь найден в 1933 г. Колмогоровым в работе (XII), где этот автор формулирует аксиоматическую концепцию теории вероятностей. В доказательствах Даниеля и Колмогорова используется аргумент компактности, который почти в том же виде применяется нами в теореме 2 § 4, п. 3 гл. IX и основан на теореме Дини.

Теорема Даниеля — Колмогорова не оставляет желать ничего лучшего для случая случайных последовательностей $(X_n)_{n\geqslant 1}$, но изучение случайных функций, предпринятое начиная с 1935 г. Колмогоровым, Феллером и Дубом, вскрыло трудности совсем другого порядка. Рассмотрим, например, интервал T из $\mathbf{R}$, представляющий собой множество моментов наблюдения некоторого «стохастического процесса»; множество возможных траекторий есть пространство-произведение $\mathbf{R}^T$, рассматриваемое как проективный предел частичных произведений $\mathbf{R}^H$, где H пробегает конечные подмножества из T; в общем случае задаются проективной системой мер (μ_H) (ср. § 4, п. 3 гл. IX). Теорема Колмогорова дает меру на $\mathbf{R}^T$, но эта мера определена на σ-алгебре, значительно более узкой, чем борелевская σ-алгебра [8]). Один вариант конструкции Колмогорова, определяющий меру на топологическом пространстве, принадлежит Какутани (Proc. Imp. Akad. Tokyo XIX (1943), 184—188) и был вновь переоткрыт затем много раз: μ_H рассматривается как мера на $\overline{\mathbf{R}}^H$, несомая $\mathbf{R}^H$ [9]); компактное пространство $E=\overline{\mathbf{R}}^T$ есть проективный предел конечных произведений $\overline{\mathbf{R}}^H$, и можно определить меру μ на E как проективный предел мер μ_H (ср. гл. III, § 4, п. 5). Но этот процесс страдает большим неудобством; элементы из $\overline{\mathbf{R}}^T$ не обладают никаким свойством регулярности, позволяющим продвинуть дальше изучение вероятностных процессов — или даже просто исключить паразитические значения $\pm\infty$, вводимые при компактификации $\overline{\mathbf{R}}$ прямой $\mathbf{R}$. Это можно исправить, индуцируя меру μ с $\overline{\mathbf{R}}^T$ на то или другое подпространство (например, $\mathscr{C}(T)$ в случае броуновского движения); основная трудность проистекает из того, что функциональное пространство, даже самое обычное, не всегда μ-измеримо в $\overline{\mathbf{R}}^T$, и выбор самого функционального пространства может представлять трудность [10]).

---

[8]) Мера Колмогорова определена лишь для борелевских множеств в $\mathbf{R}^T$ вида $A\times\mathbf{R}^{T-D}$, где D есть счетное подмножество из T, а A есть борелевское подмножество из $\mathbf{R}^D$; на основании этого факта теорема Колмогорова для произвольного произведения $\mathbf{R}^T$ есть непосредственное следствие случая счетных произведений.

[9]) Можно было бы заменить $\overline{\mathbf{R}}$ каким угодно компактным пространством, содержащим $\mathbf{R}$ в качестве плотного подпространства.

[10]) О детальном обсуждении проблемы построения мер на функциональных пространствах и методах, использовавшихся до Прохорова, см. J. L. Doob, Bull. Amer. Math. Soc., 53 (1947), 15—30.

Решающий шаг был совершен в 1956 г. Прохоровым в работе (XIII), оказавшей определяющее влияние на теорию стохастических процессов. Придав надлежащую аксиоматическую форму методам, использованным Винером в анализировавшейся выше работе, он доказал общую теорему существования проективных пределов мер на функциональных пространствах, которая является частным случаем теоремы 1 § 4, п. 2 гл. IX, соответствующим польским пространствам.

Более узкий класс проективных систем был введен Бохнером (XIV) в 1947 г.; речь идет о проективных системах, состоящих из конечномерных действительных векторных пространств и сюръективных линейных отображений. Проективный предел такой системы отождествляется естественным образом с алгебраическим сопряженным E^* к действительному векторному пространству E, наделенным слабой топологией $\sigma(E^*, E)$; соответствующая проективная система мер имеет предел, который является мерой μ, определенной на σ-алгебре, существенно более узкой, чем борелевская σ-алгебра из E^*. Бохнер полностью охарактеризовал такие «промеры» при помощи их преобразований Фурье, представляющих собой функции на E. Но этот результат почти не может быть использован при отсутствии топологии на E, а в случае, когда она имеется, необходимо исследовать возможность рассматривать μ как меру на сопряженном к E топологическом пространстве E. Независимо Р. Форте и Е. Мурье, пытаясь обобщить на случайные переменные со значениями в банаховом пространстве некоторые классические результаты теории вероятностей (закон больших чисел, центральная предельная теорема), выявили также фундаментальную роль, которую играет в этих вопросах преобразование Фурье. Но существенный прогресс был достигнут только в 1956 г., когда Гельфанд (XVb) высказал мысль, что естественными для преобразования Фурье являются не банаховы или гильбертовы пространства, а ядерные пространства Фреше. Он предположил, что любая непрерывная функция положительного типа на таком пространстве является преобразованием Фурье некоторой меры на его сопряженном; этот результат был вскоре доказан Минлосом (XVI). Его важность проистекает в особенности из того, что он применяется к пространствам распределений и что квазисумма функциональных пространств является борелевскими подмножествами пространства распределений (которое служит, таким образом, гораздо лучшим вместилищем, чем $\mathbf{R}^T$)[11]. Теория случайных распределений есть область, находящаяся в стадии развития, и мы ограничимся тем, что отошлем читателя к книге Гельфанда и Виленкина (XVII).

Результаты о проективных пределах, о которых только что шла речь, используют существование топологии на исходных пространствах. Можно задать вопрос, существует ли аналогичная теория в случае «абстрактных» мер. Фон Нейман доказал в 1935 г. существование мер-произведений во всех

---

[11]) Суть дела изложена в работе: X. Fernique, Ann. Inst. Fourier, XVII (1967), 1—92, содержащей также многочисленные результаты об узкой сходимости.

случаях, но построение контрпримера Иессеном и Андерсеном (XVIII) разрушило надежду на то, что любая проективная система мер имеет предел. Были получены два промежуточных результата: в 1949 г. С. Ионеску-Тулчи доказал существование счетных проективных пределов при помощи существования надлежащих дезинтегрирований [12]), результат, представляющий большой интерес для изучения марковских процессов; впрочем, было замечено, что топология пространств входит лишь через посредство множества компактных подмножеств. Стало быть, естественно было пытаться аксиоматизировать эту ситуацию внутри абстрактной теории при помощи понятия компактного класса подмножеств некоторого множества. Эта работа была проделана в 1953 г. Марчевским (который доказал при помощи этого способа абстрактную теорему о проективных пределах) и Рыль-Нарджевским (который изучил дезинтегрирование мер) [13]).

Меры на общих топологических пространствах и узкая сходимость. Изучение связей между топологией и теорией меры происходило главным образом как изучение свойств регулярности мер и, в частности, «внешней» регулярности и «внутренней» регулярности [14]); внутренняя регулярность эквивалентна внешней регулярности на локально компактном пространстве, счетном в бесконечности. Предложенная Лебегом конструкция меры множеств на прямой подчеркивает эти два вида регулярности, а свойство внешней регулярности мер на польских пространствах, судя по всему, было в явном виде опубликовано к 1935 г. Но лишь в 1940 г. в работе (XIX), распространение которой было задержано войной, А. Д. Александров выявил роль внутренней регулярности и показал, что ею обладают меры на польском пространстве; этот результат был вновь открыт позже Прохоровым (XIII). Лишь недавно было замечено, что это свойство распространяется на суслинские пространства; это повело к тому, что важность этих пространств сильно возросла, тем более что, как было замечено, их теория может быть создана без условий метризуемости и квазисуммы функциональных пространств являются суслинскими пространствами (и даже чаще лузинскими) [15]). Эти причины побудили нас сделать акцент в этой (IX) главе на внутренние регулярные меры.

---

[12]) По-видимому, именно отсутствие удовлетворительной теории дезинтегрирования ограничивает пределы теории «абстрактных» мер. Эта трудность постоянно появляется в теории вероятностей в связи с условными вероятностями.

[13]) Изложение этой теории можно найти: J. Pfanzagl, W. Pierla, Lecture Notes in Mathematics (Springer Verlag), v. 16 (1966).

[14]) «Абстрактная» мера μ на борелевской σ-алгебре отделимого топологического пространства называется внешне регулярной, если мера любого борелевского множества есть нижняя грань мер открытых множеств, его содержащих; мера μ называется внутренне регулярной, если мера любого борелевского множества есть верхняя грань мер его компактных подмножеств.

[15]) Пытаясь разрешить некоторые вероятностные трудности (в частности, связи между различными понятиями стохастической независимости

Определение вида сходимости (широкой или узкой) для мер становится более удобным, если пространство мер и пространство непрерывных функций находятся в двойственности. Обобщая старый результат Ф. Рисса, А. А. Марков установил в 1938 г. взаимно однозначное соответствие между положительными функционалами на $\mathscr{C}(X)$ и регулярными мерами на компактном пространстве X. В работе (XIX), уже цитировавшейся выше, А. Д. Александров распространяет эти результаты на случай вполне регулярного пространства: он вводит иерархию во множестве положительных линейных форм на пространстве $\mathscr{C}^b(X)$ ограниченных непрерывных функций на вполне регулярном пространстве X [16]), определяет узкую сходимость ограниченных мер и доказывает среди других следующие две теоремы:

а) если X — польское пространство, то множество линейных форм на $\mathscr{C}^b(X)$, соответствующих мерам, замкнуто относительно слабой сходимости последовательностей;

б) если последовательность ограниченных мер имеет узкий предел, то «не имеется массы, удаляющейся в бесконечность» (это есть слабая форма обращения теоремы узкой сходимости Прохорова).

Из этого изобилия понятий и теорем Прохоров вывел важные результаты для теории стохастических процессов и представил их в простой и яркой форме. В его большой работе 1956 г., уже цитировавшейся выше (XIII), большое место уделено ограниченным положительным мерам на польском пространстве; обобщая конструкцию Леви, он определяет на множестве положительных мер с массой 1 расстояние, превращающее его в польское пространство, а затем он устанавливает важный критерий компактности для узкой сходимости (ср. гл. IX, § 5, п. 5, теорема 1). Независимо от Прохорова Ле Кам (XX) получил некоторое число результатов компактности и узкой сходимости мер; при этом он не делает никаких предположений о метризуемости пространств, которые он рассматривает, и его результаты сводятся к прежним теоремам Дьедонне в локально компактном случае.

или зависимости), многие авторы вводят более узкие классы «абстрактных» мер: «совершенные» пространства Колмогорова — Гнеденко, «лузинские» пространства Блекуелла, пространства «Лебега» Рохлина. На самом же деле во всяком случае при наличии довольно слабого условия счетности все эти определения характеризуют «абстрактные» меры, изоморфные некоторой ограниченной положительной мере на суслинском пространстве. По этому поводу можно обратиться к работе, процитированной в сноске [13]).

[16]) Он различает в порядке убывания общности σ-меры («абстрактные» меры на борелевской σ-алгебре пространства X), τ-меры (внешне регулярные меры) и плотные меры (внутренне регулярные меры). В случае польского пространства X все эти три понятия совпадают. Терминология принадлежит Мак Шейну и Ле Каму (XX). Последовательное изложение работ, связанное с этой классификацией, можно найти в работе: V. S. Varadarajan (Amer. Math. Soc. Translations (2), 48, p. 161—228).

БИБЛИОГРАФИЯ

(I) de la Vallée Poussin. Ch., Integrales de Lebesgue, Fonctions d'ensembles, Classes de Baire, Paris, Gautier-Villars, 1916 (1—e éd.), 1936 (2—e éd.).

(II) Fréchet M., a) Sur l'integrale d'une fonctionnelle étendue à un ensemble abstrait, Bull. Soc. Math. de France, t. XLIII (1915), 248—265.

b) Les familles et fonctions additives d'ensembles abstraits, Fund. Math., t. IV (1923), 329—365; t. V (1924), 206—251.

(III) Сакс С., Теория интеграла. М., ИЛ, 1949.

(IV) Borel E., Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques, Rend. Circ. Math. Palermo, t. XXVII (1909), 247—271.

(V) Steinhaus H., Les probabilités dénombrables et leurs rapport à la théorie de la mesure, Fund. Math., t. IV (1923), 286—310.

(VI) Daniell P. J.: a) Integrals in an infinite number of dimensions, Ann. of Math., t. XX (1918—19), 281—288.

b) Functions of limited variation in an infinite number of dimensions, Ann. of Math., t. XXI (1919—20), 30—38.

(VII) Jessen B., The theory of integration in a space of an infinite number of dimensions, Acta Math., t. LXIII (1934), 249—323.

(VIII) Einstein A., Investigations on the Theory of the Brownian Movement, N.Y., Dover, 1956.

(IX) Леви П.: a) Конкретные проблемы функционального анализа, М., «Наука», 1967.

b) Стохастические процессы и броуновское движение, М., «Наука», 1972.

c) Lévy P., Le mouvement brownien, Memorial des Sciences Mathematiques, t. CXXVI, 1954.

(X) Wiener N., Differential space, J. Math. Phys., MIT, t. II (1923), 131—174. (=Selecta, 55—98, Cambridge (MIT Press), 1964).

(XI) Винер Н., Пэли Р., Преобразование Фурье в комплексной области, М., «Наука», 1964.

(XII) Колмогоров А. Н., Основные понятия теории вероятностей, изд. 2-е, М., «Наука», 1974.

(XIII) Прохоров Ю. В., Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей, Теория вероятностей и ее применения, 1 (1956), 177—238.

(XIV) Bochner S., Harmonic Analysis and the Theory of Probability, Berkeley, University of California Press, 1960.

(XV) Гельфанд И. М.: a) Обобщенные случайные процессы, ДАН 100 (1955), 853—856.
b) О некоторых проблемах функционального анализа, УМН 11, вып. 6 (1956), 3—12.

(XVI) Минлос Р. А., Обобщенные случайные процессы и их продолжение до меры, Труды Моск. матем. о-ва 8 (1959), 497—518.

(XVII) Гельфанд И. М., Виленкин Н. Я., Обобщенные функции, вып. 4, М., Физматгиз, 1961.

(XVIII) Sparre-Anderssen E., Jessen B., On the introduction of measures in infinite product sets, Dansk. Vid. Selbskab, Mat. Fys. Medd., t. XXV (1948), № 4, 1—7.

(XIX) Александров А. Д., Additive set functions in abstract spaces, Матем. сборник 8 (1940), 307—348; 9 (1941), 563—628; 13 (1943), 169—238.

(XX) Le Cam L., Convergence in distribution of stochastic processes, Univ. Cal. Publ. Statistics, № 11 (1957), 207—236.

УКАЗАТЕЛЬ ТЕРМИНОВ

	Гл. §	п°
Абсолютное значение меры	III 1	6
μ-адаптированная (μ-приспособленная) мера	V 4	1
Аддитивная функция множества	IV 4	9
	IX 3	2
Алгебра подмножеств (клан подмножеств)		
σ-алгебра (тело)	IV 4	9
Ассоциированная промера	IX 6	1
Атомическая мера	III 1	3
Базис меры	V 5	2
	IX 2	2
Барицентр меры	IV 7	1
Бишопа теорема	IV 7	5
Бохнера теорема	IX 6	12
Вариация меры	IX 6	5
Верхний интеграл	IX 1	9
Винера мера	IX 6	7
Внешняя мера	IV 1	2
	IV 1	4
	IX 1	9
Гауссова каноническая промера на действительном гильбертовом пространстве	IX 6	6
— мера	IX 6	5
— — с матрицей ковариации C	IX 6	6
Гауссова промера с вариацией Q	IX 6	5
— — с ковариацией K	IX 6	6
Гёльдера неравенство	IV 6	4
Гильберта — Шмидта отображение	IX	Добавление 2
Двойной интеграл	III 4	1
Дезинтегрирование меры	V 6	6
	IX 2	7
Действительная мера	III 1	5
— часть меры	IX 1	5
Дирака мера	III 1	3
Диффузия ограниченная	V 3	5
Егорова теорема	IV 5	4
Заграждение	IX 1	1
— индуцированное	IX 1	1
— локально ограниченное	IX 1	1
— обраг	IX 1	1
— ограниченное	IX 1	1
— сосредоточенное на подмножестве	IX 1	1
Измельчение	IX 1	8
Измеримая функция	IV 5	1
	IX 1	5
— —, определенная на измеримом подмножестве	IV 5	10

	Гл. §	п°
μ-измеримая функция	IV 5	1
Измеримое множество	IV 5	1
	IX 1	5
μ-измеримое множество	IV 5	1
Инвариантная мера при гомеоморфизме	III 1	3
Индуцированная мера	IX 2	1
— — на открытое множество	III 2	1
— — на локально компактное подпространство	IV 5	7
Индуцированное заграждение	IX 1	1
Интеграл верхний	IV 1	1
	IV 1	3
	IV 4 упр.	5
	IX 1	9
— — существенный	I 1	1
	IX 1	2
— двойной	III 4	1
— кратный	III 4	4
— нижний	IV 4 упр.	5
— от интегрируемой функции	IV 4	1
— от непрерывной функции с компактным носителем	III 1	3
— от слабо непрерывной финитной функции	III 3	1
— от существенно интегрируемой функции	V 1	3
— от функции	IX 1	10
— — — на A	V 5	3
Интегрирование по частям	V 8 упр.	9
Интегрируемая функция	IV 4	1
	IX 1	10
μ-интегрируемая функция	IV 4	1
Интегрируемое множество	IV 4	5
	IX 1	9
μ-интегрируемое множество	IV 4	5
Квадратичная форма ядерная	IX Добавление	1
Класс эквивалентности функций относительно меры	IV 2	4
	IV 2	5
	IV 5	2
Ковариация гауссовой промеры на $\mathbf{R}^T$	IX 6	6
Комплексная мера	III 1	3
Конечная почти всюду функция	IV 2	6
Кратный интеграл	III 4	4
Лапласа преобразование	IX 5	7
Лебега мера	III 1	3
	III 4	1
	III 4	4
— теорема	IV 3	7
	IV 4	3
— — о разбиении	V 5	7
Локально интегрируемая функция	IX 2	2
— ограниченная функция множества	IX 3	2
— ограниченное заграждение	IX 1	1
— почти всюду	IX 1	4
— пренебрежимая функция	IV 5	2
	IX 1	4
— пренебрежимое множество	IV 5	2
	IX 1	4

	Гл. §	п°
Локально счетное множество подмножеств	IV 5	9
— — семейство функций	V 5	4
Максимум по мере	IV 6	2
μ-максимум	IV 6	2
Мера	III 1	3
	IX 1	2
— атомическая	III 1	3
— Винера	IX 6	7
— внешняя	IV 1	2
	IV 1	4
— — множества	IX 1	9
— внутренняя	IV 4 упр.	7
— зауссова с вариацией Q	IX 6	5
— действительная	III 1	5
— Дирака	III 1	3
— дискретная	III 1	3
— инвариантная при гомеоморфизме	III 1	3
— индуцированная	III 2	1
	IV 5	7
	IX 2	1
— комплексная	III 1	3
— Лебега	III 1	3
	III 4	1
	III 4	4
— модерантная	IX 1	9
—, не содержащая массы на открытом множестве	III 2	2
— ограниченная	III 1	8
	IX 1	2
—, определенная посредством единичной массы в точке	III 1	3
—, — посредством масс	III 1	3
— плотности g (соотв. f) относительно μ	III 1	4
	IX 2	2
Мера положительная	III 1	5
— с базисом μ	IX 2	2
— с матрицей ковариации	IX 6	6
— сопряженная	III 1	5
— точечная	III 2	4
Мера-образ	IX 2	3
Мера-произведение	III 4	1
	IX 2	5
Минимум по мере	IV 6	2
μ-минимум	IV 6	2
Минковского неравенство	IV 3	1
Минлоса теорема	IX 6	10
Мнимая часть меры	III 1	5
Множество измеримое	IX 1	5
— интегрируемое	IV 4	5
	IX 1	9
— μ-интегрируемое	IV 4	5
— квадрируемое	IV 5	17
— локально пренебрежимое	IV 5	2
	IX 1	4
— — μ-пренебрежимое	IV 5	2
— — счетное (подмножеств)	IV 5	9
— модерантное	IX 1	9
—, несущее меру	V 5	7
— μ-плотное (компактных подмножеств)	IV 5	8
— пренебрежимое	IV 2	2
	IX 1	9
— μ-пренебрежимое	IV 2	2
— равностепенно интегрируемое	IV 5	11
—, строго компактное в $\mathscr{K}(X; E)$	III 1	1
— универсально измеримое	IX 3	3
Модерантная мера	IX 1	9
— функция	IX 1	9

	Гл. §	п°
Модерантное множество	IX 1	9
Непрерывная мера (рассеянная)	V 5	10
Неравенство Гёльдера	IV 6	4
— Минковского	IV 3	1
— о среднем	IV 6	2
— М. Рисса	IV 6	18
— Харди	IV 6	19
Норма меры	III 1	8
Носитель меры	III 2	2
	IX 1	6
— функции	III 1	1
Образ заграждения	IX 1	1
— меры	V 6	1
	IX 2	3
— промеры	IX 6	2
Ограниченная мера	III 1	8
	IX 1	2
— функция множества	IX 3	2
Ортогональная система Хаара	IV 6	17
Отображение Гильберта — Шмидта	IX	Добавление 2
— скалярно слабо непрерывное	III 3	1
— — финитное	III 3	1
Пара μ-адаптированная	V 4	1
Плотность	III 1	4
— меры (относительно другой)	V 5	2
	IX 2	2
Подмоноид полный	IX 5	7
Подпроективная система мер	IX 4	2
Положительная мера	III 1	5
	IX 1	2
— предмера	IX 1	2

	Гл. §	п°
Полная масса ограниченной меры	III 1	8
	IV 4	7
— — промеры	IX 6	1
Последовательность, сходящаяся почти всюду	IV 2	5
Предельное распределение последовательности	III 2	упр. 5
Предмера	IX 1	2
— действительная	IX 1	2
— положительная	IX 1	2
Пренебрежимая функция	IV 2	1
	IX 1	9
μ-пренебрежимая функция	IV 2	1
	IV 2	4
Пренебрежимое множество	IV 2	2
	IX 1	9
μ-пренебрежимое множество	IV 2	2
Преобразование Лапласа меры	IX 5	7
Принцип локализации для измеримых функций	IV 5	2
— — для мер	III 2	1
Проективная система мер	III 4	5
	IX 4	2
Проективный предел мер	IX 4	2
Произведение двух мер	III 4	1
	IX 2	5
— конечного числа мер	III 4	4
— меры на непрерывную функцию	III 1	4
— семейства мер	IX 4	3
— — положительных мер	III 4	6

	Гл. §	п°
Производящая функция последовательности	IX 5	7
Промера	IX 6	1
—, ассоциированная с мерой	IX 6	1
Промера-образ	IX 6	2
Прообраз меры при локальном гомеоморфизме	V 6	6
Пространство радоново	IX 3	3
— сильно радоново	IX 3	3
— ядерное	IX 6	10
Прохорова теорема	IX 4	2
— условие	IX 4	2
	IX 5	5
Равномерная структура сходимости по мере	IV 5	11
Равнораспределенная по мере последовательность	III 2	упр. 5
Равностепенно интегрируемое множество	IV 5	11
Радоново пространство	IX 3	3
Разбиение на слои	V 6	6
Размещенная измеримая функция	IV 5	5
— функция	IV 4	9
Ф-размещенная функция	IV 4	9
Сазонова топология	IX 6	10
Свойство, верное локально почти всюду	IV 5	2
—, — почти всюду	IV 2	3
Сильно радоново пространство	IX 3	3
Сингулярные меры (негависимые)	V 5	7
Скалярно финитная функция	III 3	1
Слабо непрерывное отображение	III 3	1
След квадратичной формы (относительно другой)	IX	Добавление 1
μ-собственное отображение	V 6	1
	V 6	4
	IX 2	3
μ-согласованное отображение	V 3	1
Сопряженная мера	III 1	5
Сопряженное к линейному отображению	IX	Добавление 2
Сопряженные показатели	IV 6	4
Сосредоточенная мера (на множестве)	V 5	7
— — на подмножестве	IX 1	4
Среднее функции	III 1	8
Строго компактное множество	III 1	1
Сужение меры на открытое множество	III 2	1
Сумма семейства мер	IX 1	7
Суммируемое семейство положительных мер	V 2	1
Существенно интегрируемая функция на A	V 5	3
— μ-интегрируемая функция	V 1	3
μ-интегрируемое множество	V 1	3
Существенный верхний интеграл	V 1	1
	IX 1	2

	Гл. §	п°
Сходимость в среднем	IV 3	3
— — — порядка	IV 3	3
— — — средняя квадратичная	IV 3	3
— компактная (в пространстве мер)	III 1	10
— по мере	IV 5	11
— строго компактная (в пространстве мер)	III 1	10
— широкая	III 1	9
Счетно аддитивная функция множества	IX 3	2
Тело (см. σ-алгебра)		
Теорема Бишопа	IV 7	5
— Бохнера	IX 6	12
— Егорова	IV 5	4
— Крейна	IV 7 упр.	10
— Лебега	IV 3	7
	IV 4	3
— — о разбиении	V 5	7
— Минлоса	IX 6	10
— о счетной выпуклости	IV 3	2
— Прохорова	IX 4	2
— Шоке	IV 7	2
	IV 7	6
Топология компактной сходимости	III 1	10
— Сазонова	IX 6	10
— сходимости в среднем	IV 3	3
— — по мере	IV 5	11
— узкая	IX 5	3
— широкая	III 1	9
Точечная мера	III 2	4
Точка $\mathcal{H}$-экстремальная	IV 7	3
Убывающая перестановка функции	IV 5 упр.	29
Узкая топология	IX 5	3
Универсально измеримая функция	IX 2	7
— измеримое множество	V 3	4
	IX 3	3
Функции равноизмеримые	IV 5 упр.	29
Функция, зависящая от конечного числа переменных	III 4	6
— измеримая	IV 5	1
	IX 1	5
— μ-измеримая	IV 5	1
— -измеримая на A	V 5	3
— μ-модерантная	V 1	2
— интегрируемая	IX 1	10
—, интегрируемая с p-й степенью	IV 3	4
— Лебега	IV 6 упр.	15
— локально интегрируемая	V 5	1
	IX 2	2
— — — на A	V 5	3
— — пренебрежимая	IV 5	2
— — μ-пренебрежимая	IV 5	2
— множества аддитивная	IV 4	9
— — внутренне регулярная	IX 3	2
— — локально ограниченная	IX 3	2
— — ограниченная	IX 3	2
— счетно аддитивная	IX 3	2
— модерантная	IX 1	9
—, ограниченная по мере	IV 6	2
	IV 6	3
—, определенная локально почти всюду	IV 5	2
—, — почти всюду	IV 2	5

	Гл.	§	п°
Функция положительного типа	IX	6	12
— *пренебрежимая*	IV	2	1
	IX	1	9
— μ-*пренебрежимая*	IV	2	4
— *размещенная*	IV	4	9
— Ф-*размещенная*	IV	4	9
— *скалярно существенно интегрируемая*	V	3	1
— *существенно интегрируемая*	V	1	3
	IX	1	10
— — — *с р-й степенью*	V	1	3
— *универсально измеримая*	V	3	4
	IX	2	7
— *широко непрерывная*	V	3	1
— — μ-*измеримая*	V	3	1
Фурье преобразование промеры	IX	6	3
Характер моноида	IX	5	7
Широкая топология	III	1	9
Шоке теорема	IV	7	2
	IV	7	6
Эквивалентные меры	V	5	6
— *функции*	IV	2	4
μ-*эквивалентные функции*	IV	2	4
H-экстремальная точка	IV	7	3
Ядерная квадратичная форма	IX	Добавление 1	
Ядерное пространство	IX	6	10
Ядро положительного типа	IX	6	6

Цена 2 р. 80 к.

Группа французских математиков, объединенная под псевдонимом «Бурбаки», поставила перед собой цель — написать под общим заглавием «Элементы математики» полный трактат современной математической науки.

Много томов этого трактата уже вышло во Франции. Они вызвали большой интерес математиков всего мира как новизной изложения, так и высоким научным уровнем.

Книга рассчитана на математиков — научных работников, аспирантов и студентов старших курсов.

Н. БУРБАКИ

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИКИ

ПЕРВАЯ ЧАСТЬ

Книга I. Теория множеств
Книга II. Алгебра
Книга III. Общая топология
Книга IV. Функции действительного переменного
Книга V. Топологические векторные пространства
Книга VI. Интегрирование

ВТОРАЯ ЧАСТЬ

Книга (без номера). Группы и алгебры Ли
Книга (без номера). Коммутативная алгебра

БУРБАКИ

ИНТЕГРИРОВАНИЕ
МЕРЫ НА ЛОКАЛЬНО КОМПАКТНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ
МЕРЫ НА ОТДЕЛИМЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИКИ

Н. БУРБАКИ

ИНТЕГРИРОВАНИЕ

МЕРЫ НА ЛОКАЛЬНО КОМПАКТНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

ПРОДОЛЖЕНИЕ МЕРЫ

ИНТЕГРИРОВАНИЕ МЕР

МЕРЫ НА ОТДЕЛИМЫХ ПРОСТРАНСТВА